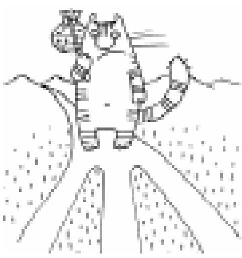
Макарова Наталья Владимировна,
Сениченков Юрий Борисович,
Титова Юлияна Францевна

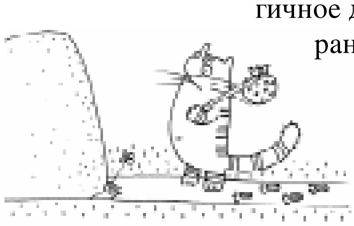
ШКОЛА МОДЕЛИРОВАНИЯ-2003. ЗАНЯТИЕ 3. ВОЗМОЖНОСТИ КОМПЬЮТЕРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА В СРЕДЕ MVS

Компьютерное моделирование, как и любой творческий процесс, предполагает долгую и кропотливую работу, начинающуюся обычно с догадки. За догадкой следуют первые эксперименты, часто приводящие к ошибочным выводам, и только затем, возможно (если не будет открыт очередной велосипед), появятся действительно интересные результаты.

Создавая компьютерные инструменты для моделирования, необходимо позаботиться, чтобы разработчик моделей получил удобный и надежный набор инструментов, помогающий ему справиться с различными проблемами, возникающими при моделировании.



Первая и самая важная проблема – это, конечно же, проблема правильной постановки исходной задачи. К сожалению, мы очень редко на начальном этапе четко представляем, чего мы хотим, а уже тем более, как этого достичь. Коварное задание Иванам-Царевичам «Пойди туда, не знаю куда, и принеси то, не знаю что» может в иных случаях показаться чуть ли ни строгим алгоритмом, по сравнению с тем, как рождается постановка новой задачи. Отсюда вывод – пакет моделирования должен позволять легко менять постановку задачи, вносить изменения, возвращаться к старым вариантам.



Вторая, не менее важная проблема, – это то, что даже профессионалы могут ошибаться. И их профессиональные ошибки не так легко найти. Следовательно, пакет должен обладать средствами отладки.

И, наконец, моделирование редко сводится к построению одной единственной модели – обычно это наборы моделей, каждая из которых либо уточняет что-то, либо содержит альтернативные варианты, либо расширяет постановку задачи.

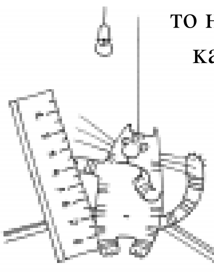
В предыдущей статье мы рассмотрели задачу о построении траектории ступеньки падающей лестницы. Лестница, стоящая вертикально у стены, начинает падать, при этом ее верхний конец не отрывается от стены, а нижний – скользит по полу. Если считать, что стена – это ось y, а пол – ось x, то можно сказать, что мы наблюдали движение лестницы в первом квадранте системы координат. В этой статье мы рассмотрим, как компьютерный эксперимент с одной моделью может привести к уточнению постановки задачи и построению новой модели.

1 ЭТАП. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

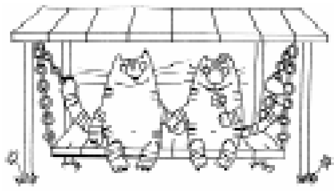
ОПИСАНИЕ ЗАДАЧИ

Глядя на полученную траекторию движения некоторой ступеньки в проекте «Лестница_79», у любопытного исследователя невольно возникают вопросы. Не является ли она кусочком (отрезком) какой-то другой кривой и не знакома ли нам эта «другая» кривая? А что если проследить аналогичное движение лестницы в других квадрантах? А можно исследовать траектории движения не только ступенек, а и других точек лестницы?

Если рассматривать движение объекта в других квадрантах,



то называть его лестницей уже как-то непривычно. Поэтому будем называть его более абстрактно «линейка». Линейка может иметь шкалу, отмечающую одинаковые промежутки (это ступеньки, не так ли?). Так рождается уточненная постановка задачи. А чтобы лучше можно было представить движение этой линейки, положим оси координат на горизонтальный стол и прикрепим концы линейки колечками к осям. Так мы создадим возможность двигаться концам линейки вдоль осей, как в положительном, так и в отрицательном направлении.



Опишем, возможное движение линейки (рисунок 1).

