Косовский Николай Кириллович

СЕРИЯ НОВЫХ ЛОГИЧЕСКИХ СВЯЗОК ДЛЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ

Долгие годы я работал ученым секретарем кафедры, которой руководил Святослав Сергеевич Лавров. Много ярких теплых личных воспоминаний у меня связано с ним и с членами его семьи. Однако я ограничусь только отдельными организационными моментами в целой школе организаторской деятельности, которую я прошел под его руководством.

Совместная работа со Святославом Сергеевичем была организационно необычайно продуктивна, нужные акценты позволили организовать первоклассный коллектив сотрудников как кафедры, так и лаборатории, возглавлявшейся им.

Часто меня удивляло очень большое время и внимание, которые Святослав Сергеевич уделял посторонним людям, а также плохо успевающим студентам. Многие контрольные работы, которые он проверял, содержали большие дополнительные тексты, написанные его рукой красными чернилами. Поражала его готовность читать курсы лекций по самым разным дисциплинам, связанным с информатикой.

Два десятилетия моей исполнительской работы на кафедре под его руководством оставили неизгладимый след. Я был свидетелем неоценимых примеров результативного руководства кафедрой.

Всякий, знакомый с основами алгебры логики, прочитав заглавие, может сказать: «Какие еще новые логические связки (операции) могут быть, когда все двуместные связки перечисляются даже иногда в школе на факультативных занятиях? Не может быть новых связок!» – если он не знаком с работами Мирона Ивановича Тельпиза. Но вспомним эволюцию почти любого существенно нового.

1-й этап: Не может быть!

2-й этап: В этом что-то есть.

3-й этап: Кто же из интересующихся этого не знает?!

Автор надеется, что многие, читая это сообщение, пройдут все эти три этапа.

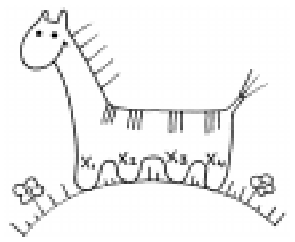
В математике, да и вообще в мире, иногда происходят удивительнейшие события. В самых основах иногда происходят такие существенные изменения, изобретения или открытия, понимание которых вполне доступно любознательному школьнику. Иногда это рождает иллюзию того, что почти все сами смогли бы сделать то же самое. Эта иллюзия аналогична той, которая возникает у поющего про себя песню, подпевая своему любимому исполнителю. Легко, сильно и уверенно летит голос про себя, а вот на эстраде, к сожалению, легкость, сила или уверенность могут куда-то улетучиться.

Примером простого, но существенного для кибернетики понятия может послужить изобретение М.И. Тельпизом новой логической операции, которую автор назвал юнкцией. Этим самым он отметил наглядную связь ее с многоместной логической связкой «и» (конъюнкцией) и многоместной логической связкой «или» (дизъюнкцией).

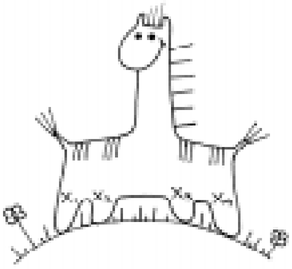
В математике обычно различают три

способа записи выражений, содержащих имена функций или отношений:

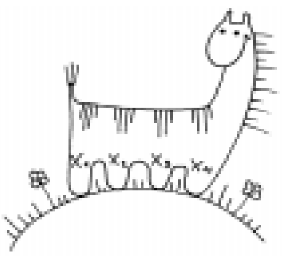
– префиксная, когда имя функции (отношения) стоит перед аргументами, например, *sin* x, $f(x, y, z)$, *ODD* (x);



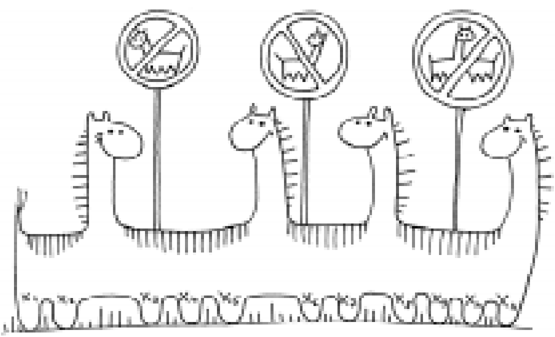
– инфиксная, когда имя функции (отношения) стоит между аргументами, например, $x + y$, $x > y$, $x \,\&\, y$;



– постфиксная, когда имя функции (отношения) стоит после аргументов, например, x^2.

