ПРЕДМЕТНОЕ ОБУЧЕНИЕ

Иванов Сергей Георгиевич,
Люблинская Ирина Ефимовна,
Рыжик Валерий Идельевич,
совместно с Ron Armontrout,
Lauire Boswell, Tim Corica.

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ СЮЖЕТЫ ДЛЯ СРЕДЫ «THE GEOMETER'S SKETCHPAD»

Я полагаю, что в нашем деле – преподавании математики в школе – идет «ползучая революция». И происходит она не в результате реформ деятелей от образования, а благодаря все более широкому внедрению в школу компьютера и программных средств. Убежден, что лет этак через ... учитель будет проводить такие уроки математики, которые сейчас он даже представить себе не сможет.

Нам посчастливилось видеть рождение и начало этой революции. Но нам же приходится искать и новые идеи, и новые методики.

Использование компьютера (точнее – программных средств, но я предпочитаю для краткости говорить «компьютера») при изучении курса алгебры и начал анализа может начисто изменить их преподавание. Один только пример. Традиционно в курсе анализа вначале занимаются исследованием свойств функций, на основе которых появляется ее график. Теперь же мы можем сразу же получить на дисплее график функции, а уже затем проводить аналитическую работу для уточнения ее свойств. Ясно, что второй путь гораздо симпатичнее.

Сложнее обстоят дела в геометрии. Но интереснее. Одна из попыток использования компьютера для геометрического образования была предпринята в совместном российско-американском проекте, о котором и будет рассказано в этой статье.

Сначала – несколько общих мыслей. Хорошо известно об уникальности геометрического курса в России (столько лет и столько часов на ее изучение в школе, как, пожалуй, нигде в мире), о богатейших традициях ее преподавания, о великолепном наборе задач, десятилетиями отработанных методиках. Но также хорошо известно и о противоположных тенденциях в преподавании геометрии. Именно, дать ее по минимуму, немного порассказывать детям о геометрических фигурах, основных теоремах, чуть затронуть логическую структуру курса, что-нибудь повычислять – и все это буквально за один год. А больше и не требуется. Примерно таков взгляд на школьную геометрию в США.

Вместе с тем легко заметить и недостатки каждого подхода. В России – это гипертрофированное внимание к многочисленным частностям, чересчур сциентистский характер преподавания, почти полный отрыв от практического применения и полное игнорирование компьютерных технологий. В США – это подчеркнуто утилитарный подход, в результате которого исчезает дедуктивный характер курса; невнимание к воспитывающему и развивающему значению геометрии; ученики перестают понимать и роль доказательства, и его необходимость.

В совместном проекте, о котором пойдет речь ниже, сделана попытка объе-

динить достоинства российского и американского понимания значения школьного курса геометрии, попытка пойти навстречу, в надежде, что полученный гибрид окажется жизнеспособным.

Я не буду говорить о созданной методике подробно – она понятна из приведенных далее примеров ее претворения. Но основная идея ее построения должна быть сформулирована.

Берется содержательная задача, достаточно известная из российских источников. Эта задача должна удовлетворять некоторым дополнительным условиям. Она должна иметь ясную прикладную окраску (прикладной аспект задачи на самом деле появляется не из реальной практики, а из головы учителя – получается нечто вроде «сказочки» – и это неизбежно, так как действительно практических задач в школьном курсе геометрии не так уж и много). Далее – она должна моделироваться на компьютере, причем с помощью программного пакета «The Geometer's Sketchpad». В результате моделирования и наблюдения за происходящим на экране формулируется разумная гипотеза. Она проверяется контрольными наблюдениями. Для обоснования этой гипотезы проводится неформальное (не слишком строгое) рассуждение (можно назвать его подтверждением). То есть хорошо бы понять, на основании чего происходит то, что мы наблюдали. Далее (при желании или необходимости) проводится достаточно строгое доказательство. Наконец, должна быть возможность развития темы (называемая расширением) – задача должна быть началом в цепочке других задач, связанных с исходной. Эту цепочку можно предложить ученикам для дальнейших наблюдений и размышлений. Итак: прикладная задача, ее математическая формулировка, моделирование математической задачи на компьютере, наблюдение, гипотеза, подтверждение, доказательство, расширение.

Таким образом подготовлено более 20 задач, одну из которых мы хотим предложить Вашему вниманию.