В начальный момент линейка расположена вдоль оси y, конец B – в начале координат. Далее, конец A начинает скользить вниз, а конец B – в положительном направлении оси x (рисунок 1 *а*). Через некоторое время конец A окажется в начале координат, а вся линейка займет положение вдоль оси x. Угол φ меняется на этом участке от 0° до 90°.

Далее конец A продолжит движение по отрицательному участку оси y, а конец B при этом будет двигаться к началу координат (рисунок1 *б*). Угол φ меняется на этом участке от 90° до 180°. Через некоторое время конец B окажется в начале координат и продолжит далее свое движение по отрицательному участку оси x. В третьем квадранте угол φ меняется от 180° до 270°, а в четвертом – от 270° до 360° (рисунок 1 *в*, *г*). Проанализировав движение в четырех квадрантах, нетрудно заметить, что через некоторое время линейка совершит полный оборот и вернется в исходное положение.

По какой траектории движется внутренняя точка линейки?

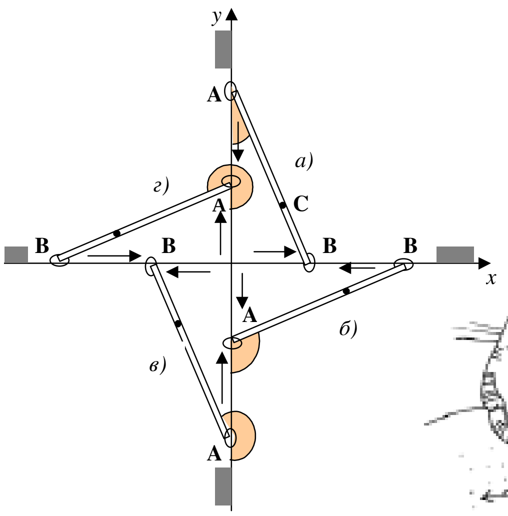
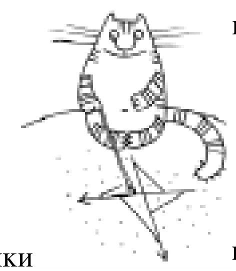


Рисунок 1. Движение линейки по направляющим.



ЦЕЛЬ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Исследовать движение точек линейки.

ФОРМАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ

Основными отличительными моментами постановки данной задачи от предыдущей являются следующие:

• Исходные данные – длина линейки – L и расстояние от точки до нижнего конца – BC.

• Конец A скользит по направляющей y, конец B по направляющей x, как в положительном так и в отрицательном направлениях.

• Угол отклонения линейки от оси y в начальный момент $\varphi_0 = 0$, а при движении для совершения полного оборота угол изменяется от 0 до 360.

2 ЭТАП. РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ

ИНФОРМАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ

Результаты формализации задачи сведем в таблицу 1.

Для лучшего понимания процесса движения линейки и постановки задачи удобно построить образно-знаковую модель в виде рисунка (рисунок 1).

УТОЧНЕННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

$$AC = L - BC \quad (1)$$

$$x = AC \cdot sin\varphi\,, \quad y = BC \cdot cos\varphi \quad (2)$$

где $0° \le \varphi \le 360°$. Условие окончания процесса $\varphi \ge 360°$.

Таблица 1.

Объект	**Параметры**		**Действия**
	Название	Значения	
Точка линейки	Длина линейки *L* Расстояние до нижнего конца ВС Расстояние до верхнего конца АС Координата *x* Координата *y*	Исходные данные Исходные данные Расчетные данные Расчетные данные Расчетные данные	Скольжение концов линейки вдоль направляющих Изменение положения точки

Как видно из представленной математической модели основные расчетные формулы не изменились. Изменился расчет вспомогательных (внутренних) переменных и условие окончания процесса.

КОМПЬЮТЕРНАЯ МОДЕЛЬ

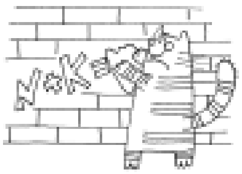
Шаг 1. Создание нового проекта. Для построения компьютерной модели данной задачи можно создать новый проект, описать все параметры и уравнения, создать карту поведения заново. Однако можно скопировать имеющийся проект. Скопируем проект «Лестница_79» и переименуем его в «Линейка».

