*Дубровский Владимир Натанович*

# СТЕРЕОМЕТРИЯ С КОМПЬЮТЕРОМ

Вопрос, который автору приходилось слышать чаще всего на встречах с учителями, посвященных электронным обучающим изданиям, – какие у вас есть материалы по стереометрии? Это неудивительно: с одной стороны, стереометрия – область школьной математики, вызывающая у учеников наибольшие проблемы, а с другой, – благодаря возможностям трехмерной графики, именно эта область представляется одним из самых очевидных направлений приложения компьютерных обучающих средств.

## МОДЕЛИ В ПРЕПОДАВАНИИ СТЕРЕОМЕТРИИ

Приступая в 10 классе к изучению нового раздела геометрии – стереометрии, учащиеся, имевшие дело в 7–9 классах с геометрией на плоскости, испытывают серьезные затруднения при переходе из плоскости в пространство, хотя, казалось бы, новый предмет можно начать «с чистого листа». «Лишнее» измерение создает особенные сложности в начале изучения стереометрии, когда учащиеся сталкиваются с необходимостью представить себе столь абстрактные понятия, как бесконечно протяженные прямая и плоскость в пространстве, которым посвящено большинство теорем и задач курса 10 класса.

Второе затрудняющее школьников обстоятельство – как подойти к доказательству теоремы или решению зачастую весьма абстрактной задачи. А проблема учителей – как научить школьников находить нужный подход. Дело в том, что хотя геометрическое, пространственное воображение присуще некоторым школьникам, но таких не так уж много. Большинству школьников требуется помощь в развитии умения представлять и изображать стандартные стереометрические конфигурации; их приходится как-то обучать геометрическому видению – пониманию теорем и условий задач, сформулированных словесно.

Именно поэтому учителя охотно используют наглядные пособия на уроках стереометрии. Модели параллелепипеда, пирамиды, правильных многогранников можно найти в большинстве кабинетов математики. При этом чаще всего такие «реальные» модели используются с чисто иллюстративной целью: все, что с ними можно делать – это разглядывать с разных сторон. Но возможно ли запастись моделями для всего разнообразия решаемых на уроках задач? Вопрос риторический.

Отсюда повышенный интерес к виртуальному трехмерному моделированию и его применениям в школе.

## МОДЕЛИ-ИЛЛЮСТРАЦИИ И МОДЕЛИ-ИНСТРУМЕНТЫ

Имеется много хорошо себя зарекомендовавших программ трехмерной графики, таких как 3D Max и др., в которых можно создавать красивые и выразительные модели пространственных конструкций. Существует и несколько электронных курсов стереометрии, использующих модели такого сорта. С дидактической точки зрения эти виртуальные модели вполне аналогичны реальным – из пластика или металла: основная их функция – в *демонстрации* тех или иных пространственных фигур и их комбинаций. И с этой функцией они справляются вполне успешно, достигая высокого трехмерного эффекта. При этом виртуальные объекты гораздо более гибки и разнообразны, а некоторые «стереометрические конструкторы» позволяют и строить их самостоятельно, что весьма полезно (правда, интерфейс таких конструкторов весьма громоздкий).

В то же время, область применения иллюстративных, демонстрационных моделей ограничена. Они помогают лучше понять определения, формулировки теорем и задач. Но развитию пространственного воображения они способствуют лишь на первом этапе. Более того, постоянно снабжая ученика готовыми, пусть очень красивыми и правильными рисунками, тем более 3D моделями, мы в конце концов начинаем тормозить дальнейшее совершенствование этого навыка, а некоторые задачи вообще почти теряют смысл, если дать к ним готовый рисунок. Вот пример такой задачи:

*Найдите объём пересечения двух правильных тетраэдров объема* 1, *каждый из которых симметричен другому относительно середины* (*их общей*) *высоты.*

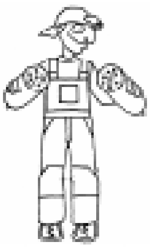
Самый главный и трудный момент решения – понять, что представляет собой рассматриваемое пересечение (подсказка: параллелепипед). После того как вид пересечения установлен, вычисления уже не вызывают серьезных трудностей. Поэтому показать правильный чертеж к этой задаче – почти все равно, что сразу объяснить ее решение.

