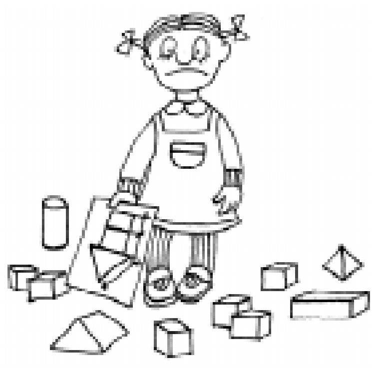
Гейнц Шуман

РЕШЕНИЕ АНАЛИТИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ СТЕРЕОМЕТРИИ С ПОМОЩЬЮ КОМПЬЮТЕРА

1. ВВЕДЕНИЕ

Практика показывает, что многие ученики старшей школы испытывают определенные трудности в постановке и решении аналитико-геометрических задач стереометрии. Подходящая система трехмерной графики, например, **DreiDGeo** (название можно попробовать перевести с немецкого как 3DGeo), может помочь в преодолении этих трудностей и способствовать развитию пространственного воображения и навыков в изучении пространственных отношений. Мы исходим из тезиса, что образ какой-либо пространственной фигуры может возникнуть в голове ученика только на основе наблюдения над реальным объектом или наглядным изображением этого объекта. Статические рисунки на классной доске или изготовленные вручную листы с изображениями проекций обладают сомнительной ценностью для пространственного восприятия и не могут служить основой для развития адекватных пространственных представлений, необходимых для решения задач пространственной аналитической геометрии – что, конечно, не исключает возможности решения этих задач учениками и без таких представлений, почти «вслепую», используя готовые алгоритмы решения.



... многие ученики ... испытывают определенные трудности в постановке и решении аналитико-геометрических задач стереометрии.

Добавим еще одно соображение. Вообще задачи аналитической геометрии имеют специфический характер, то есть при использовании алгебраических методов они предполагают только численное решение. Средства компьютерной алгебры и численные методы соответствующих математических пакетов, таких как, например, **DERIVE**, позволяют произвести расчет, подставляя конкретные значения параметров в общее решение задачи. Таким образом становится доступным целый класс задач, однако при этом требуют рассмотрения условия разрешимости задач из этого класса, что и делает интересной их постановку помимо чисто вычислительной стороны.

Связь между методами компьютерной алгебры и компьютерной графики в процессе решения какой-либо задачи состоит в том, что графическое решение базируется на общем решении, неявно используемым данной графической средой.

Далее в качестве примера рассмотрим применение как графического, так и алгебраического методов в решении одной классической задачи.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМПЬЮТЕРА

План действий таков: сначала задача будет рассмотрена с графической точки зрения, а затем разобрано решение соответствующей общей алгебраической задачи. Графическое решение конкретной задачи придаст наглядность и поможет лучшему пониманию общей абстрактной задачи.

2.1. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Задача.
Даны две прямые g_1, g_2
g_1: $\vec{x} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{a}$ с $\vec{p} = (-6, 6, 8)$,
$\vec{a} = (2, 3, -3)$,
g_2: $\vec{y} = \vec{q} + \mu \cdot \vec{b}$ с $\vec{q} = (-3, -8, 3)$,
$\vec{b} = (5, -2, 3)$ и точка $R = (-4, -5, 9)$.
Найти прямую g, проходящую через точку R и пересекающую прямые g_1 и g_2, точки пересечения g с g_1 и g_2 и углы, образованные пересечением g с g_1, g с g_2.

Приведем краткий план действий, основанный на средствах визуализации, построения и измерения, предоставляемых программой **DreiDGeo**.

1. Ввод числовых характеристик данного объекта, необходимых для создания его графического образа.

2. Проведение эксперимента для решения вопроса о существовании решения.

3. Построение вспомогательных графических объектов, необходимых для решения задачи.

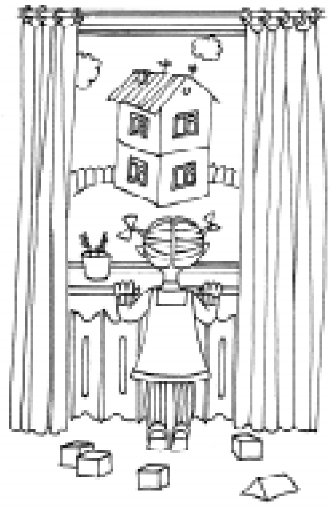
4. Построение графического решения на основе исходных и вспомогательных объектов.