Эта «ручная» операция потребует следующих действий. Средствами Windows скопируйте папку «Лестница_79» в вашу новую рабочую папку. Переименуйте папку «Лестница_79» в «Линейка». Откройте папку «Линейка» и вы обнаружите папку Tmp и три файла в название которых входит словосочетание Лестница_79. Не меняя расширения файлов, замените строку Лестница_79 на Линейка в названии всех трех файлов. После внесенных изменений можно открывать переименованный проект.

Шаг 2. Вводим и описываем все необходимые параметры (рисунок 2).

Раз мы уже изменили название проекта, не лишним будет изменить и название класса, пусть он также называется «Линейка».

В разделе Параметры оставляем значение параметра *L*, удаляем параметры *N* и *k* и вводим значение нового параметра ВС = 1.



При удалении параметров *N* и *k* будьте внимательны. Просто так эти параметры удалить не удастся – они используются при вычислении значений переменных ВС и *d*. Следовательно, сначала необходимо открыть диалог, позволяющий редактировать описание переменных, и «стереть» написанное в поле «Значение». После этого вам удастся удалить параметр *N*. При попытке удалить параметр *k* вновь появится сообщение об ошибке. Дело в том, что в окне «Виртуальный Стенд» находятся экземпляры неизмененного класса, а в них параметр *k* присутствует. Очистите окно «Виртуальный Стенд» и затем смело удаляйте параметр *k*. Не за-

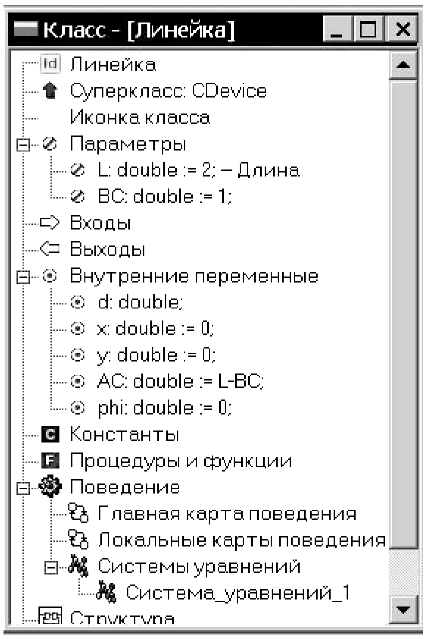


Рисунок 2. Видоизмененное описание класса.

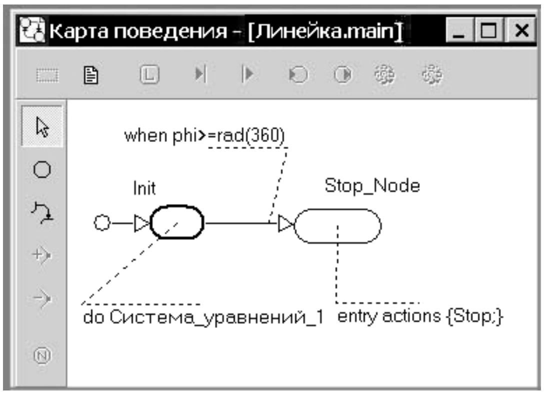
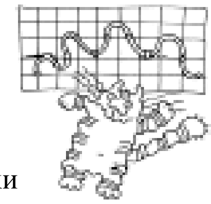


Рисунок 3. Видоизмененная карта поведения.

будьте только после окончания редактирования помесить на Виртуальный Стенд экземпляр модифицированного класса.

Присвоим параметру нужное значение ВС = 1 (рисунок 2).

В разделе «Уравнения» формулы остаются прежними.



Необходимо также внести изменения в карту поведения (рисунок 3). На карте поведения блок рисования траектории и блок остановки процесса остаются неизменными. Изменяется условие окончания процесса: угол больше 360°. Компьютерная модель готова.

Теперь можно запустить модель, и посмотреть что получится. И здесь требуется внимание. Так как мы переименовывали проект, да еще очищали окно Виртуальный стенд в Редакторе Моделей, мы совсем запутали программный комплекс. После компиляции модели мы увидим старые окна графиков, не связанные ни с какими переменными, да еще и помнящие старые настройки. Все можно исправить, но проще закрыть старые окна, и открыть новые. В результате вы увидите кривую, изображенную на рисунке 4.