Когда, как и в каком объеме нужно использовать хорошо выполненные готовые иллюстрации (рисунки, реальные или виртуальные модели) в преподавании стереометрии – это отдельный методический вопрос, которого мы подробно касаться не будем. Наша основная цель – рассказать о виртуальных моделях стереометрических конструкций другого, инструментального типа, которые открывают перед учителем и учеником новые возможности, базирующиеся прежде всего на высокой интерактивности. Учащиеся получают двумерное изображение пространственной фигуры (каковым и является виртуальная модель), являющееся и объектом, и инструментом, и средой конструирования и исследования. Важнейшей отличительной чертой этих моделей является то, что при работе с ними можно в любой момент произвольно изменить ракурс изображения. Тем самым в одном изображении сочетаются двумерное и трехмерное представления фигуры. Фактически учащийся имеет дело с обычным двумерным представлением фигуры и при этом может выполнять на этом изображении те же операции, что и в своей тетрадке на уроке (дополнительные построения и др.). Но в любой момент построения можно как бы «перейти в 3D режим», то есть попросту включить виртуальное вращение конструкции вокруг одной или нескольких осей, а также некоторые другие эффекты, создающие ощущение трехмерности. Выбрав новый ракурс изображения по ходу вращения, можно продолжить построения и другую работу с моделью.

Очевидно, что работа в такой «квазитрехмерной среде» отлично развивает пространственное воображение. Появляется возможность по-новому ставить и решать задачи на построение в пространстве, причем проверка правильности решения обеспечивается самой возможностью взглянуть на конструкцию с разных сторон. Да и другие виды задач и методы их решения при переносе на интерактивные модели получают новое качество; в первую очередь здесь следует отметить задачи на метод проекций. Конкретные примеры приведены ниже. В основном они взяты из нового образовательного комплекса «Математика, 5–11 кл.» [1], а также из разрабатываемого в настоящее время набора «стереочертежей» к учебнику геометрии 10–11 кл. Эти модели построены в среде The Geometer's Sketchpad (GSP)[1], в основном, 4-й версии. Третья версия этой программы, как и аналогичная программа Cabri, тоже обладают достаточно большими «трехмерными возможностями».

## ПРИМЕРЫ ЗАДАНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТРЕХМЕРНЫХ ЭФФЕКТОВ

### Задачи на построение сечений.



Этот вид заданий наиболее востребован, потому что построение сечений входит в стандартную школьную программу, но обычно вызывает у школьников немалые затруднения. Открыв задание, школьник видит привычный чертеж – точно такой же, какие он видит в учебнике и рисует в своей тетради; например, призму и три точки на ее поверхности, через которые нужно провести секущую плоскость. Построение тоже производится как обычно – проводятся прямые, находятся точки их пересечения и т. д. (на рисунке 1 показано уже завершенное построение сечения методом следов; «главный» след показан жирной линией).

Отличие состоит в том, что упомянутый выше встроенный в скетч[2] «механизм» позволяет в любой момент построения повернуть всю конфигурацию вокруг одной из двух осей и продолжить построение, глядя на нее с другой стороны. Благодаря этому, можно непосредственно увидеть, пересекаются ли две прямые в пространстве или скрещиваются, и избежать наиболее распространенной ошибки – построения точки пересечения скрещивающихся прямых. Кроме того, включив вращение конструкции после того, как сечение построено, можно проверить правильность построения: верно построенное сечение в некотором положении превращается в отрезок. При этом происходит (имитируется) постоянный переход от пространственной фигуры к ее изображению на плоскости. В какой-то степени можно сказать, что построение производится непосредственно в пространстве, что как раз и служит главным фактором развития пространственного воображения.

Первый опыт работы с этими заданиями показал, что ими охотно пользуются и учителя, и ученики. По словам последних, решать задачи на сечения в компьютерной форме заметно проще. Значит, свою роль – облегчить изучение методов построения сечений – эти задания выполняют.