5. Определение числовых параметров, характеризующих полученное графическое решение.

6. Варьирование исходных данных для выяснения их влияния на решение.

Примечания:

На каждом шаге используется визуализация исследуемого объекта путем вращения его вокруг некоторого центра, при



...образ какой-либо пространственной фигуры может возникнуть в голове ученика только на основе наблюдения над реальным объектом или наглядным изображением этого объекта.

этом для улучшения изображения изменяется контрастность, применяется масштабирование, вводится трехмерная система координат и т. д.

Полученные графические решения сохраняются на диске и используются в дальнейшем для расширения набора задач.

Решение задачи с помощью DreiDGeo

Мы вводим данные, определяющие прямые g_1 и g_2 и точку R (рисунок 1). Эти объекты автоматически изображают-

... сначала задача будет рассмотрена решена с графической точки зрения...

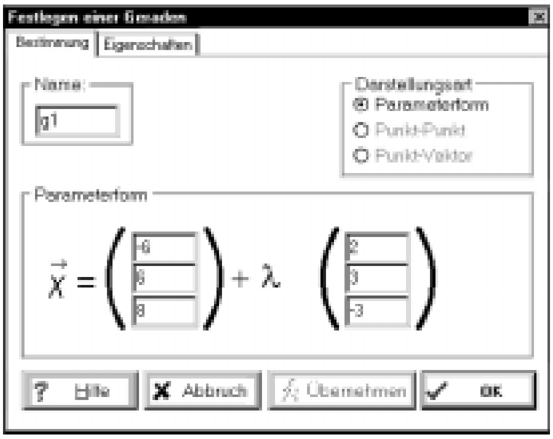


Рисунок 1.

ся в трехмерной системе координат (рисунок 2.1).

Мы можем видеть расположение скрещивающихся прямых и точки, вращая всю конфигурацию. Экспериментируя таким образом, удается выяснить, что должна существовать прямая g, проходящая через R и пересекающаяся с двумя данными прямыми.

Действительно, вращая всю конфигурацию, можно добиться того, чтобы g проходила через точку R, в которой пересекаются прямые g_1 и g_2 (рисунок 2.2).

На каждом шаге используется визуализация исследуемого объекта путем вращения его вокруг некоторого центра

В качестве вспомогательных объектов мы строим плоскости e_1 и e_2, проходящие через R и прямые g_1 и g_2 соответственно, так как искомая прямая g должна проходить через точку R и пересекаться с прямыми g_1 и g_2 (рисунок 3.1). Вид снизу этой конфигурации показан на рисунке 3.2.

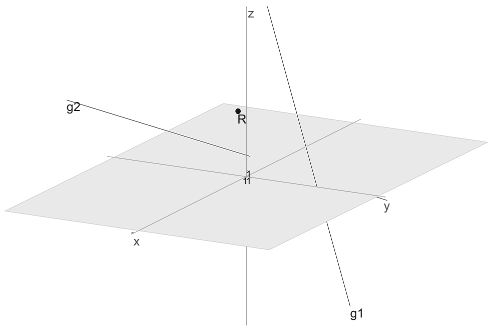


Рисунок 2.1.

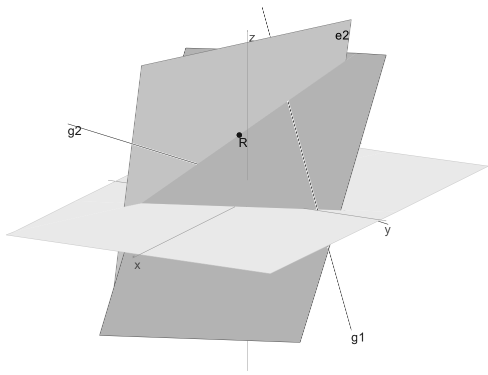


Рисунок 3.1.

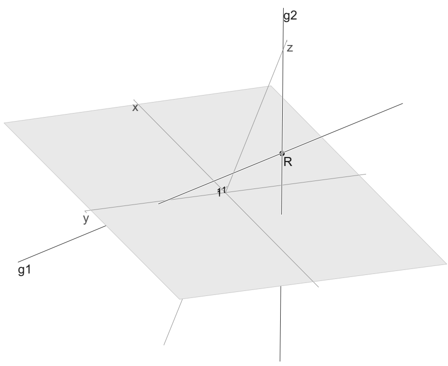


Рисунок 2.2.