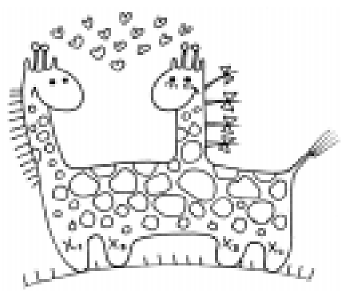


Впервые М.И. Тельпизом была предложена позиционная запись новой логической связки (не префиксная, не инфиксная, не постфиксная). Эта связка была записана



им с помощью двоеточия и названа юнкцией. Она удобна для реализации с помощью электрических схем и позволяет кратко записывать достаточно сложные булевы функции (особенно симметричные), основанные, например, на функции голосования с точным указанием числа голосующих «за». Юнкцию можно использовать как «кубик» элементной базы для построения компьютеров. Она является существенным обобщением пороговых функций.

Юнкция значительно расширяет традиционные логические операции. Она является симметричной функцией (то есть перестановка аргументов не изменяет ее значения). Аргументов у этой операции может быть сколько угодно. Поэтому можно сказать, что предлагается серия логических связок. Знак юнкции, обозначаемый двоеточием, может стоять перед всеми аргументами, между любыми двумя аргументами, а также после всех аргументов. Например, $(:x_1\ x_2{:}x_3\ x_4)$, но между любыми двумя двоеточиями должен находиться хотя бы один аргумент.



В случае, когда использовано только одно двоеточие, предварительно выясняется, после какого по счету (слева направо) аргумента оно находится: после нулевого (то есть перед всеми аргументами), после первого, после второго, ... или после последнего. Пусть двоеточие в выражении, содержащем n различных аргументов, стоит только после k-го аргумента (k не превосходит n). Тогда истинность всего выражения $(x_1\ x_2 \ldots x_k{:} \ldots x_n)$ эквивалентна равенству

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k,$$

где, как это принято в технической кибернетике, истинные аргументы имеют значение 1, а ложные аргументы имеют значение 0. (Отметим, что если в последнем равенстве сложение заменить умножением и $k = 1$, то мы получим определение многократной конъюнкции).

Случай, когда некоторые аргументы находятся между двумя двоеточиями, может быть сведен к предыдущему, когда используется единственное двоеточие. Это сведение может быть продемонстрировано на следующем примере. Для каждого набора аргументов истинность выражения

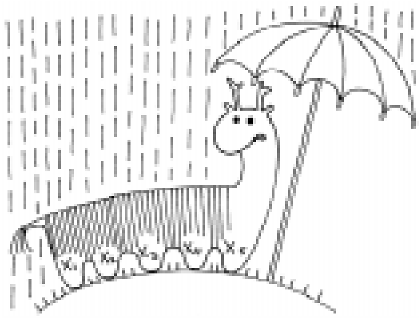
$$(:x_1:x_2\ x_3\ x_4:x_5\ x_6\ x_7:)$$

эквивалентна тому, что истинно хотя бы одно из следующих выражений

$$(:x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ x_7\ )$$
$$(\ x_1:x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ x_7\ )$$
$$(\ x_1\ x_2\ x_3\ x_4:x_5\ x_6\ x_7\ )$$
$$(\ x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ x_7:)$$

Этих выражений ровно столько, сколько в исходном выражении двоеточий, причем каждое двоеточие записывается ровно один раз с сохранением своего места. Уже здесь видна значительная экономия записи юнкции, если среди аргументов использовано несколько двоеточий.

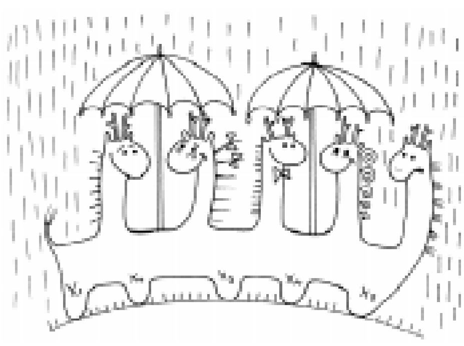
Конъюнкция (логическое умножение) пяти аргументов, которая истинна тогда и