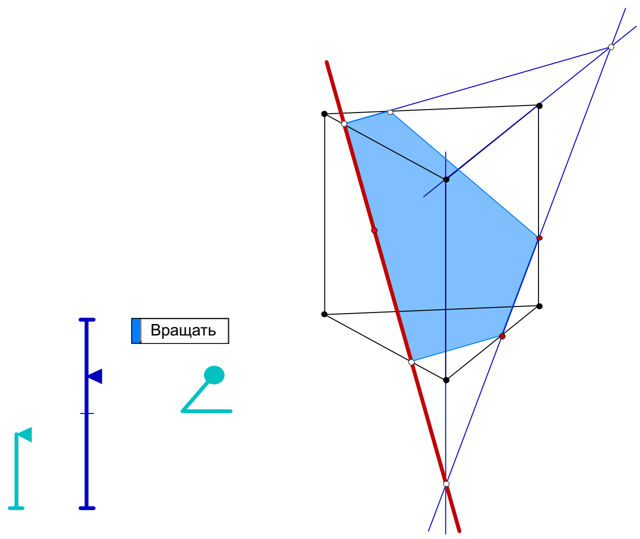



**Рисунок 1.**

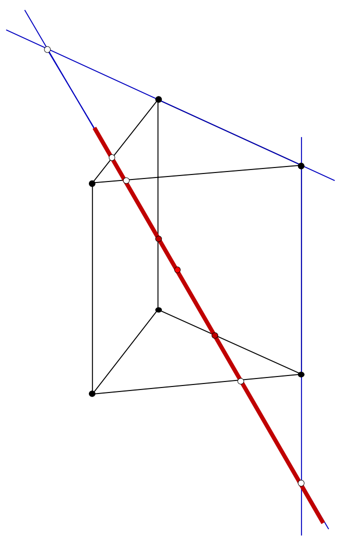
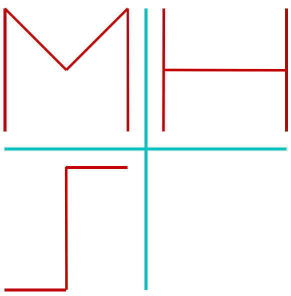
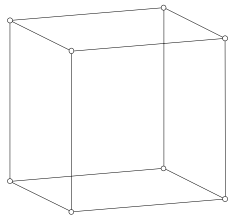


**Рисунок 2.**

[1] В России программа русифицирована Институтом новых технологий (Москва) и распространяется под названием «Живая геометрия». *Прим. ред.*

[2] Термин из GSP, который можно интерпретировать как динамическую электронную страничку. *Прим. ред.*





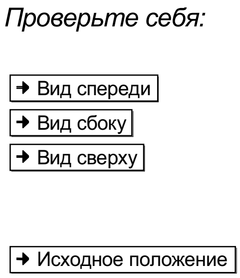
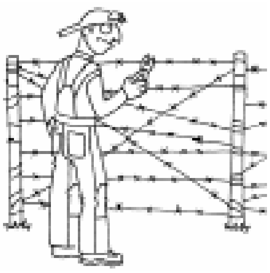



**Рисунок 3.**

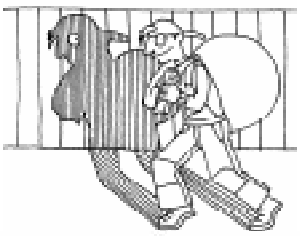
**«Проволочные головоломки»** (рисунок 3).



Так мы называем серию заданий, относящихся скорее к области занимательной математики. Ее прообразом стали задания, опубликованные много лет назад на 4-й странице обложки журнала «Квант». Требуется восстановить фигурку (пространственную ломаную, вписанную в куб) по ее трем проекциям на координатные плоскости. Особенностью компьютерной версии является то, что программа предоставляет возможность непосредственно строить искомую фигуру в кубе, а затем, пользуясь «механизмом поворотов», посмотреть на три ее проекции.