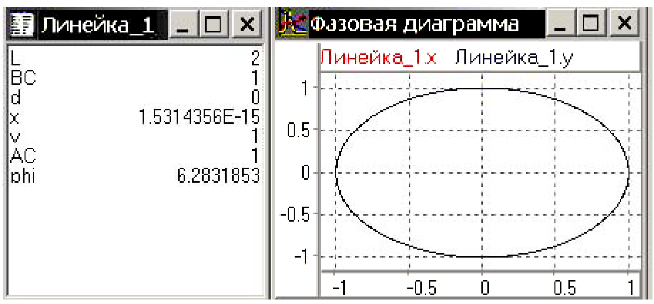


Рисунок 4. Какая кривая изображена на рисунке?

3 ЭТАП. КОМПЬЮТЕРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

ПЛАН ЭКСПЕРИМЕНТА

Наметим следующие эксперименты с моделью.

Тестирование – проверка правильности работы модели.

Эксперимент 1. Исследование кривых при различных исходных данных.

Эксперимент 2. Исследование поведения (вида) кривых при изменении исходных данных.

Эксперимент 3. Определение допустимых значений для исходных значений величины ВС.

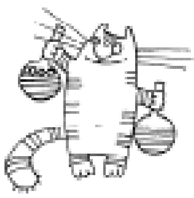
ПРОВЕДЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Тестирование.

Для тестирования возьмем следующие наборы исходных данных:

1-й вариант: $L = 2$, $BC = 2$. Как и в предыдущей задаче, этот эксперимент позволяет проверить хорошо наблюдаемую траекторию движения верхнего конца лестницы (линейки) – вдоль оси *y*.

2-й вариант: $L = 2$, $BC = 0{,}4$. Эти данные в предыдущей модели соответствуют эксперименту с лестницей, длина которой равна 2 м, а ступенька с номером 2 удалена от нижнего конца В на 0,4 м. Таким образом, мы проверим соответствие математических моделей.



Сделайте нужные установки и проведите оба эксперимента. Можно также открыть предыдущий проект «Лестница_79» и сравнить полученные траектории.

Вы, наверное, уже в прошлой задаче обратили внимание, что на фазовой диаграмме оси *x* и *y* имеют разный масштаб. Для того чтобы увидеть привычную картину необходимо выровнять шкалы. В среде MVS масштаб выбирается либо автоматически, либо пользователем. Для этого необходимо, поставив курсор в поле окна «Временная» или «Фазовая диаграмма» правой кнопкой открыть диалог, и выбрать нужные масштабы. Самостоятельно выберите масштабы в моделях «Лестница_79» и «Линейка» и так, чтобы они оказались одинаковыми для обоих графиков.

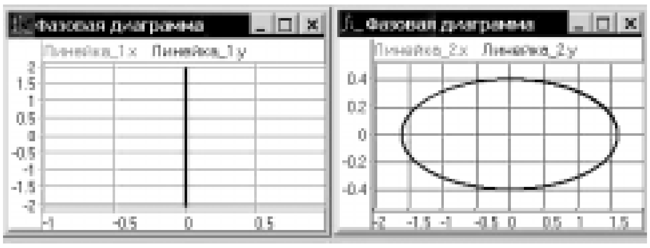
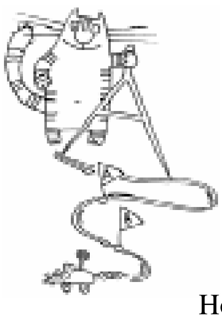


Рисунок 5. Результаты тестирования модели.

В среде MVS можно также менять и стиль графиков. Сравните две фазовые диаграммы, соответствующие вариантам 1 и 2, выбранным для тестирования (рисунок 5). Для изменения стиля графиков вновь откройте правой кнопкой мыши диалоговое окно фазовой диаграммы и измените стили.



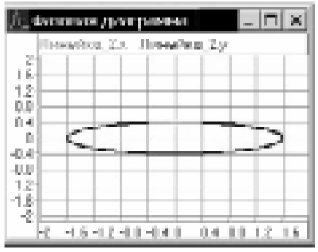


Рисунок 5 *а*.
Новое изображение эллипса.

Менять, разумеется, можно не только стили, но и масштабы по осям. Сравните рисунки 5 и 5 *а*. Кривая одна и та же, а масштабы разные, вот и выглядят они по-разному.

По итогам тестирования новой модели приходим к следующему выводу: при движении концов линейки вдоль осей x и y после совершения линейкой полного оборота получается замкнутая кривая, похожая на эллипс (овал), симметричная относительно оси x и симметричная относительно оси y.