только тогда, когда истинны все ее аргументы, может быть определена через юнкцию следующим образом

$$(\ x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5:)\ .$$

Дизъюнкция (логическое сложение) пяти аргументов, которая истинна тогда и

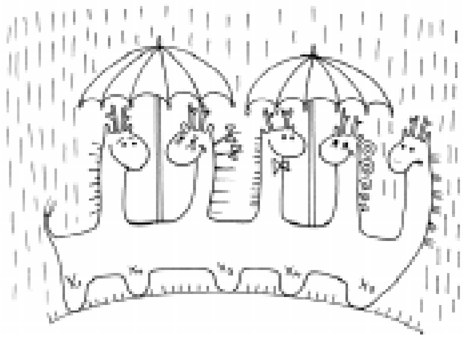


только тогда, когда истинен хоть один ее аргумент, может быть определена через юнкцию следующим образом

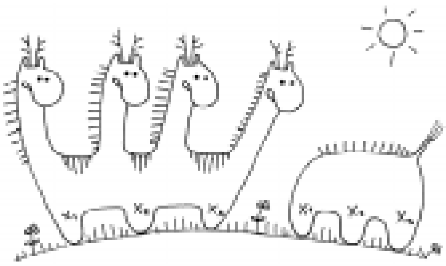
$$(\ x_1:x_2:x_3:x_4:x_5:)\ .$$

Эти определения, несомненно, оправдывают название операции – юнкция.

Логическая константа «*Истина*» эк-

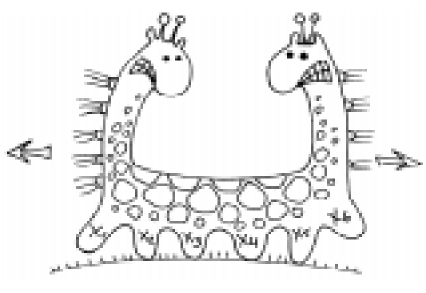


вивалентна каждому из выражений вида (:), $(:x_1:)$, $(:x_1:x_2:)$, $(:x_1:x_2:x_3:)$, ... Удобно считать, что логическая константа «*Ложь*» эк-



вивалентна каждому из выражений вида ( ), $(\ x_1\ )$, $(\ x_1\ x_2\ )$, $(\ x_1\ x_2\ x_3\ )$, ... , в которых нет ни единого двоеточия.

Эквивалентность (равенство) x_1 и x_2

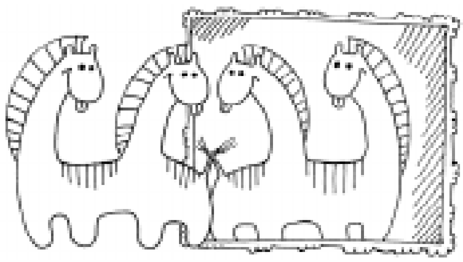


может быть записана в виде $(:x_1\ x_2:)$. Попарная эквивалентность n аргументов может быть записана в виде $(:x_1\ x_2\ ...\ x_n:)$.

Удобный вид имеет отрицание выражения, содержащего несколько двоеточий. При отрицании выражения двоеточия появляются на тех и только тех местах, где их раньше не было. Так, например, отрицание выражения ($x_1{:}x_2\ x_3\ x_4{:}x_5$) эквивалентно выражению $({:}x_1\ x_2{:}x_3{:}x_4\ x_5{:})$.

Когда двоеточий между аргументами очень много, его отсутствие между, перед или после аргументов удобно обозначать подчеркиванием, называя его аюнкцией, одновременно убрав все двоеточия. Это обеспечивает более короткую запись. (Применяется небольшое число символов подчеркивания вместо очень большого числа символов двоеточия.)

Имеет место принцип двойственности: при пронесении отрицания внутрь скобок подчеркивание и двоеточие меняются местами. Пронесение отрицания для выражения, содержащего юнкцию, иное, более простое, чем в случае дизъюнкции и конъюнкции, поскольку перед аргументами не появляются дополнительные отрицания. В результате юнкция обеспечивает более полную, более симметричную и, следовательно, более красивую систему обозначений для логических выражений.



Для операции юнкции возможна и префиксная форма записи, если разрешить использовать натуральные числа для указания номеров тех мест, где должна находиться юнкция или, наоборот, где она не должна находиться (в последнем случае цифру можно подчеркнуть). Например, выражения $[1,4](A,B,C,D)$ и $[\underline{0},\underline{2},\underline{3}](A,B,C,D)$ будут префиксными вариантами записи $(A{:}B\ C\ D{:})$. Поскольку юнкция перестановочна от аргументов, то повторяющиеся аргументы можно снабдить коэффициентом повторения. Например, вместо $[1,4](A,A,A,B)$ можно написать $[1,4](3\ A,B)$.