**Задачи на метод проекции.** Основной способ решения стереометрических задач – сведение их к планиметрическим. Для этого есть два пути. Первый – пересечь данную пространственную фигуру подходящей плоскостью и рассмотреть возникающее пересечение. Это метод сечений. Второй – метод проекции – состоит в проектировании фигуры на подходящую плоскость (см. [2]). При этом, в зависимости от задачи, может применяться как ортогональная, так и более общая параллельная проекция. Разумеется, в конкретных ситуациях любой из двух методов может оказаться более эффективным. Отметим, однако, что метод проекций имеет то преимущество, что он позволяет отобразить на одном чертеже и увязать друг с другом элементы фигуры, не лежащие в одной плоскости. При этом метод проекций идеально реализуется с помощью моделей, о которых мы здесь говорим – ведь изображение фигуры на экране и есть ее проекция, а нужный ракурс выбирается соответствующими поворотами. Рассмотрим примеры.

*Пример 1* (рисунок 4). Плоскость, проходящая через середины $M$ и $N$ ребер $AB$ и $CD$ тетраэдра $ABCD$, пересекает ребра $AC$ и $BD$ в точках $K$ и $L$. Доказать, что $AK : KC = BL : LD$.



Для доказательства достаточно «посмотреть на пирамиду вдоль прямой $MN$», то есть построить проекцию пирамиды вдоль этой прямой или, на модели, повернуть пирамиду так чтобы изображения точек $M$ и $N$ совпали (рисунок 5). Ясно, что в этой проекции тетраэдр изображается параллелограммом, а сечение – отрезком, проходящим через его центр. Теперь утверждение стало очевидным.

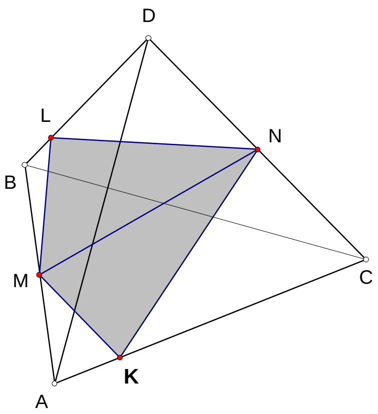



**Рисунок 4.**

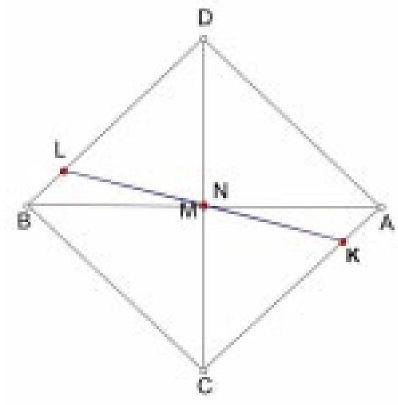



**Рисунок 5.**

Заметим, что в модели используется ортогональная проекция, но в этой задаче можно обойтись параллельной проекцией: построить изображение, аналогичное показанному на рисунке 4, и непосредственно перетащить точку $M$ в точку $N$. Важно, что при параллельной проекции прямые остаются прямыми, а отношения, в которых делятся отрезки, сохраняются.

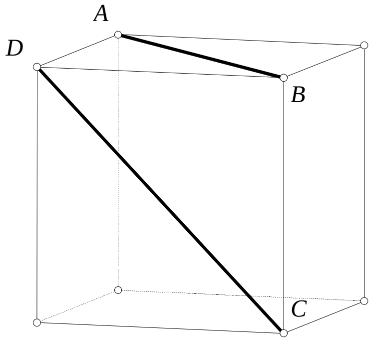



**Рисунок 6.**

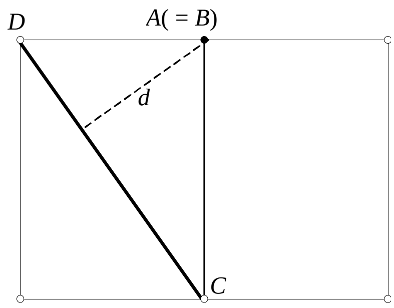


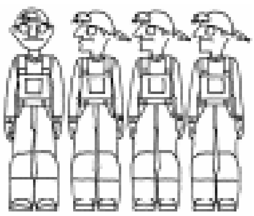

**Рисунок 7.**

*Пример 2* (рисунок 6). Найти расстояние между скрещивающимися диагоналями двух смежных граней куба с ребром 1.

