Кублановский Станислав Исакович,
Матиясевич Юрий Владимирович

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ В МАТЕМАТИКЕ – УНИВЕРСАЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ РЕШАТЕЛЬ

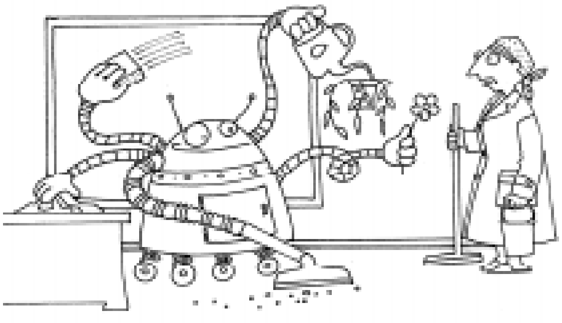
Я имел удовольствие неоднократно общаться со Святославом Сергеевичем Лавровым после его переезда в Ленинград. Будучи руководителем философского семинара ПОМИ, я пригласил его в юбилейный год рассказать о своей работе по расчетам первых искусственных спутников. Очень большое впечатление на меня произвела скромность вычислительных ресурсов, которыми удалось решить совсем непростые задачи. Запомнились два случая, о которых рассказал Святослав Сергеевич, когда ошибки в расчетах счастливым образом компенсировались другими ошибками.

Святослав Сергеевич одним из первых в СССР стал обладателем персонального компьютера. Это был 8-битный компьютер фирмы Commodore. У меня был компьютер той же фирмы, и это послужило причиной наших многочисленных встреч в то время.

Я начал преподавать на кафедре математического обеспечения ЭВМ, основанной Святославом Сергеевичем на мат-мехе ЛГУ, к сожалению, уже после того, как он передал ее под руководство А.О. Слисенко.

Ю.В. Матиясевич

С очень давних времен в мифах, легендах и сказках разных народов упоминается «чистая» и «нечистая» сила, которая умеет решать и решает за людей их проблемы. Попытки обнаружить ее в реальной жизни пока успехом не увенчались, поэтому людям пришлось создавать себе искусственных помощников. Во многих сферах деятельности такие роботы заменили человека и успешно конкурируют с ним. Вначале на роботов переложили тяжелую механическую работу: они стирают, копают, убирают, фасуют, торгуют... Но людям показалось недостаточным заменить себя в сфере материальной, они решили переложить на плечи (или, скорее, на голову) робота и интеллектуальную деятельность. Надо сказать, что и на этом поприще есть весьма впечатляющие результаты. Роботы научились не хуже гроссмейстера играть в шахматы, сочинять «музыку», писать «картины».



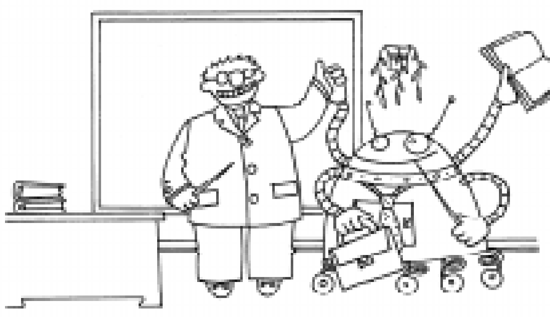
Во многих сферах деятельности такие роботы заменили человека и успешно конкурируют с ним.

А возможно ли создание робота-ученого, например, математика, который бы умел решать любые математические проблемы?

Формально говоря, ответ на этот вопрос положителен. Развитие математической логики привело к выработке аксиоматической теории множеств, в рамках которой лежат доказательства 99,999% всех теорем современной математики. Проверка же *полностью* формализованного доказательства не требует интеллектуальных усилий, с этим машины справляются даже лучше людей. Можно представить себе такой процесс, напоминающий то, что описал Джонотан Свифт: одна машина случайным образом порождает одну за другой последовательности математических символов, а другая машина проверяет, не оказалась ли очередная последовательность математическим доказательством. В случае успеха полученная теорема тут же печатается.

Такая пара машин, работая достаточно долго, напечатает и теорему Пифагора, и Великую теорему Ферма, и много еще никем не доказанных теорем. Вся загвоздка состоит только в требуемом времени работы. Человек обладает интуицией, которая позволяет ему находить короткий путь к цели, а не делать слепой перебор всех возможностей. Высказываемое же нередко мнение, что известная теорема Гёделя о неполноте накладывает принципиальные ограничения на возможности машин, несостоятельно – эта теорема в той же степени ограничивает и возможности человека.