Эксперимент 1. Исследование кривых при различных исходных данных.

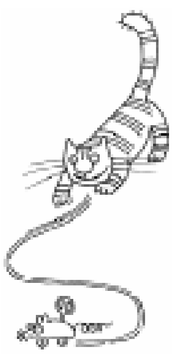
После того как появилась уверенность в правильности работы модели, можно проводить эксперименты по исследованию получающейся кривой. Чтобы легче было анализировать получаемые результаты, используйте равные масштабы для осей.

Выполните модель с другими исходными данными, например,

а) L=2, BC=0;

b) L=2, BC=1;

c) L=2, BC=1.8;



Попробуйте перед выполнением эксперимента предсказать вид траектории. Проанализируем получаемые кривые. Для этого ответим на следующие вопросы:

1. Каково наибольшее расстояние между точками кривой по оси y?

2. Каково наибольшее расстояние между точками кривой по оси x?

Примечание. Эти расстояния называют диаметрами эллипса (по аналогии с окружностью).

3. Чему равны эти расстояния?

В случае а) получается вырожденная кривая – прямая линия, которая соответствует траектории движения конца В вдоль оси x.

В случае b) наблюдаемая точка линейки расположена на середине между концами А и В. Вероятно, предсказание ваше сбылось: полученная кривая – окружность. Увидеть это можно только при равных масштабах осей.

Точки А, В и середину линейки можно считать особенными. В них результат предугадывается наиболее точно.

Все остальные точки линейки в этом смысле являются обычными, хотя при работе с моделью вы, возможно, уже умеете предугадывать результат. Ответим на поставленные вопросы для случая с). Конечно, вы уже и сами получили эти ответы.

Таким образом, после анализа результатов эксперимента приходим к следующему выводу:

Наибольшее расстояние между точками кривой по оси y равно 2 ВС (удвоенному

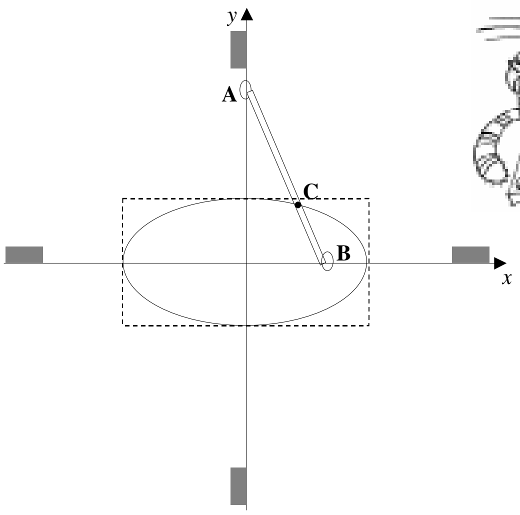


Рисунок 6. Графическое представление выводов по эксперименту.

расстоянию ВС). Наибольшее расстояние между точками кривой по оси x равно 2 АС. И при этом не надо забывать, что АС + ВС = L.

Если выразить эти результаты геометрическим языком, то можно сказать, что получаемый эллипс – это фигура, вписанная в прямоугольник со сторонами 2 АС и 2 ВС, симметричная относительно координатных осей (рисунок 6).

Эксперимент 2. Исследование поведения кривых при изменении исходных данных.

В этом эксперименте попробуем проследить, как изменяется вид кривой при изменении исходного значения ВС от 0 до L. Для этого хотелось бы получить серию кривых на одной фазовой плоскости. Среда MVS

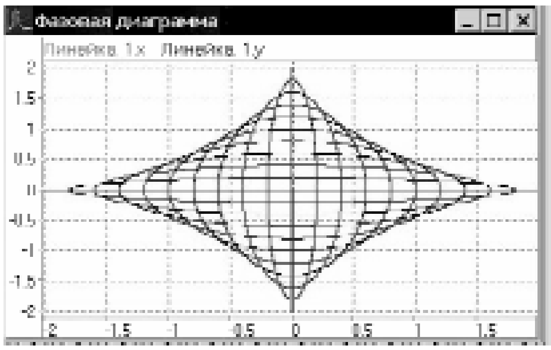
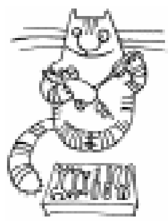


Рисунок 7. Все траектории на одном рисунке.