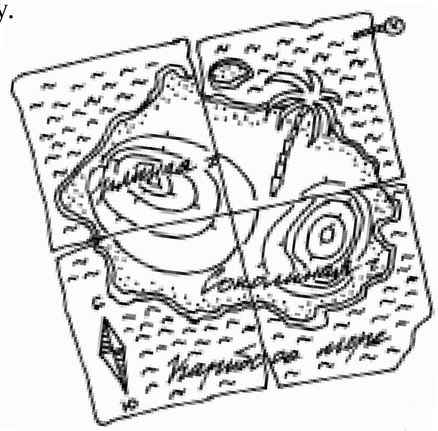
В.И. Рыжик

ЗАДАЧА О ПИРАТАХ

В 1785 году на маленьком острове в Карибском море пираты закопали клад. Для того, чтобы впоследствии найти клад, они в качестве ориентиров заметили две высокие горы и пальмовое дерево. Впоследствии записка с описанием поиска клада попала к археологам. Текст записки гласил:

«От пальмы идите к Соколиной горе и считайте шаги. Затем поверните под прямым углом направо, сделайте такое же количество шагов и воткните в землю палку.

Вернитесь к пальме и идите к Орлиной горе, считая шаги. Поверните под прямым углом налево и сделайте такое же количество шагов. Воткните в землю другую палку.



В этом случае клад будет точно посередине между двумя палками».

Археологи нашли обе горы, но пальмы на месте уже не было. Как им теперь найти клад?

Введение.

Одной из целей этой работы является развитие пространственного мышления, и по этой причине в начале исследования иллюстрации не используются. Учащиеся должны пройти следующие стадии решения этой задачи:

- Представить расположение клада, не пользуясь никакими материалами.
- Описать или изобразить на рисунке то, что они представили.

• Исследовать задачу без компьютера. Для этого можно, например, придумать несколько построений.

• Исследовать задачу с помощью компьютерного инструмента. На этой стадии учащиеся начинают искать доказательства своих предположений.

• Привести полное решение задачи.

Примечание: Важно, чтобы учащиеся выдвигали предположения после каждой стадии, кроме заключительной.

Необходимые знания.

Понятия: прямой угол, середина отрезка, вращение по часовой стрелке и против часовой стрелки.

Теорема: длина средней линии трапеции равна полусумме длин ее оснований.

Возможно решение задачи с применением аналитической геометрии.

Ответ.

Расположение клада не зависит от расположения дерева. Клад находится на серединном перпендикуляре к отрезку Соколиная гора – Орлиная гора на расстоянии, равном половине длины отрезка, от его середины.

Моделирование без компьютера.

Существует несколько подходов, позволяющих получить наглядное представление об этой задаче. В каждом случае учащиеся должны собрать данные, которые приведут к предположению. Воспользуйтесь шаблоном или изобразите расположение гор на большом листе бумаги, чтобы построить конструкции для двух подходов, описанных ниже.

1. Постройте конструкцию, используя необходимые инструменты. Каждая группа на одинаковых чертежах выбирает случайное расположение пальмы и находит точку, в которой находится клад. Предложите учащимся сравнить свои результаты: при всех вариантах расположения пальмы клад всегда оказывается в одной и той же точке.

2. Отметим неподвижную точку, обозначающую дерево – точку T (рисунок 1). Изобразим два луча, перпендикулярных друг другу. Отметим расположение первой палки. Используя копировальную бумагу, отметим расположение второй палки, при этом уменьшим в 2 раза длины лучей. Затем отметим расположение клада.

Моделирование на компьютере.

Для этой задачи подготовлен шаблон **Pirate.gsp.**

Учащийся выбирает произвольную точку расположения дерева, затем строит необходимые точки и отрезки. Точки F и E неподвижны. Каждый учащийся или группа учащихся получит одни и те же координаты клада, независимо от координат дерева.

Для этой работы студенты должны владеть приемами построения отрезка и середины отрезка в среде «The Geometer's Sketchpad», а также использовать раздел Rotate (Поворот) меню Transform (Преобразования).

Можно перемещать точку T (дерево) и убедиться, что расположение клада остается неизменным. Обратите внимание на то, что в этой модели дерево можно перенести даже за пределы острова.

