Совертков Петр Игнатьевич,
Хохлов Д. Н.

ШТРИХОВКА ЗАМКНУТОГО МНОГОУГОЛЬНИКА

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При построении сечений многогранника в геометрии методом сечений или методом внутреннего проектирования требуется провести штриховку многоугольника, полученного в сечении. Направление штриховки и шаг штриховки лучше подобрать экспериментально в зависимости от данного многогранника и полученного сечения. Существующие стандартные методы штриховки, удобные для черчения, инженерной графики, не всегда обеспечивают наглядность изображения в данной задаче. В статье рассматриваются различные методы штриховки замкнутого выпуклого или невыпуклого многоугольника в зависимости от направления штриховки и шага между ближайшими параллельными линиями штриховки.

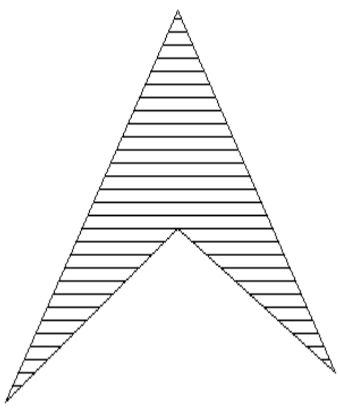
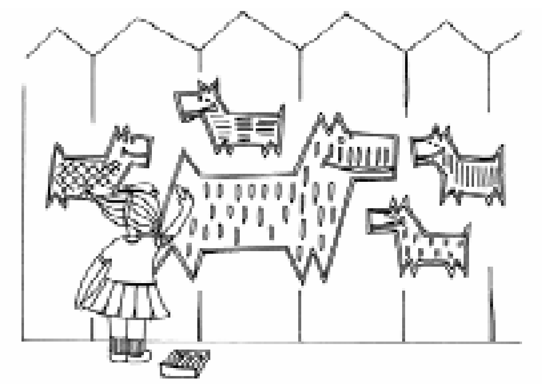


Рисунок 1.

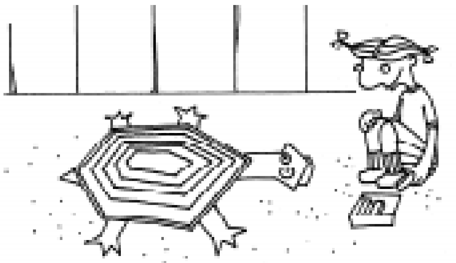
СТАНДАРТНЫЕ ПРОЦЕДУРЫ ШТРИХОВКИ

Для стандартных штриховок произвольного замкнутого многоугольника различными узорами используются встроенные функции Visual Basic. Этот метод не требует математического моделирования (оно скрыто от пользователя), но этот метод ограничивает возможность выбора направления штриховки. Существует четыре направления возможного проведения прямых линий. Расстояние между линиями штриховки изменить нельзя (рисунок 1).

Наложение текстуры на многоугольник изложено в [3, с.339]. Штриховка в среде автоматического проектирования AutoCAD 2000 позволяет учесть угол наклона (с точностью до целочисленного значения величины угла) и расстояние между линиями [2, с.239].



...рассматриваются различные методы штриховки замкнутого выпуклого или невыпуклого многоугольника...



...штриховка замкнутого выпуклого многоугольника...

МЕТОД ОКАНТОВКИ

Рассматривается штриховка замкнутого выпуклого многоугольника методом окантовки с помощью опорного прямоугольника (рисунок 2). Пусть направление штриховки задано ненулевым вектором $\bar{q}(m,n)$ и задано расстояние h между линиями штриховки.

Направляющий вектор штриховки можно выбрать, например, параллельно любой стороне многоугольника или диагонали многоугольника (рисунок 3). Прямая l называется опорной прямой многоугольника, если она содержит хотя бы одну граничную точку этого многоугольника, но не содержит никакой его внутренней точки. Пересечение $l \bigcap Q$ является либо вершиной, либо стороной многоугольника. В любом случае выпуклый многоугольник содержится в одной из двух полуплоскостей, определяемых прямой l [1, с.178].

Проведем верхнюю $l_в$ и нижнюю $l_н$ опорные прямые к многоугольнику, параллельные направлению штриховки.

Проведем левую $l_л$ и правую $l_п$ опорные прямые к многоугольнику, перпендикулярные направлению штриховки. Получим прямоугольник $П$ (рисунок 2), содержащий данный выпуклый многоугольник. Будем заштриховывать прямоугольник $П$ бегущей точкой вдоль отрезков, параллельных верхнему основанию прямоугольника, и спускаясь от верхнего основания к нижнему основанию. Выпуклый многоугольник Q зададим системой линейных неравенств. Точки прямоугольника, не принадлежащие многоугольнику Q, не будем изображать на экране компьютера.