Эта задача метрическая и здесь нужна ортогональная проекция. Возьмем плоскость, перпендикулярную одной из диагоналей, например, $AB$. Она параллельна общему перпендикуляру $d$ к диагоналям, поэтому его длина сохраняется при проекции на эту плоскость. С другой стороны, при этой проекции сохранится и перпендикулярность $d$ ко второй диагонали $CD$. Поэтому мы поворачиваем куб так, чтобы точки $A$ и $B$ совпали (рисунок 7); он изобразится прямоугольником высоты 1 и ширины $\sqrt{2}$. Искомая величина равна высоте треугольника $ACD$ на этом рисунке.

Подчеркнем, что в приведенных задачах самих по себе нет никакой особой компьютерной специфики. Виртуальная модель призвана сыграть здесь роль ступеньки, взобравшись на которую, ученику будет гораздо проще шагнуть еще выше и научиться решать аналогичные и гораздо более сложные задачи с карандашом и бумагой. Модели могут и должны помочь в поиске нужного ракурса, они позволяют и непосредственно измерить приближенные значения искомых величин, но окончательной стадией работы должно быть «обычное» решение с полным обоснованием и расчетами.

Еще один обширный класс заданий, продолжающих линию задач на сечения –



это разнообразные **задачи на построение**. Учащимся предоставляется «шаблон» – вращающееся изображение какой-либо пространственной фигуры. Требуется достроить его до какой-то заданной фигуры или комбинации тел, либо модифицировать его так, чтобы получить изображение фигуры с точно заданными свойствами. Вот примеры таких заданий: построить пересечение двух тетраэдров из задачи, приведенной в начале статьи; правильную треугольную пирамиду по углу между боковыми гранями (в шаблоне разрешается изменять только высоту пирамиды); додекаэдр на основе куба (и вообще, Платоновы и архимедовы тела) и др.

Почти любую задачу по стереометрии можно оформить как задачу на построение, попросив начертить фигуру, о которой в ней говорится. А особенно интересно школьникам самостоятельно построить «трехмерные» модели. Ниже мы объясняем, как это делается.

## ТЕХНОЛОГИЯ 3D ЭФФЕКТОВ

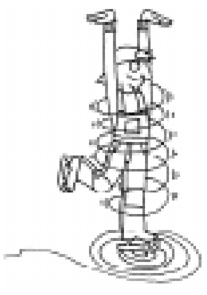
Коротко остановимся на технологии создания 3D графики в GSP. «Трехмерность» модели обеспечивается такими средствами:

– возможностью динамического изменения ракурса изображения (эффект вращения);

– правильным изображением видимых и невидимых элементов (вершин, ребер, граней), например, невидимые ребра можно показывать пунктиром или вообще не показывать;

– перспективой (центральной проекцией; для большего эффекта центр проекции также можно сделать управляемым);

– имитацией освещенности.



**Эффект вращения.**

Достаточно построить изображение вращающегося базиса (тройки ортогональных единичных векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$). Тогда для построения изображения любой фигуры достаточно научиться «привязывать» ее точки к базису – они будут повторять все его эволюции. Например, чтобы построить треугольную призму с основанием $OAB$ и боковым ребром $OC$, достаточно достроить треугольники $OAC$ и $OBC$ до параллелограммов (см. рисунок 8). Следует учитывать, что построение должно сохраняться при всех положениях базиса. Но если для построения точки $A'$ использовалась прямая, параллельная $OC$, то эта точка вместе со всеми ее возможными «потомками» исчезнет в положении, когда точки $O$ и $C$ совпадают (вид призмы сверху). Поэтому предпочтительнее аналитический подход: зная координаты точки $A'$ в нашем базисе (они равны (1; 0; 1)) и координаты концов базисных векторов на плоскости проекции (то есть на экране), можно вычислить координаты изображения точки $A'$ на экране и построить его по координатам.

Как же заставить вращаться базис? Опишем простейший способ.