позволяет сделать это. Но потребуется сделать новое уточнение модели.

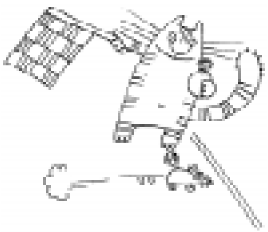
Пока наша модель «Линейка» рассчитана на построение траектории заданной точки. Для того чтобы одновременно увидеть и сравнить траектории двух различных точек, нам придется создать два экземпляра класса «Точка», и в двух различных окнах построить соответствующие кривые. После чего эти рисунки можно сравнивать, если предварительно договориться об одинаковых масштабах. Так мы делали в предыдущем проекте «Лестница_79».

Этот путь хорош, если надо сравнивать траектории только двух точек. А если мы хотим, увидеть траектории некоторого количества точек? Не создавать же нам одновременно десять (или более) испытательных стендов? Конечно же, нет. Потому что в среде MVS можно перейти от параллельной схемы экспериментов (на разных испытательных стендах) к последовательной. Иначе говоря, можно организовать серию экспериментов на одном испытательном стенде так, что результаты каждого эксперимента будут фиксироваться. В результате получится картинка, отображающая все траектории на одном рисунке (рисунок 7).

Чтобы получить такую картинку надо организовать в среде MVS многократное повторение процесса с различными исходными данными. Самый простой способ – организовать изменение значения ВС от 0 до L через одинаковые промежутки. Не правда ли это похоже на ступеньки? Они тоже расположены на одинаковых расстояниях.

Для проведения этого эксперимента скопируйте проект «Линейка» и переименуйте его в «Линейки».

Сделаем изменения в новом проекте. Обратите внимание, что в этом проекте параметр ВС вновь становится вычисляемым (как и в проекте «Лестница_79») и переходит в раздел Внутренние параметры. В этом же разделе введем в рассмотрение новую переменную p – коэффициент, используемый для вычисления ВС (рисунок 8). Установим ее начальное значение равным 0 и запишем формулу для вычисления ВС. В разделе



Уравнения изменим формулу для вычисления угла. В ней, вместо системной переменной Time (см. проект «Линейка»), появилась другая системная переменная LocalTime (рисунок 9). Она автоматически обнуляется при каждом новом эксперименте одновременно с изменением значения переменной *p*.

На Карте поведения (рисунок 10) все те же два блока длительных действий: рисование одной траектории и блок «ничего не делаю».

В отличие от предыдущей модели, добавляется еще одно событие – условие перехода в блок рисования кривой – если угол $\varphi \geq 360°$, то выполнить следующие действия: увеличить значение p и вычислить новые значения AC и BC.

Вставьте в карту поведения это событие для перехода в блок INIT (рис.10). Итак, из блока INIT выходит две стрелки: одна возвращается к блоку INIT и указывает, таким образом, наличие циклического процесса, другая – ведет к блоку «ничего не делаю». Над каждой стрелкой описано событие, по которому будет осуществлен переход к блоку. Среда после завершения очередного процесса блока INIT проверяет условия событий. Очевидно, что пока значение p не превысило значение 1, истинным будет условие возвращения в блок INIT. Когда же *p* = 1,1, истинным станет условие окончания эксперимента, и, не приступая к рисованию очередной кривой, среда закончит эксперимент.

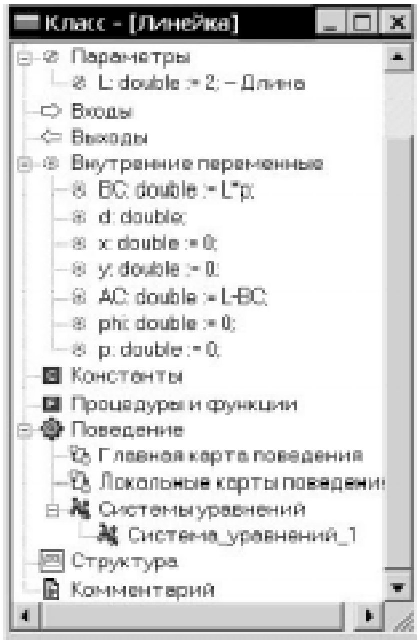
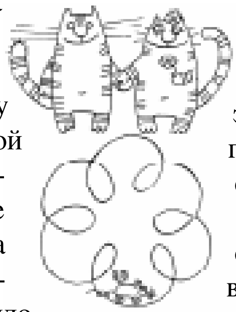


Рисунок 8. Описание класса для полномасштабного эксперимента.