Мы поставили перед собой несколько иную задачу: создать робота – помощника учителя математики. Каким он должен быть, что должен уметь делать такой робот?



Мы поставили перед собой ... задачу: создать робота — помощника учителя математики.

Во-первых, он должен обладать знанием предмета на уровне гораздо выше школьного, как и любой школьный учитель. Во-вторых, он должен уметь распознавать, можно ли решить данную задачу, используя только школьные методы. В-третьих, он должен методически грамотно объяснить решение задачи. И, наконец, он должен просто уметь говорить. Конечно, к ассистенту учителя можно предъявить и ряд других требований, но мы пока ограничились данным набором.

Решение любой задачи связано с преодолением целого ряда трудностей, но перед нами возникли проблемы, о которых в другой ситуации вряд ли имело смысл задумываться, так как они кажутся интуитивно понятными.

Например, само понятие «школьный метод» оказалось очень условным. Даже весьма сложные математические рассуждения можно разбить на ряд шагов, каждый из которых будет понятен школьнику, но количество шагов, которые необходимо проделать для достижения результата, делает решение такой задачи далеко нешкольным.

Вторая категория трудностей была связана с отсутствием общих формальных алгоритмов для выполнения школьных заданий и обилием методов частных. Приведем следующий пример. Часто встречается задание, которое называется «упростить выражение». Что это означает? К какому конечному результату мы должны прийти? Это понимается только на интуитивном уровне. Например, какое из двух тождественно равных выражений считать проще: $\sqrt{3\sqrt{2}-4}$ или $\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{2}$?

Учитель руководствуется собственным опытом и интуитивным здравым смыслом, делая каждый следующий шаг какихлибо преобразований. В основе же действий робота должны быть четкие инструкции, которые не что иное, как свойства математических операций. В списке может быть инструкция: $\sqrt{ab} = \sqrt{a} * \sqrt{b}$, но в этом же списке может существовать и другая инструкция: $\sqrt{a} * \sqrt{b} = \sqrt{ab}$. Наличие двух таких правил таит в себе опасность зацикливания «мозгов» робота, поэтому математический робот должен уметь анализировать целесообразность применения инструкции в данной конкретной ситуации, а это уже свойства интеллекта.

Довольно часто школьные методы являются частными случаями сложных, а иногда и открытых математических проблем. Например, такой известный школьный метод решения уравнений, как замена переменных, требует от робота знаний, выходящих за рамки школьного курса. Так, например, простая школьная замена переменных в уравнении $F(x) = 0$, где $F(x)$ – некоторый многочлен, есть средство для поиска разложения $F(x)$ в суперпозицию двух многочленов ненулевой степени, а это – весьма нетривиальная задача алгебры многочленов. Конечно, реальный вид многочлена в ряде случаев школьной практики может помочь найти такую суперпозицию, но робот не должен надеяться на «подарки», а должен уметь все делать для общего случая.

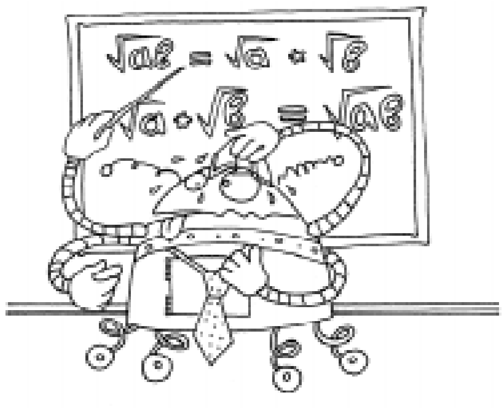
Вот пример из задачника:

$3(x + 2)^2 + 2(x^2 – 2x + 4)^2 – 5(x^3 + 8) = 0$

Это случай, когда надо применить метод двойной замены. А теперь, представьте себе, что скобки уже раскрыты, подобные члены приведены, и перед Вами многочлен четвертой степени. Сможете ли вы его представить в прежнем виде? Чтобы найти двойную замену, надо представить данный многочлен в виде квадратичной формы многочленов ненулевой степени. Эта задача в общем случае для многочленов степени выше четвертой является нерешенной математической проблемой.

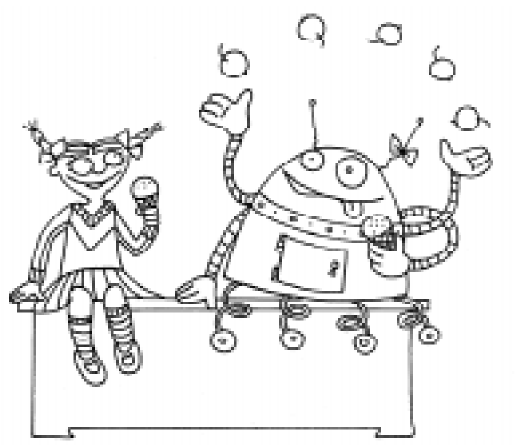
Третья категория трудностей – трудности программного порядка. Мы хотели сделать так, чтобы с нашим «роботом» было бы легко и удобно общаться, чтобы контакт с ним не требовал от пользователя дополнительного обучения.