Допустим, что первоначально точка $O$ лежит в плоскости проекции, векторы $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ лежат в плоскости проекции и направлены вправо и вверх (можно считать, что этот базис совпадает с базисом стандартной системы координат среды GSP), а вектор $\overrightarrow{OA}$ перпендикулярен плоскости проекции; такой базис будем называть начальным. Повернем базис вокруг горизонтальной прямой $PQ$ (см. рисунок 9) на угол $\alpha$, а затем вокруг оси $OC$. Как ясно из рисунка, вектор $\overrightarrow{OC}$ образует угол $\alpha$ с плоскостью проекции, поэтому проекция $C'$ точки $C$ лежит на вертикальной прямой, проходящей через $O$, и $OC' = \cos\alpha$. (Если угол $\alpha$ тупой, то вектор $\overrightarrow{OC'}$ будет направлен вниз.) Построение проекции $B'$ точки $B$ иллюстрируется рисунком 10 (проекция точки $A$ строится аналогично). Пусть $B_0$ – точка, в которую попадет $B$, если повернуть плоскость $OAB = PQB$ до совмещения с плоскостью проекции. Приблизим точку $B_0$ к прямой $PQ$ с коэффициентом $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$ – это и будет точка $B'$ (то есть на рисунке $KB' : KB_0 = KB' : KB = \sin\alpha$). Само построение выглядит примерно так, как на рисунке 11: в единичной окружности с центром $O$ проводятся перпендикулярные радиусы $OA_0$ и $OB_0$, к ним применяется сжатие к диаметру $PQ$ с коэффициентом $\sin\alpha$. Чтобы изменять положение базиса «на лету», строятся два «круговых бегунка». В качестве такого бегунка можно взять пару точек на фиксированной окружности, одна из

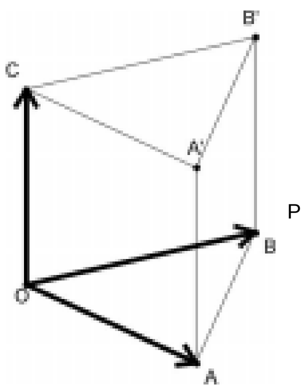



**Рисунок 8.**

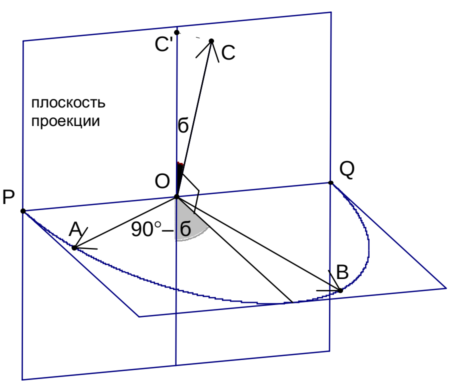



**Рисунок 9.**

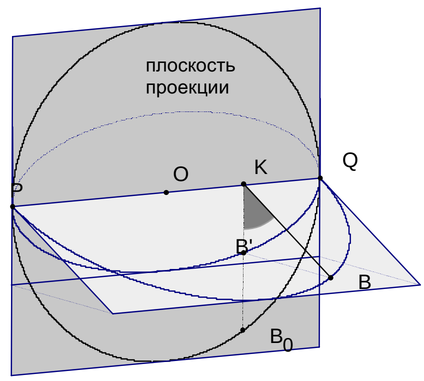



**Рисунок 10.**

которых закреплена, а другую можно перемещать по окружности мышью. Угловая величина дуги между этими точками на одном из бегунков берется в качестве α; при ее изменении базис вращается вокруг оси *PQ*. Второй бегунок контролирует движение точек $A_0$ и $B_0$ по окружности, то есть вращение базиса вокруг оси *OC*.

Совсем легко добавить третью ось вращения, перпендикулярную плоскости проекции; однако смысла в ней немного – эффект от нее такой же, как от поворачивания листа бумаги с чертежом на столе.

Имеется и другой способ построения вращающегося базиса – координатный: мы вычисляем пространственные координаты векторов базиса, полученного из начального после нескольких поворотов, углы которых определяются бегунками, а оси задаются заранее, и строим проекции векторов по этим координатам (координаты проекции вектора просто совпадают с двумя последними его собственными координатами). Этот способ открывает гораздо большие возможности. В частности, удается построить модели, в которых можно повернуть фигуру, затем выбрать новую ось и повернуть фигуру вокруг этой оси и т. д., причем каждый раз новую ось можно выбирать произвольно. (Для этого применяется специальный трюк.) Отметим, что обычно вращающиеся трехмерные модели управляются непосредственно: курсор помещается в любое место фигуры и она поворачивается вслед за перемещением курсора. Такой способ управления более пригоден для иллюстративных моделей, но бегунки позволяют более точно задавать ее положение, а значения углов поворота можно использовать в вычислениях, так что эти модели лучше приспособлены к использованию в задачах.