Запустите модель и проследите за процессом рисования траекторий. Следует заметить, что этот процесс вызывает помимо всего прочего и эстетическое удовольствие от получающегося рисунка.

По итогам проведенного эксперимента приходим к следующим выводам.

1. Полученная модель позволяет наблюдать траектории внутренних точек линейки длиной L.

2. При увеличении расстояния от рассматриваемой точки до конца B эллипсы ме-

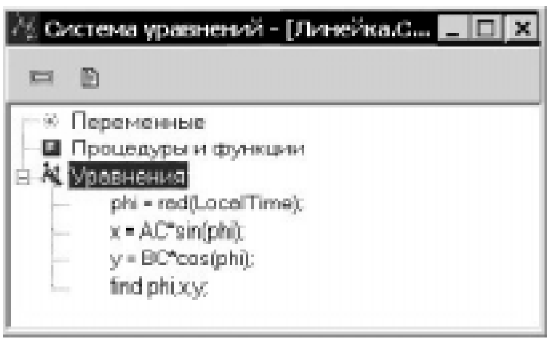


Рисунок 9. Система уравнений для полномасштабного эксперимента.

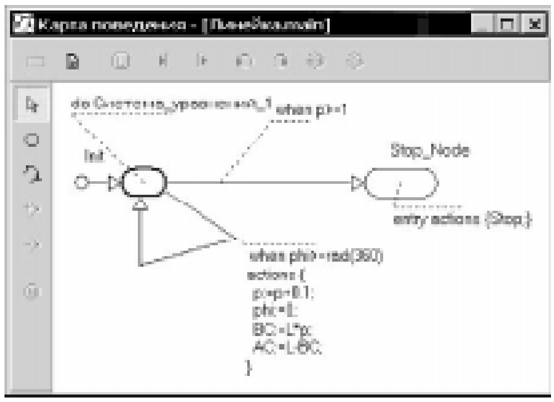
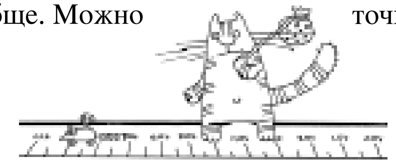


Рисунок 10. Карта поведения полномасштабного эксперимента.

няют свой вид: от приплющенных к оси x они становятся более округлыми, для средней точки линейки превращаются в окружность, и далее постепенно сплющиваются к оси y.

Эксперимент 3. Определение допустимых значений для исходных значений величины ВС.

Дальнейшее экспериментирование с моделью проведем вот в каком направлении. До сих пор мы исследовали траектории точек, расположенных между концами линейки А и В. А если предположить, что линейка имеет продолжение за концы А и В (рисунок 11). И теперь уже не так важно, какую она имеет длину вообще. Можно считать, что она бесконечной длины. Важно только, на каком расстоянии находятся точки крепления линейки А и В к осям. Это и является заданным значением L.



Как можно описать эту новую ситуацию? И можно ли использовать имеющуюся модель?

Оказывается, можно. Для этого введем на линейке АВ положительное и отрицательное направление отсчета расстояний. Расстояние от точки В к А и далее за точку А будем считать положительным, а расстояние от точки В в противоположную сторону – отрицательным. Какова будет траектория точки, если она расположена со стороны одной из точек А или В? Попробуйте сначала предугадать результат, мысленно представив движение.

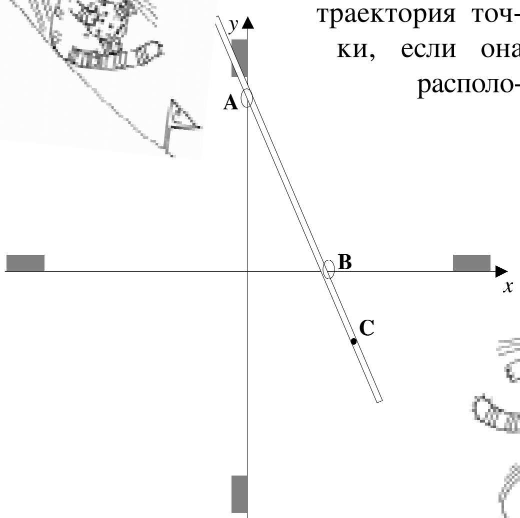


Рисунок 11. Линейка бесконечной длины.