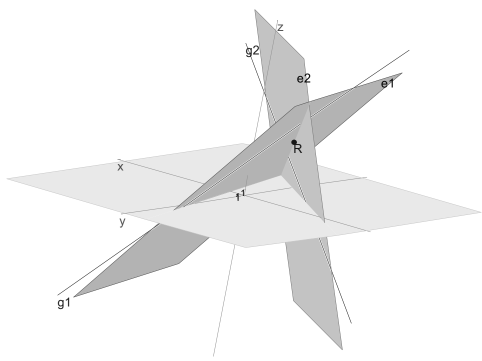


Рисунок 3.2.

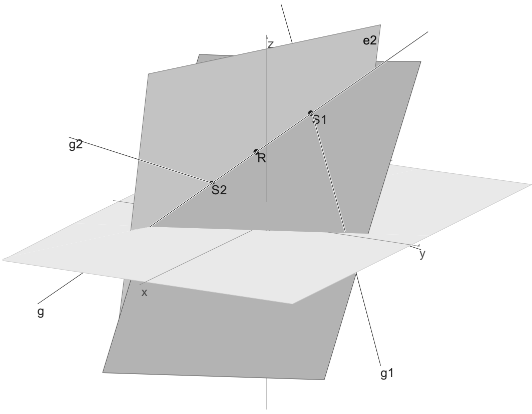


Рисунок 4.

Итак прямая g является линией пересечения обеих плоскостей (результат изображен на рисунке 4). Она проходит через точку (–4, –5, 9), а ее направляющий вектор приближенно равен (–3.08, 2.93, 2.36) или более точно (если использовать целочисленные координаты): (–514, 489, 411). Аналогично получаем S_1 и S_2 (точные значения координат, например для S_1, на рисунке 5).

Наконец, измерим угол между g и g_2 и g и g_1 соответственно (рисунок 6). На рисунке 6 показано также меню для управления графическими объектами (протоколирование, отбор и вывод), в котором, среди прочего, имеются средства скрытия самих объектов или надписей на них.

В заключение изменим прямые g_1, g_2 так, чтобы они пересекались. Тогда решение задачи тривиально: g соединяет их точку пересечения с точкой R (рисунок 7). В случае параллельных прямых g_1, g_2: если R

Рисунок 6.

принадлежит плоскости, проходящей через g_1, g_2, то существует бесконечно много прямых g, в противном случае решений нет.

Диаграмма 1 иллюстрирует работу с **DreiDGeo**. Диаграмма показывает, как наша задача решается численно.

Какой аналитико-геометрический алгоритм для решения любой встречающейся задачи используется в **DreiDGeo**?

2.2. МЕТОД КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

Мы опишем соответствующий метод в **DERIVE**, который подобен другим аналогичным методам, реализованным, например, в **MATHCAD**'е, и которые могут применяться и в других областях.

Рисунок 5.

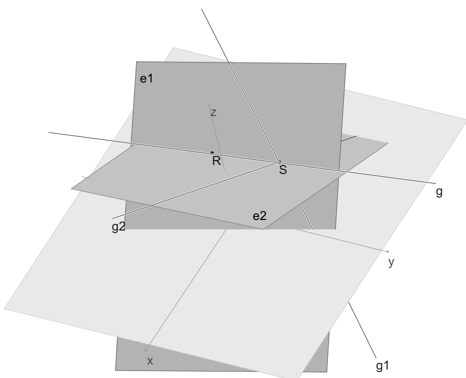


Рисунок 7.

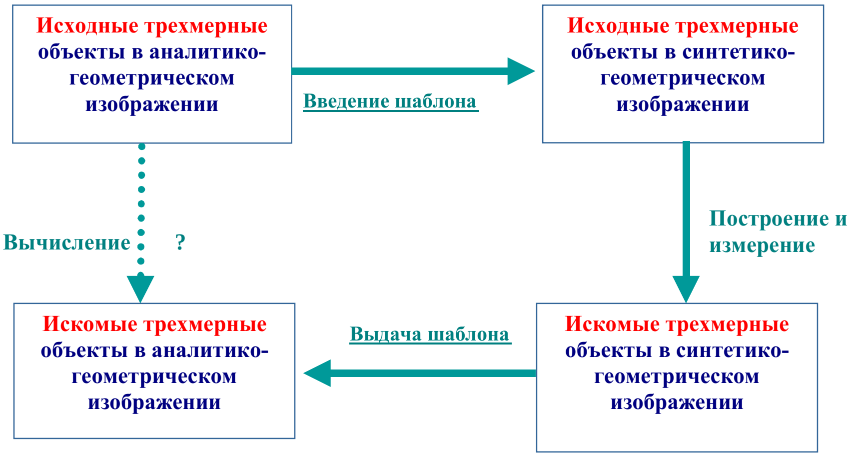


Диаграмма 1.