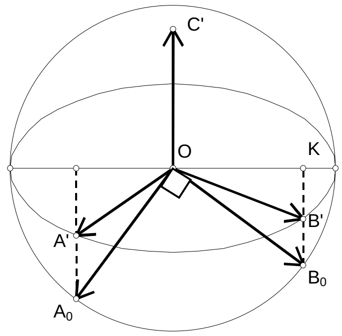
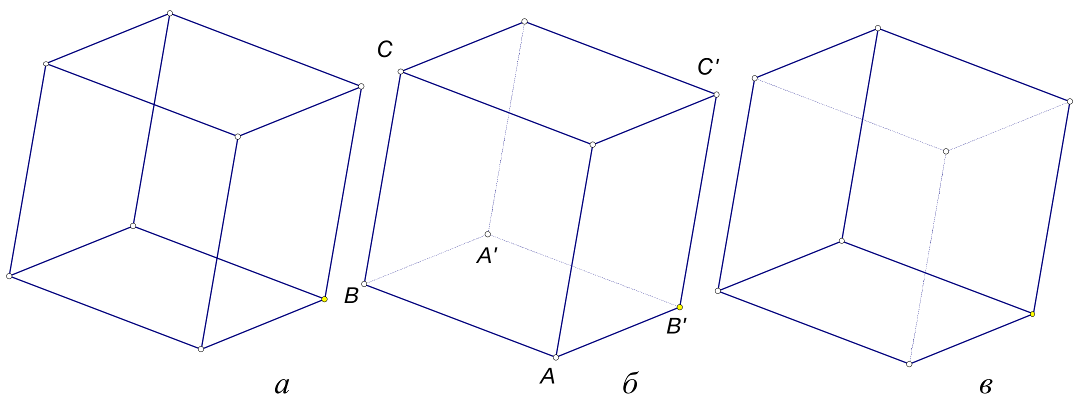



**Рисунок 11.**

### Эффект невидимости.

На рисунке 12 показаны три изображения куба в одном ракурсе. Глядя на рисунок 12 *а*, невозможно определить, смотрим ли мы на куб сверху или снизу; а при вращении изображения вокруг вертикальной оси, нам будет казаться, что оно происходит, соответственно, то по, то против часовой стрелки. Причем «переключение» точки зрения контролировать очень сложно. (Кстати, в книгах по занимательной математике и физике можно найти много рисунков, использующих эту двойственность.)




*а* *б* *в*

**Рисунок 12.**

Поэтому правильному восприятию «стереочертежей» очень способствует изображение невидимых линий пунктиром (или их отсутствие), как на рисунке 12 *б*, *в*. А поскольку наши модели вращающиеся, желательно обеспечить правильное чередование сплошного и пунктирного изображения каждой линии, «исчезновение» вершин и граней, попадающих на тыльную сторону фигуры. Поясним, как это делается для точек.

Пусть $(a;\ b)$ – координаты «мигающей» точки $P$ в экранной системе координат. Допустим, что мы сумели создать параметр $v$, который равен 1 или –1 в зависимости от того, должна ли быть видна эта точка или нет. Тогда точка $P_в(a\sqrt{v};\ b)$ будет появляться на месте точки $P$ тогда и только тогда, когда точка $P$ видима; саму точу $P$ следует спрятать. Другой путь – построить $P_в$ как образ $P$ при гомотетии с коэффициентом $\sqrt{v}$. Чтобы построить «мигающее ребро» $PQ$, параметр $v$ определяют так, чтобы его знак зависел от видимости или невидимости ребра, строят точку $P_в$ как выше, и точку $P_н(a\sqrt{-v};\ b)$. Затем строится сплошной отрезок $P_вQ$ и пунктирный $P_нQ$; они будут вести себя «правильно». Аналогично можно построить и «мигающую грань», взяв в качестве одной из ее вершин точку, существование которой определяется «видимостью» грани.