В такой модифицированной записи проверка выполнимости юнкции (то есть существование набора значений переменных, при котором юнкция истинна) является **NP**-полной задачей (задачей, для которой до сих пор никому не удалось построить алгоритм, решающий ее за полиномиальное от длины записи исходных данных число шагов). Но для обозначений М.И. Тельпиза в качестве сложного упражнения можно доказать следующую теорему.

Теорема. Проверка выполнимости юнкции, аргументами которой могут быть переменные и отрицания переменных (возможно с повторениями), осуществляется за полином шагов от длины записи юнкции.

Случай, когда в выражении имеется только одно двоеточие, представляет собой удачный вариант подпороговой функции. Пороговые функции используются для моделирования нейронных сетей. Примером пороговой функции может служить характеристическая функция условия

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 2$. В терминах юнкции эта пороговая функция запишется в виде $(x_1\ x_2{:}x_3{:})$.

С помощью юнкции легко выразить, например, условие, состоящее в том, что в группе из шести человек при голосовании «за» и «против» (воздержавшиеся голоса причисляются к голосам «против») голоса не разделились поровну.

Наконец, юнкция допускает достаточно простую реализацию электронными схемами.

На ее основе удобно записать результат сложения двух неотрицательных целых чисел, записанных в двоичной системе счисления. Ограничимся пятью разрядами чисел $A = (a_0,a_1,a_2,a_3,a_4)$ и $B = (b_0,b_1,b_2,b_3,b_4)$.

Разряды суммы обозначим посредством $C = (c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$. Они могут быть вычислены следующим образом.

$$
\begin{array}{ll}
c_0 = (a_0{:}b_0); & c'_0 = (a_0\ b_0{:}); \\
c_1 = (c'_0{:}a_1\ b_1{:}); & c'_1 = (c'_0\ a_1{:}b_1{:}); \\
c_2 = (c'_1{:}a_2\ b_2{:}); & c'_2 = (c'_1\ a_2{:}b_2{:}); \\
c_3 = (c'_2{:}a_3\ b_3{:}); & c'_3 = (c'_2\ a_3{:}b_3{:}); \\
c_4 = (c'_3{:}a_4\ b_4{:}); & c'_4 = (c'_3\ a_4{:}b_4{:}); \\
c_5 = c'_4. &
\end{array}
$$

Краткость и наглядность записи говорят сами за себя. Эта запись основана на обычном перенесении единички в старший разряд (разряды перенесения обозначены переменными со штрихами).

Будущие создатели кибернетических устройств! Можете использовать юнкцию, изобретенную математиком М.И. Тельпизом, описание которой впервые опубликовано в 1984 г.

По поводу технической реализации юнкции на микросхеме следует заметить, что, поскольку в настоящее время массово изготавливаются микросхемы, имеющие до 64 выводов, то легко может быть реализована юнкция от 31 аргумента на одной микросхеме. Реализация юнкции возможна как на основе параллельного счетчика, так и на основе взвешивания сигналов при использовании нескольких компараторов, использующих, например, дополняющие МОП-транзисторы. Юнкция может служить удобным элементарным «кирпичиком» при создании кибернетических устройств на СБИС (сверхбольших интегральных схемах).

В качестве наглядного исходного технического представления юнкции достаточно иметь в виду реализацию юнкции, основанную на микроамперметре, на шкале которого имеются дополнительные контакты, отмечающие некоторые значения суммарного тока со всех входов, подключенных к микроамперметру. Возможно, что кто-то сможет изобрести и более удачную реализацию юнкции. С точки зрения математики и программирования основная ценность юнкции состоит в краткости и удобстве ее использования для записи булевых функций, перерабатывающих наборы логических констант. Такое вполне доступно и может быть интересно школьнику, а реализация – дело быстро прогрессирующей техники, быть может, техники того будущего, которое будут создавать сегодняшние школьники.

Литература.

1. *Тельпиз М.И.* Позиционные принципы представления функций алгебры логики. // Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика» АН СССР. М., 1984.

2. *Тельпиз М.И.* Позиционные операторы и преобразования в алгебре логики. // Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика» АН СССР. М., 1985.

3. *Тельпиз М.И.* Применение принципов позиционности в решении систем логических уравнений. // Тезисы докладов Всесоюзной конференции по прикладной логике. М., 1985.

4. *Тельпиз М.И.* Представление функций алгебры логики. // Кибернетика, 1985, № 4, с. 37–40.

6. *Косовский Н.К.* О новой позиционной логической связке. // Тезисы докладов Девятой Всесоюзной конференции по математической логике. Л., «Наука», 1988.

Косовский Николай Кириллович, доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой информатики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.