Решение поставленных задач потребовало объединения усилий специалистов



Наличие двух таких правил таит в себе опасность зацикливания «мозгов» робота.

различного профиля: математиков, программистов, методистов, психологов. В 1997 году в рамках лаборатории информационных технологий ТПО «Северный очаг» была создана такая группа. Первый результат появился через три года работы группы – программа «Math 2000» – математический робот первого поколения. Мы поместили эту программу в Internet, в систему свободного доступа, и она широко распространилась, по примерным подсчетам «Math 2000» скачало около 500 тысяч пользователей. Через год появилась новая версия программы, которая была названа *Универсальным математическим решателем*, или, коротко, UMS (программа была реализована на двух языках – русском и английском). Презентация этой программы состоялась на выставке ИТО 2001 в



Мы хотели сделать так, чтобы с нашим «роботом» было бы легко и удобно общаться...

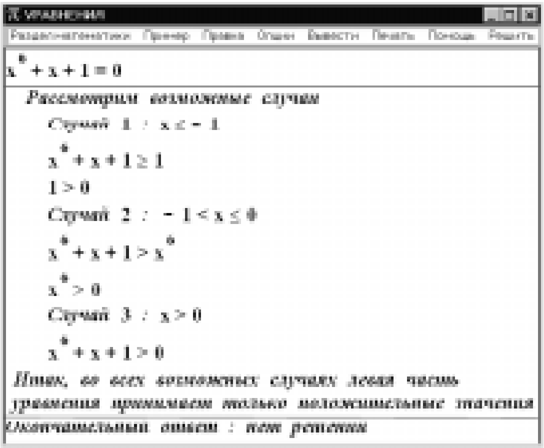


Рисунок 1.

Москве. В 2002 году появилась интернет-версия Универсального решателя – UMS on-line (см. www.umsolver.com)

Несколько слов о возможностях Универсального математического решателя.

UMS – развивающаяся программа. Регулярно выходят новые версии с новыми функциями. В конечном итоге UMS охватит программу по алгебре и анализу средней школы и первых курсов вузов. В настоящее время UMS (в последней версии 1.5) позволяет решать любые задания из следующих шести разделов алгебры: рациональные уравнения, разложение многочлена на множители, полное разложение многочлена на множители, упрощение выражений, упрощение числовых выражений с радикалами, рациональные неравенства, системы и совокупности рациональных неравенств. В ближайшее время выйдет версия 1.6, в которую будет включен новый модуль – исследование функций с помощью производных и построение графиков.

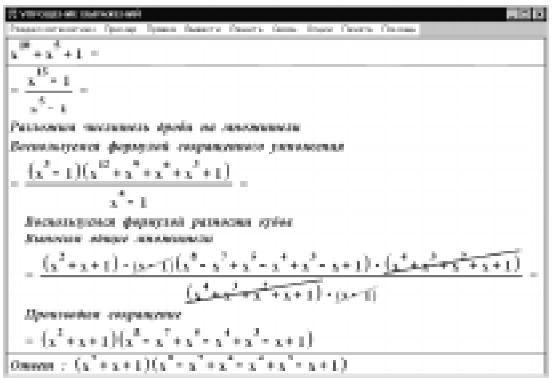


Рисунок 2.

Каждому из представленных в программе шести разделов алгебры соответствует функциональный модуль программы. Хочется сказать несколько слов о каждом из этих модулей.

Уравнения.

Этот модуль UMS пока решает только рациональные уравнения (рисунок 1). Бытует мнение, что это очень просто, так как решение таких уравнений базируется на одном-двух приемах. На самом деле, даже самый беглый анализ школьных методов дает несколько десятков приемов решения рациональных уравнений. В UMS реализовано около сотни различных способов решения, добавлен ряд новых методов, которые позволили решать, например, такие уравнения, как $x^5 - 15x^4 + 10x^3 - 30x^2 + 5x - 3 = 0$ (попробуйте решить сами!)

Разложение и полное разложение на множители.