Эксперимент можно провести, используя проект «Линейка». Тогда каждый раз будем получать одну траекторию, соответствующую одному набору данных.

Проведите несколько экспериментов на модели «Линейка» с различными исходными данными, например,

$L = 2$, ВС = – 2; $L = 2$, ВС = – 1;

$L = 2$, ВС = 3; $L = 2$, ВС = 4,

а также любыми другими.

Ответьте на вопросы

1. Какая получается кривая движения точки?
2. Каково наибольшее расстояние между точками кривой по оси y?
3. Каково наибольшее расстояние между точками кривой по оси x?
4. Чему равны эти расстояния?
5. Можно ли описать универсальную формулу определения этих расстояний для всех случаев расположения точки С (между А и В, со стороны одной из точек)?

Если использовать проект «Линейки», то можно получить серию траекторий точек линейки. Но в нем придется опять изменить условие продолжения процесса.

Подумайте, как можно изменить условие продолжения процесса рисования кривых, для точек, расположенных вне отрезка АВ.

4 ЭТАП. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Начав с наблюдения за тем, как движется ступенька лестницы, мы расширили постановку задачи до получения модели движения бесконечной линейки со скользящими вдоль осей x и y точками А и В. Анализ траекторий движения точек этой бесконечной линейки приводит к следующим выводам:

1. Все точки зачерчивают при движении эллипсы.
2. Каждый эллипс характеризуется двумя параметрами – диаметрами по оси x и по оси y.

3. Эти диаметры определяют размер прямоугольника, в который вписан эллипс.

4. Размер этих диаметров связан с расстоянием между точками А и В и расстоянием от рассматриваемой точки до конца В.

5. Если менять расстояние от наблюдаемой точки до точки В, то можно получить картинку серии эллипсов, построенных для одного исходного значения *L*.

Все полученные результаты довольно интересны, особенно, если учесть, что кривую вы все уже давно и не раз видели в различных жизненных ситуациях, а вот какова ее геометрическая природа даже не догадывались.

Но, тем не менее, у хорошего исследователя всегда должен быть найден ответ еще на один вопрос: а каково практическое применение полученных результатов? Конечно, в нашей учебной задаче мы с вами открываем уже давно известные результаты. Но любой исследователь на определенном этапе своей жизни должен переоткрыть заново некоторые вещи. И это может натолкнуть на новые открытия. Ведь чтобы стать изобретателем, надо научиться изобретать.

Так вот полученные нами результаты действительно могут иметь практическое применение. Чтобы это понять, скажите, как вы рисуете окружности? Правильно, пользуетесь инструментом «циркуль». А приходилось ли вам когда-нибудь рисовать эллипс. Наверняка, да. Как это сделать? Можно «на глазок». Можно построить вспомогательный прямоугольник и скруглить в нем углы. На уроках черчения тоже был предложен способ рисования.

Полученные нами результаты позволяют сконструировать прибор для рисования эллипсов с заданными геометрическими размерами. Такой прибор и был сконструирован, и называется он «эллипсограф». Основу его составляет крестовина, моделирующая направляющие x и y. По крестовине скользят ползуны, каждый по своей направляющей. К ползунам прикрепляется линейка со шкалой делений. При этом должна быть предусмотрена возможность прикрепления линейки при помощи шарниров к ползунам в любых точках А и В. На линейке устанавливается бегунок с устройством для крепления карандаша. Конструкция прибора готова (рисунок 12). Теперь дело за реальным техническим воплощением.

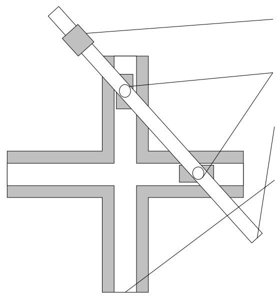


Рисунок 12. Эллипсограф.

Макарова Наталья Владимировна, доктор педагогических наук, кандидат технических наук, проректор Международного банковского института (Санкт-Петербург), заведующая кафедрой информационных систем и технологий,

Сениченков Юрий Борисович, доцент кафедры Распределенных Вычислений и Компьютерных Сетей Санкт-Петербургского Политехничекого Университета,

Титова Юлияна Францевна, канд. пед. наук, доцент кафедры информационных систем и технологий Междунеродного Банковского Института.