Параметры видимости $v$ лучше сначала вычислить для граней. Для этого воспользуемся возможностью измерения ориентированных углов в GSP.

На рисунке 12 *б* угол $ABC$ ориентирован положительно – вращение от $BA$ к $BC$ производится *против* часовой стрелки, а угол $A'B'C'$, в который переходит угол $ABC$ при повороте на 180°, как и угол $CBA$, ориентированы отрицательно. Таким образом, ориентация угла с заданным порядком вершин зависит от того, на какой стороне тела – видимой или тыльной – находится при данном положении тела этот угол. То есть в качестве параметра видимости грани можно взять знак величины выбранного в этой грани ориентированного угла. В «координатной» версии моделей ориентированный угол можно заменить определителем, составленным из координат векторов $BA$ и $BC$.

Ребро или вершина многогранника видимы на изображении тогда и только тогда, когда видима хотя бы одна примыкающая к ним грань. Это замечание позволяет определить параметры видимости вершин и ребер.

Отметим, что это описание рассчитано на случай, когда каждое ребро или грань видимы или невидимы только целиком, как, например, в случае выпуклых многогранников. В случае невыпуклых тел приходится предусматривать возможные взаимоперекрытия частей непосредственно.

**Перспектива.**

Человеческий глаз видит окружающий мир не в параллельной, а в центральной проекции (по крайней мере, в первом приближении). Поэтому чертежи, построенные в параллельной проекции, иногда производят неловкое впечатление обратной перспективы, когда более далекий из двух равных отрезков кажется длиннее, а не наоборот. Правильное перспективное изображение куба (центральная проекция) приведено на рисунке 13. Центральную проекцию тоже можно строить геометрически или используя координаты. Пусть даны ортогональные проекции $Q'$ и $M'(y;\ z)$ центра $Q$ и точки $M$ с координатами $(x;\ y;\ z)$ в начальной системе координат (где ось $x$ перпендикулярна экрану) на плоскость экрана и расстояние от $Q$ до этой плоскости равно $a$. Тогда проекцию точки $M$ из центра $Q$ на плоскость экрана можно получить гомотетией точки $M'$ с центром $Q'$ и коэффициентом $\dfrac{a}{a-x}$.

**Эффект освещения.**

Этот эффект, в отличие от предыдущих, можно воспроизвести только в 4-й версии «The Geometer's Sketchpad», в которой имеется возможность раскраски фигур в зависимости от числового параметра. Как известно, яркость освещения плоской фигуры пропорциональна косинусу угла между направлением света и нормалью к плоскости фигуры. Этот косинус и следует выбрать в качестве параметра. На рисунке 14 показана модель икосаэдра в перспективе и с освещением: предполагается, что свет падает сверху и равномерно со всех сторон.

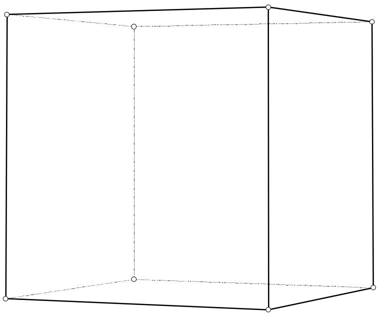


**Рисунок 13.**

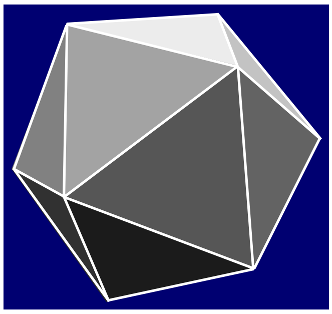


**Рисунок 14.**

**Литература.**

1. Образовательный комплекс «Математика, 5–11 классы. Практикум», ЗАО «1С», 2003.

2. *Дубровский В.Н.* «Неожиданный ракурс», «Квант» № 2, 1980.

***Дубровский Владимир Натанович,***
***кандидат физико-математических наук, доцент СУНЦ МГУ,***
***член редколлегии журнала «Квант»,***
***научно-методический руководитель и главный редактор математических образовательных проектов фирмы 1С.***