Этот модуль позволяет разлагать на множители целые алгебраические выражения с рациональными коэффициентами и с любым количеством переменных. В разделе «Полное разложение» целое выражение раскладывается на неприводимые многочлены. Разложение многочленов на множители – отдельная математическая теория, которой посвящено множество научных статей и целые монографии. Трудно было отделить школьные методы разложения от научных (рисунок 2).

Упрощение выражений.

Этот модуль позволяет упростить рациональное выражение с рациональными и радикальными коэффициентами. Под наиболее простым видом понимается выражение, записанное в виде дроби, в числителе и знаменателе которой стоят произведения степеней взаимно простых многочленов. Мы считаем, что такой вид выражения является наиболее удобным для его последующего использования в других модулях программы: решение уравнений, неравенств, дифференцирование и т. д.

Упрощение выражений с радикалами.

Сложность этого модуля заключается в неоднозначности понятия «наиболее простой вид» – мы об этом уже говорили. Нами была выработана некоторая концепция упрощения, позволяющая избежать зацикливаний и приводящая к результатам, соответствующим школьным канонам. С нашей точки зрения, наиболее простой вид должен иметь наименьшую из возможных вложенность радикалов и отсутствие иррациональностей в знаменателе.

Неравенства.

В данном модуле все нетривиальные неравенства решаются методом интервалов с использованием графического блока, дающего наглядность решения.

Отметим, что мы старались сделать UMS универсальным, он должен справляться с любым примером из данного раздела, который может быть решен школьными методами, в частности, решать любой пример из любого школьного задачника. Мы тестировали UMS по учебникам России, Германии, Франции, США, а также по сборникам олимпиадных заданий различного уровня. Но и это не все. Программа не только должна решить задание, то есть получить правильный ответ, но и решить его рационально, то есть прийти к ответу за наименьшее из возможных число шагов.

Как же работать с программой UMS?

Итак, вас интересует решение некоторого примера.

Для начала его надо ввести в UMS. Мы предоставили для этой цели экранный редактор, примеры вводятся так, как они записываются в тетради, пользователю не нужно изучать специальный синтаксис ввода. Набор осуществляется с помощью экранной или обычной клавиатуры (рисунок 3).

Пример введен. Нажимаем на кнопку «решить» и... на экране шаг за шагом начинает появляться его решение. Вывод решения примера сопровождается комментированием каждого шага; текстовые комментарии, часть математических формул и ответ проговариваются голосом. В программе существует возможность остановить решение примера на любом шаге или возобновить решение, начиная с любого шага. Дается возможность распечатать полученное решение. Интерфейс программы настолько прост и интуитивно понятен, что для использования программы нет необходимости штудировать Help.

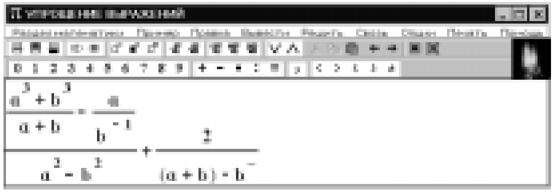
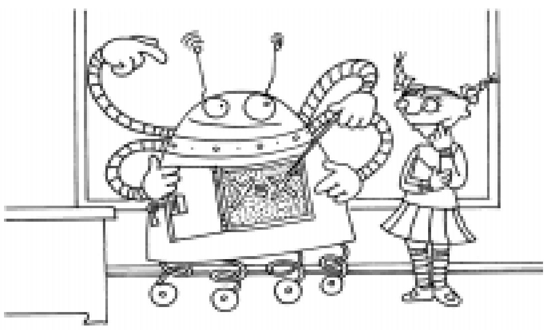


Рисунок 3.

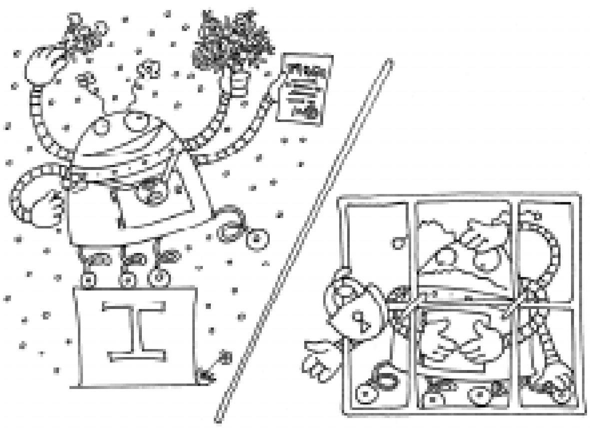
Теперь, когда пример уже решен, он записывается в базу решенных примеров – копилку. В копилке примеры можно классифицировать, снабжать любыми комментариями, делать выборку серии примеров по какому-либо фильтру.