АЛГОРИТМ ШТРИХОВКИ ВЫПУКЛОГО МНОГОУГОЛЬНИКА

Далее будем считать вектор $\bar{q}$ единичным. Нормировку вектора всегда можно осуществить после ввода этого вектора, поделив координаты вектора на длину вектора. Пусть заданы в порядке обхода многоугольника вершины многоугольника M_1 $(x_1,\ y_1)$, M_2 (x_2, y_2), ..., M_n $(x_n,\ y_n)$ (рисунок 4).

Существуют две опорные прямые $l_в$ и $l_н$, параллельные вектору $\bar{q}$. Названия верней и нижней опорной прямой являются условными. Например, если вектор $\bar{q}$ является вертикальным и направлен вниз, то опорные прямые превращаются в правую и левую.

Найдем вершины многоугольника, через которые проходят эти опорные прямые. Рассмотрим вектор $\bar{q}_1(-n,m)$ единичной длины и перпендикулярный вектору $\bar{q}$.

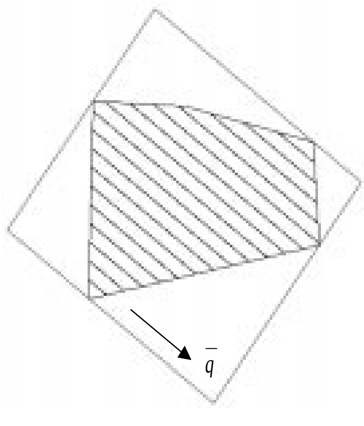


Рисунок 2.

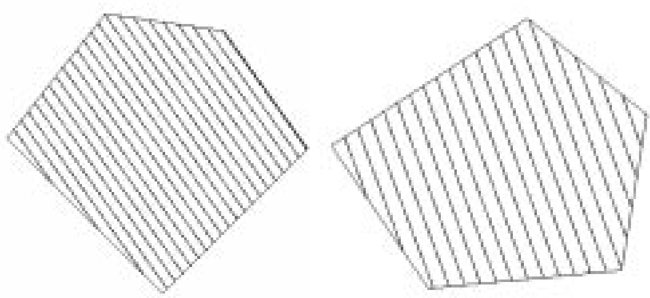


Рисунок 3.

Найдем проекции векторов $\overline{OM}_1$, $\overline{OM}_2, \ldots, \overline{OM}_n$ на вектор $\bar{q}_1$:

$$p_1 = \overline{OM}_1 \cdot \bar{q}_1 = -nx_1 + my_1,$$

$$p_2 = \overline{OM}_2 \cdot \bar{q}_1 = -nx_2 + my_2,$$

$$\ldots$$

$$p_n = \overline{OM}_n \cdot \bar{q}_1 = -nx_n + my_n.$$

Обозначим наибольшую проекцию $p_B = max\ (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ и наименьшую проекцию $p_H = min\ (p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Вершины многоугольника для соответствующих проекций назовем верхней вершиной $M_B\ (x_B, y_B)$ и нижней вершиной $M_H\ (x_H, y_H)$ штриховки. Если вектор $\bar{q}$ параллелен какой-то стороне многоугольника, то в качестве верхней вершины штриховки могут оказаться две вершины. Аналогично могут существовать две нижних вершины штриховки. Выберем по одной верхней и одной нижней вершине штриховки.

Рассмотрим проекции векторов $\overline{OM}_1$, $\overline{OM}_2, \ldots, \overline{OM}_n$ на вектор $\bar{q}$:

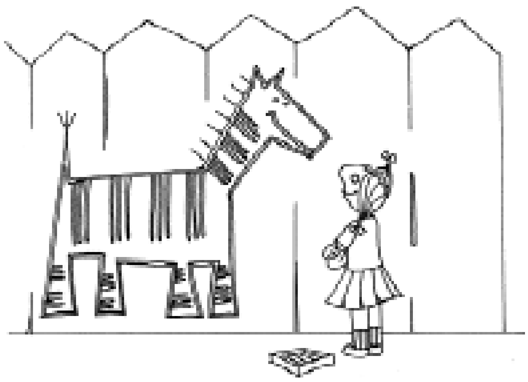
$$r_1 = \overline{OM}_1 \cdot \bar{q} = mx_1 + ny_1,$$

$$r_2 = \overline{OM}_2 \cdot \bar{q} = mx_2 + ny_2,$$

$$\ldots$$

$$r_n = \overline{OM}_n \cdot \bar{q} = mx_n + ny_n.$$

Найдем наибольшую проекцию $r_П$ и наименьшую проекцию $r_Л$. Вершины многоугольника для соответствующих проекций назовем правой $M_П(x_П, y_П)$ вершиной и левой вершиной $M_Л(x_Л, y_Л)$ штриховки. Если оказалось две правых или две левых вершины, то выберем по одной из них. Через правую и левую вершины проведем опорные прямые $l_П$, $l_Л$, параллельные вектору $\bar{q}_1$. Прямые $l_П$, l_B, $l_Л$, l_H при