I. Решение общей задачи

II. Переход от общей задачи к специальной задаче с конкретными исходными данными

III. Обсуждение условий разрешимости.

Решение нашей задачи документировано в листингах 1.1/2, которые мы комментируем ниже. Строки 1–22 содержат общее решение (векторы, обозначенные строчными латинскими буквами, будут записываться как векторы-строки в угловых скобках; «CROSS» обозначает векторное произведение; скалярное произведение обозначается точкой «·».) Идея решения заключается в описании искомой прямой g с

Листинг 1.1

```
#1: "Найти прямую, проходящую через две прямые и точку"
#2: "Уравнение прямых g1; g2"
#3: x := p +λ·a
#4: y := q + μ·b
#5: [p := [p1, p2, p3], a := [a1, a2, a3]]
#6: [q := [q1, q2, q3], b := [b1, b2, b3]]
#7: "Точка R"
#8: r := [r1, r2, r3]
#9: "Плоскость e1 через точку R и q1, плоскость e2 через точку R и q2"
#10: (s - r)·u = 0
#11: (s - r)·v = 0
#12: "Веторы нормалей плоскостей e1 и e2 соответственно"
#13: u := CROSS(r - p, a)
#14: v := CROSS(r - q, b)
#15: "Пересечение e1 и e2: уравнение искомой прямой g"
#16: s = r + σ·CROSS(u, v)
#17: "Определение точек пересечения q с q1 и q с q2 соответственно"
#18: ((p +λ·a) - r)·u = 0
#19: ((q + μ·b) - r)·v = 0
#20: "Углы, образованные g с g1 и g с g2 соответственно
```

#21: $w1 = ACOS\left(\dfrac{CROSS(u,v)\cdot a}{|CROSS(u,v)|\cdot|a|}\right)$

#22: $w2 = ACOS\left(\dfrac{CROSS(u,v)\cdot b}{|CROSS(u,v)|\cdot|b|}\right)$

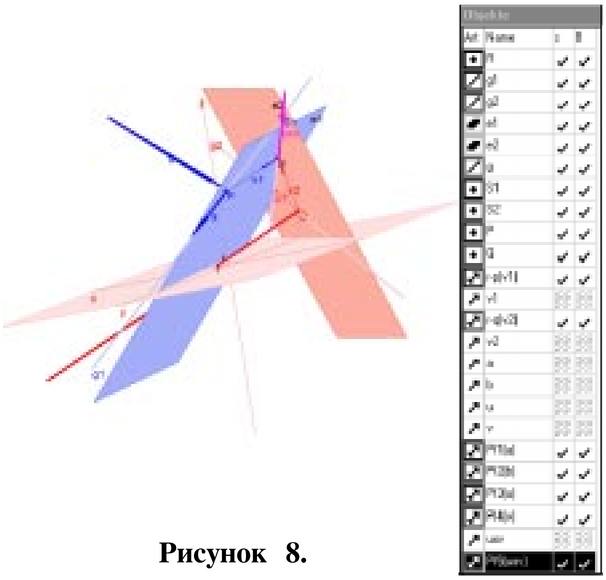


Рисунок 8.

помощью точки R и направляющего вектора, который получается как векторное произведение $\vec{u} \times \vec{v}$ нормалей $\vec{u}$, $\vec{v}$ плоскостей e_1, e_2 (см. строки 10–11 листинга 1.1).

Алгебраическое решение может быть реализовано в **DreiDGeo** путем применения вспомогательного построения (рисунок 4) к конкретной задаче (рисунок 8).

В строке 15 построено каноническое уравнение прямой(то есть получены точка и направляющий вектор). Решение уравнений в строках 18 и 19 относительно l и m с помощью встроенных инструментов дает точку пересечения искомой прямой с данной.