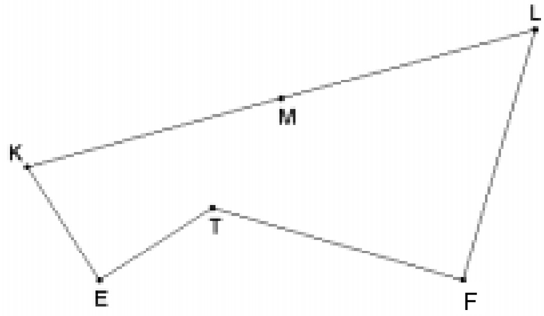


Рисунок 1.

Неформальное доказательство.

«Я заметил, что, когда расположение дерева (точка T) перемещается вверх или вниз, точки K и L перемещаются по параллельным прямым на одно и то же расстояние, но в противоположных направлениях, поэтому середина отрезка остается неизменной. Также я заметил, что когда T перемещается вправо или влево, K и L движутся вверх или вниз на одно и то же расстояние, но в противоположных направлениях, и середина отрезка также остается неподвижной. Это связано с тем, что точки K и L соединены с точкой T перпендикулярными отрезками (рисунок 2).

Таким образом, при любом расположении дерева клад (точка M – середина отрезка KL) будет находиться в одной и той же точке».

Формальное доказательство.

Допустим, что точки K, L и T расположены по одну сторону от прямой EF (рисунок 3).

Построим прямую EF, проведем к ней перпендикуляры из точек K, M и L. Поскольку $KK_1 \perp EF$, $MA \perp EF$, $LL_1 \perp EF$, то $KK_1 \parallel LL_1$, поэтому KK_1L_1L – трапеция. (В случае $KK_1 = LL_1$ трапеция становится прямоугольником). $MA \perp EF$ и $KM = ML \Rightarrow$ $\Rightarrow MA$ – средняя линия трапеции $\Rightarrow$ $\Rightarrow MA = ½ (KK_1 + LL_1)$. ΔFKK_1 и ΔFTT_1 – прямоугольные треугольники с равными гипотенузами, поскольку $FK = FT$ по построению. Поскольку $KK_1 \perp FT_1$ и $KF \perp FT$, получаем: $\angle K_1KF = \angle TFT_1$, следовательно, $\Delta FKK_1 = \Delta TFT_1$ и $KK_1 = FT_1$. Аналогично доказывается, что $\Delta ELL_1 = \Delta TET_1$ и $LL_1 = ET_1$.

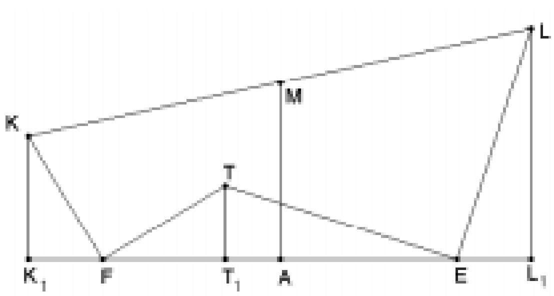


Рисунок 3.

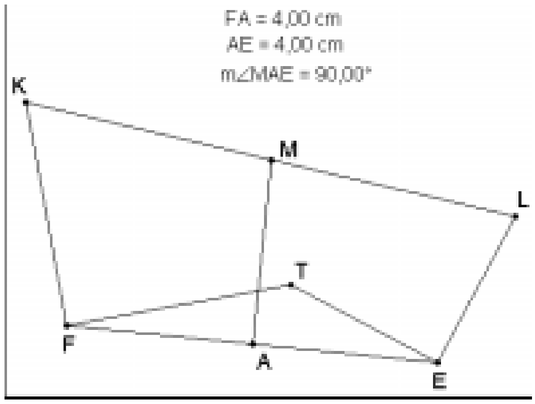


Рисунок 2.

Далее, $MA = ½ (KK_1 + LL_1) = ½ (FT_1 +$ $+ ET_1) = ½ EF$.

Поскольку расстояние EF постоянно, длина отрезка MA также постоянна. Кроме того, поскольку MA – средняя линия трапеции, $K_1A = AL_1$. Из равенства треугольников, доказанного выше, следует, что $TT_1 = K_1F = EL_1$. Следовательно, $FA = AE$, то есть A – середина отрезка EF.

Таким образом, точка M лежит на серединном перпендикуляре к EF на расстоянии половины длины EF от этого отрезка.

Еще одно доказательство.