За два года существования UMS мы получили большое количество реплик, которые носили диаметрально противоположный характер: от полного восторга до предложения законодательно запретить UMS.

Используя эту программу, говорили наши оппоненты, ученики без труда будут списывать домашнее задание, UMS – это

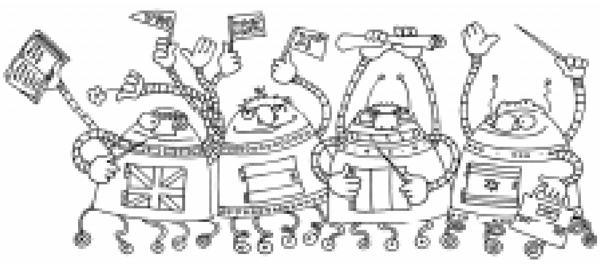


Мы предоставили для этой цели экранный редактор...



...мы получили большое количество реплик, которые носили диаметрально противоположный характер...

воплощение мечты закоренелых лентяев. Мы понимаем их (оппонентов) опасения, но считаем, что все зависит от позиции преподавателя, который может проверять не наличие выполненного домашнего задания, а его понимание, умение самостоятельно, без помощи компьютера решать математические задачи. Нередко нам говорят, что никакая, даже самая продвинутая программа не способна заменить учителя. Несомненно, что это так. Мы и не ставили себе такой цели. Наша программа – это не замена учителя, а его ассистент. Сейчас 70% урока учитель должен стоять спиной к классу, объясняя у доски новый материал. А теперь представим, что новый метод объясняет программа, а решение примера шаг за шагом проецируется на экран. Учитель, глядя на реакцию учеников, останавливает изложение, комментирует, задает вопросы, предлагает учащимся определить, какой следующий шаг должен сделать компьютер.



...позволило создать за короткий срок локализованные версии на английском, немецком, французском языках и на иврите...

При подготовке к уроку (самостоятельной, контрольной работе) учитель должен сам прорешать все предлагаемые им примеры, так как нередко в книгах, учебниках, пособиях встречаются опечатки. Здесь UMS будет тоже незаменимым помощником учителя. Если школа оборудована компьютерным классом, то эффективно использование UMS для индивидуальной самоподготовки учащихся. Допустим, контрольная работа будет состоять из нескольких заданий, выбранных из данной большой серии. Запомнить решение всех заданий серии, конечно, невозможно, но самостоятельно выявить свои слабые места и получить у UMS(а) компетентную помощь ученик сможет. Полезна эта программа будет и для родителей, которые хотят сами контролировать учебу детей.

Нас часто спрашивают, имеются ли другие системы, подобные UMS.

Существуют мощные математические пакеты, такие как Mathematica, MathCAD, MathLab, Maple. Эти пакеты дают лишь ответы к задачам, но не объясняют их решение, поэтому область применения этих программ ограничена научной и инженерной практикой. Использование этих программ требует длительного обучения, так как они имеют сложный интерфейс. Это ограничивает их распространение.

Существуют программы, которые дают объяснение решения задачи, но эти программы ограничиваются или шаблонными заданиями или несколькими шаблонными методами решения, что позволяет им решать только простейшие школьные задания.

Среди имеющихся в настоящее время математических программ достойных аналогов UMS мы не нашли.

Возможно, этим обстоятельством вызван особый интерес к нашей программе, который мы наблюдаем не только у нас, но и за рубежом. Этот интерес побудил нас реализовать UMS на Unicode, что позволило создать за короткий срок локализованные версии на английском, немецком, французском языках и на иврите. Сейчас программа существует в off-line и on-line вариантах. Она доступна для использования в любой точке земного шара, где есть Интернет.

Математика – наука интернациональная. Это в полной мере относится и к школьной математике, поэтому с самого начала UMS проектировался как продукт интернациональный. Общеизвестно, что математическое образование в России – лучшее в мире, всемирное признание получили и российские программисты. Непонятно, почему же в таком случае основные математические программы мы привозим из-за границы. Мы хотели бы надеяться, что в ближайшее время в России будут созданы программные продукты, которые станут предметом нашего экспорта по всему миру, и что наша программа UMS займет среди них свое место.

На диске к журналу находятся две ограниченно-рабочие версии UMS.

***Кублановский Станислав Исакович,
доктор физ.-мат. наук,
руководитель проекта «UMS»,
Генеральный директор ТПО
«Северный очаг».***

***Матиясевич Юрий Владимирович,
чл.-корр. РАН,
зав. лабораторией математической
логики Санкт-Петербургского
отделения Математического
института РАН.***