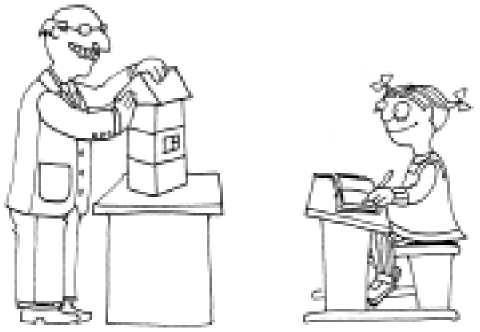
Введение общих координат и компонентов 5, 6 и 8 приводит посредством «упрощения» к громоздкому выражению для компонент вектора $\vec{s}$ и параметров l, m, (здесь ради экономии места приведено выражение только для l, см. листинг 1.2), и для углов w_1 и w_2. Конечно, с помощью определителей можно придать выражениям более обозримую форму. Угол между прямыми определяется, как обычно, через скалярное произведение и арккосинус (строки 21–22).

Строки 24–41 содержат решение специальной задачи, причем в строках 24–26 присваиваются значения переменным. Вектор $\vec{s}$ представлен в обычной форме: $\vec{s} = (-4, -5, 9) + 2\sigma(-514, 489, 41)$. Значения углов округлены; здесь выведены углы, смежные с теми, которые получаются из компьютерно-графического решения. Результаты обоих решений совпадают.

Для решения как общей, так и специальной задач, в системе DERIVE достаточно опций «Упрощения», «Подстановки», «Решения», «Аппроксимации».

Листинг 1.2

```
#23: "Данные и результаты для одной конкретной задачи"
#24: [p1:=-6, p2:=6, p3:=8, a1:=2, a2:=3, a3:=-3]
#25: [q1:=-3, q2:=-8, q3:=3, b1:=5, b2:=-2, b3:=3]
#26: [r1:=-4, r2:=-5, r3:=9]
#27: "Искомая прямая g:"
#28: s =[-1028·σ-4, 978·σ-5, 822·σ+9]
#29: "Точка пересечения g1 с g"
#30: [λ = -167/90]
#31: [λ = -1.855]
#32: [-437/45, 13/30, 407/30]
#33: [-9.711, 0.4333, 12.56]
#34: "Точка пересечения g2 с g"
#35: [μ = 81/109]
#36: [μ = 0.7431]
#37: [78/109, -1034/109, 570/109]
#38: [0.7155, -9.486, 5.229]
#39: "Углы, образованные g и g1, g и g2 соответственно"
#40: w1 = 101.9
#41: w2 = 117.2
```



...пока еще не всегда есть возможность использовать в преподавании компьютеры и соответствующее программное обеспечение.

Исследование разрешимости: если, g не пересекается с g_1 или g_2, то есть уравнения в строках 18–19, преобразованные к виду $(\vec{p}-\vec{r})\cdot\vec{v}+\lambda\vec{a}\vec{v}=0$ и $(\vec{q}-\vec{r})\cdot\vec{u}+\mu\vec{b}\vec{u}=0$, не имеют решения, то и задача не имеет решения. В этом случае $\vec{a}\vec{v}=0$ или $\vec{b}\vec{u}=0$, то есть направляющие векторы прямых g_1 или g_2 параллельны соответственно e_2 или e_1.

2.3. СОЕДИНЕНИЕ С ТРАДИЦИОННЫМ ПОДХОДОМ

Наряду с традиционным подходом к решению задач аналитической геометрии «вручную» теперь появляется новый подход, продемонстрированный выше на примере одной задачи. Возникает вопрос о соотношении этих подходов с учетом того, что пока еще не всегда есть возможность использовать в преподавании компьютеры и соответствующее программное обеспечение.

Используя компьютер, учитель дает ученикам наглядное представление о задаче, после чего ученики решают ее вручную. После того, как задача решена, учитель демонстрирует ее компьютерно-графическое решение. Если позволяет время и компьютерные ресурсы, ученики могут еще попарно поработать в **DreiDGeo**. В продвинутых курсах, вероятно, имеются более благоприятные возможности для использования компьютеров. Однако какая польза от применения компьютерных методов, если на обычных экзаменах при решении задач ученики не могут использовать приобретенные в этой области знания и навыки?

...мы не можем ни создавать основные объекты ни манипулировать ими.

3. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

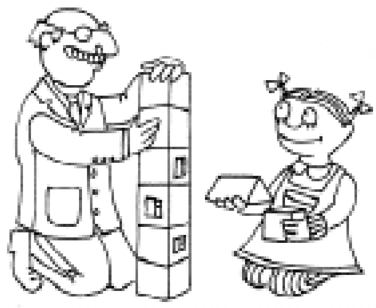
Замечание 1: **DreiDGeo** не является динамической системой, мы не можем ни создавать основные объекты ни манипулировать ими (за исключением вращения). Такая система пока создана лишь на платформе Macintosh (*3D-Geometer*, Klemenz 1994/99), причем пространственные объекты выглядят в ней недостаточно объемными. Созданный на основе **DreiDGeo** независимый от платформы продукт **MiniGeometer** (http://geosoft.ch) – Java-Applet для интерактивного конструирования в пространстве, обладает тем же недостатком; другой перспективный проект, ***Cabri-Geometre-3D***, еще не завершен.

Замечание 2: Компьтерные инструменты, управляемые посредством меню, такие, как **DreiDGeo** и **DERIVE**, предпочтительней по сравнению с управляемыми командной строкой, так как овладение большим количеством команд и их синтаксисом является для временного пользователя немалой проблемой. Поэтому использование таких инструментов является скорее препятствием для внедрения компьютерных методов в преподавание.

Замечание 3: Если ученики при теперешнем состоянии дел не имеют возможности свободно использовать компьтерные инструменты в повседневной практике, то по крайней мере учителя могли бы их использовать для генерирования задач.

Замечание 4: Чтобы все многообразие компьютерных методов стало доступным, необходимо достаточное владение соответствующими инструментами. Существующие школьные программы не могут этого обеспечить. Кроме того, нельзя ожидать от ученика, чтобы он овладел сразу несколькими такими инструментами. Так, например, в **DERIVE** невозможна визуализация пространственных задач, поэтому нельзя обойтись и без такого инструмента как **DreiDGeo**. Для внедрения компьютерных методов в преподавание математики требуется разработка специального многофункционального, адаптивного инструмента, который можно было бы использовать на всех уровнях в течение всего срока обучения.

Замечание 5: Если мы убеждены в том, что основная идея аналитической геометрии – алгебраическое описание геометрических объектов и решение геометрических задач алгебраическими методами – имеет общеобразовательную ценность, то мы должны позаботиться о том, чтобы эта идея был одинаково интересна и для учеников и для учителей, а решение соответствующих задач – доступно. Нужно надеяться, в будущем использование компьютерных методов поможет улучшить преподавание и изучение стереометрии.



...мы должны позаботиться о том, чтобы эта идея был одинакова интересна и для учеников и для учителей.

Литература.

1. *Grotemeyer K.P.* Analytische Geometrie. 3. Aufl. Berlin: De Gruyter, 1964. (Аналитическая геометрия).

2. *Klemenz H.* 3D-Geometer (Software mit Manual für Macintosh). Kantonsschule Wetzikon. 1994–1999. (Трехмерная геометрия (программное обеспечение для Macintosh).

3. *Kutzler B.* Einführung in DERIVE für Windows. Hagenberg: bk teachware, 1997. (Введение в DERIVE для Windows).

4. *Quasem S., Laborde J.-M.* La représentation dans un micromonde de la géométrie dans l’espace: Le cas de Cabri-3D (Arbeitspapier des Laboratoire Leibniz, Université Joseph Fourier) Grenoble, 1996. (Представление пространственной геометрии в микромире: случай Cabri-3D (статьи лаборатории Лейбница, Университет Джозефа Фурье).

5. *Rechenberger K. et al.* 3DGeo – ein multifunktionales Windows-Programm zur 3D-Darstellung von Objekten der analytischen Geometrie. Augsburg: Zentralstelle für Computer im Unterricht, 2000. (DreiDGeo – многофункциональная программное окно для трехмерного представления объектов аналитической геометрии).

6. *Schumann H.* Raumgeometrie – Unterricht mit Computerwerkzeugen. Berlin: Cornelsen, 2001. (Пространственная геометрия – обучение с помощью компьютерных инструментов).

7. Download der Software «3DGeo»: www.math-schumann.de Geometrie-Seite.

Heinz Schumann,
Prof. Dr. habil, Fakultat III,
Mathematik/Informatik,
Institur fur Bildungsinformatik
University of Education (PH),
Weingarten, Germany.

Перевод М.И. Юдовина.