Пусть точка T движется с постоянной скоростью в восточном направлении. Поскольку точка K получена поворотом точки T на 90 градусов против часовой стрелки, точка K будет двигаться с той же постоянной скоростью в северном направлении (рисунок 4). Поскольку точка L по-

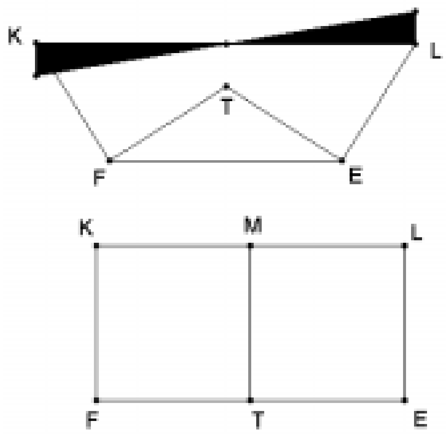


Рисунок 4.

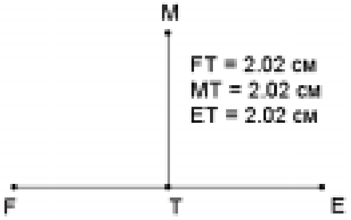


Рисунок 5.

лучена поворотом точки T на 90 градусов по часовой стрелке, она будет двигаться с той же скоростью в южном направлении.

Поскольку скорости точек K и L равны по модулю и противонаправлены, скорость середины M отрезка KL равна нулю, и положение середины отрезка не зависит от положения точки T.

Выберем удобную для построения точку T – например, середину отрезка FE. Тогда $FT = FK = TE = EL \Rightarrow KF = ½\, EF$. Поскольку M – середина отрезка KL и T – середина FE, получим, что $MT = KF = ½\, EF$.

Построение.

Соединим две точки, обозначающие горы: E и F (рисунок 5). Построим серединный перпендикуляр к отрезку EF и отложим на серединном перпендикуляре отрезок длины ½ EF.

Альтернативная конструкция.

Поскольку расположение точки M не зависит от расположения точки T, выберите произвольную точку T и следуйте алгоритму построения точки M.

Дальнейшие обобщения.

Обобщение 1.

Как изменится расположение клада при изменении расположения гор?

Ответ.

Клад располагается на серединном перпендикуляре к отрезку на расстоянии, равном половине длины отрезка.

Моделирование на компьютере.

Для данного обобщения учащемуся предлагается менять расстояние между точками, обозначающими горы, и наблюдать, как это влияет на расположение клада.

Учащиеся могут построить серединный перпендикуляр к отрезку $E'F$. Перемещение точки E' позволит им убедиться в том, что точка M меняет свое расположение, но при этом остается на серединном перпендикуляре. Пусть точка A – середина отрезка $E'F$. Учащиеся могут измерить и сравнить расстояния $E'A$, AF и MA.

Обобщение 2.

Квадраты $TFKD$ и $TELC$ построены на сторонах треугольника TEF, вершины которого соответствуют горам и дереву. Проведем медианы и высоты треугольников CDT и TEF из вершины T. Используйте динамическую иллюстрацию для того, чтобы исследовать связь между медианой треугольника CDT и высотой треугольника TEF.

Ответ.

Высота TB, проведенная из вершины T к стороне EF, является медианой треугольника CDT. Аналогично, медиана TA из вершины T к стороне EF является высотой треугольника CDT.

Моделирование на компьютере.

В этом случае учащимся предлагают построить отрезок CD, медианы и высоты из T на CD и EF и исследовать связь между медианами и высотами. Учащиеся могут перемещать точку T для того, чтобы проверить свои предположения.

Доказательство.

Пусть B_1 – точка пересечения отрезков TB (или его продолжения) и CD (рисунок 6). Проведем через D прямую, параллельную TC, и продлим TB_1. Точку пересечения построенных прямых обозначим через Z. Построим отрезок CZ.

$\angle DTZ = 180° - 90° - \angle FTB$ (смежные углы) $= 90° - \angle FTB$.

Из прямоугольного треугольника FTB: $\angle TFB = 90° - \angle FTB$, следовательно, $\angle DTZ = \angle TFB$.

Аналогично, $\angle ZTC = \angle TEB$.

Поскольку $DZ \parallel TC$ (по построению), $\angle ZTC = \angle DZT$.

Итак, мы имеем: $\angle DTZ = \angle TFB$, $\angle TEB = \angle DZT$, $DT = TF$. Следовательно, $\Delta DZT = \Delta FTE$ (по стороне и двум прилежащим углам), поэтому $DZ = TE$. Но $TE = TC$, следовательно, $DZCT$ – параллелограмм, а точка B_1 – середина отрезка DC.

Аналогично доказывается, что если TA – медиана к стороне EF, то продолжение TA – высота к стороне CD.

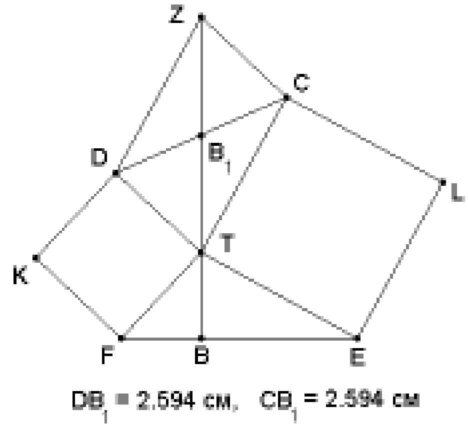


Рисунок 6.

ФРАГМЕНТЫ ОТЧЕТОВ ШКОЛЬНИКОВ

Школьникам предлагали условие этой задачи без решения.

Гаик Тамазян,
8 а класс школы № 261.

Этапы решения задачи.

1. Сначала я представил себе примерную схему расположения клада.

2. Я решил проверить предположение о том, что местоположение клада не зависит от места выбора пальмы. Поэтому я поставил в «The Geometer's Sketchpad» следующий эксперимент.

Сначала я начертил две точки (горы). Затем я провел произвольные окружности с центрами в горах и с такими радиусами, чтобы окружности пересекались. Затем одну из точек пересечения представил пальмой и, следуя инструкциям записки, нашел клад. Затем я произвел такую же операцию, но радиусы окружностей были другими. Когда я получил точку, где лежит клад, она совпала с точкой, выведенной в первом чертеже.

Сколько бы я ни вертел и ни растягивал чертеж, точка не перемещалась.

3. Итог – местоположение клада не зависит от местоположения пальмы.

Использование программы «The Geometer's Sketchpad» для решения геометрических задач мне нравится тем, что можно с большой точностью строить различные чертежи, легко их редактировать и наблюдать за результатом. Также можно «вертеть» или «растягивать» чертежи для проверки правильности решения.

Дмитрий Виноградов,
9 б класс школы № 261.

1. С помощью среды «The Geometer's Sketchpad» построим изображение места расположения клада, обозначив пальму точкой P, Соколиную гору точкой C, Орлиную гору точкой O, палки S_1 и S_2, клад – точкой K.

2. Поскольку расположение пальмы неизвестно, точка P должна быть подвижна. Расположение гор известно, поэтому точки C и O должны быть неподвижны.

3. Вращая точку P в разные стороны, я заметил, что место, где расположен клад, остается неизменным. Вращая точку O или C, можно заметить, что место расположения клада меняется, но, по условию, горы не должны двигаться.

4. Соединим горы C и O отрезком CO. Проводим перпендикуляр KM к отрезку CO. Заметим, что независимо от положения пальмы M длина KM неизменна.

5. Но как же найти место расположения клада? По условию зада-

чи, место расположения пальмы неизвестно.

Передвигая пальму, добьемся того, чтобы $PO = OS_2 = 0$*, тогда точки P и* S_2 *будут совпадать с положением точки O, обозначим эту точку N. Выполним указания пиратов, отмерив от N расстояние до C, затем под прямым углом отложим это расстояние, придем в точку* S_1*. Так как* S_2 *совпадает с точкой P, то, клад лежит посередине между N и* S_1*.*

Таким образом, вместо пальмы, можно взять одну из гор.

Обратите внимание на то, что ученик догадался совместить пальму с одной из гор, что заметно упростило построение. В авторском решении такого приема не было.

Иванов Сергей Георгиевич, сотрудник лаборатории продуктивного обучения ИОСО РАО,

Люблинская Ирина Ефимовна, Ph.D., Peddie School, Highstown, New Jersey, USA.

Рыжик Валерий Идельевич, учитель математики, Лицей «Физико-техническая школа», Санкт-Петербург,

Ron Armontrout, Tim Corica, Peddie School, Highstown, NJ, USA.

Lauire Boswell, The Profile School, Monroe, NH, USA.