Направляющий вектор штриховки можно выбрать, например, параллельно любой стороне многоугольника...

пересечении образуют прямоугольник $П$. Обозначим: $M_{ЛВ} = l_Л \cap l_В$, $M_{ПВ} = l_П \cap l_В$, $M_{ЛН} = l_Л \cap l_Н$, $M_{ПН} = l_П \cap l_Н$.

Координаты вершин прямоугольника определяются через координаты верхней, нижней, левой и правой вершин штриховки многоугольника по формулам на рисунке 5.

Суть метода штриховки состоит в следующем. Рассмотрим сетку отрезков штриховки в прямоугольнике $П$. Будем

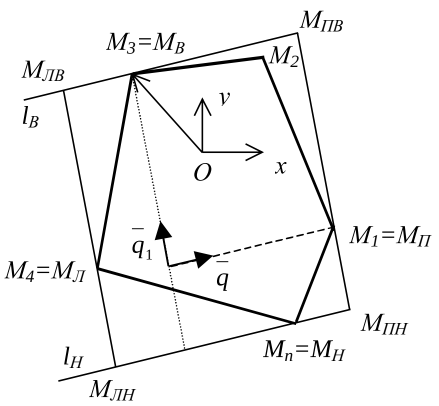


Рисунок 4.

$$\overline{OM}_{ЛВ} = \overline{OM}_B + \overline{M_B M}_{ЛВ} = \overline{OM}_B - \left|M_B M_{ЛВ}\right| \bar{q} = \overline{OM}_B + (\overline{M_B M}_Л \cdot \bar{q})\bar{q}$$

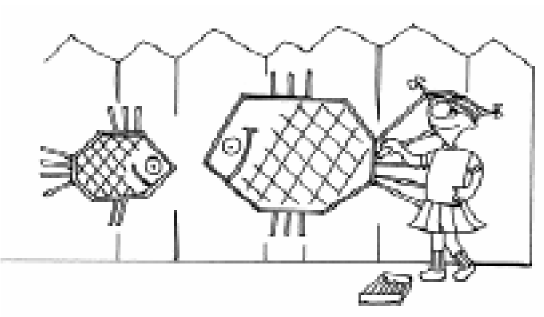
$$M_{ЛВ}\ (x_B + [(x_Л - x_B)\ m + (y_Л - y_B)\ n]\ m,\quad y_B + [(x_Л - x_B)\ m + (y_Л - y_B) n] n),$$

$$M_{ПВ}\ (x_B + [(x_П - x_B)\ m + (y_П - y_B)\ n]\ m,\quad y_B + [(x_П - x_B)\ m + (y_П - y_B)\ n]\ n),$$

$$M_{ЛН}\ (x_H + [(x_Л - x_H)\ m + (y_Л - y_H)\ n]\ m,\quad y_H + [(x_Л - x_H)\ m + (y_Л - y_H)\ n]\ n),$$

$$M_{ПН}\ (x_H + [(x_П - x_H)\ m + (y_П - y_H)\ n]\ m,\quad y_H + [(x_П - x_H)\ m + (y_П - y_H)\ n]\ n).$$

Рисунок 5.



Штриховка произвольного замкнутого многоугольника.

рисовать отрезки бегущей точкой от левой стороны к правой стороне прямоугольника. Начальная точка каждого отрезка получается при спуске по левой стороне на величину шага h. Итак, с помощью двойного цикла может быть построена штриховка прямоугольника. Но рисовать будем только те точки, которые принадлежат заданному многоугольнику.

Длина левой стороны прямоугольника равна

$$s=\sqrt{(x_{ЛВ}-x_{ЛН})^2+(y_{ЛВ}-y_{ЛН})^2}\ .$$

Параметрические уравнения начальных точек отрезков на левой стороне

$$x_s = x_{ЛВ} + nk,\ y_s = y_{ЛВ} - mk,$$

где параметр k меняется от 0 до s с шагом штриховки h.

Длина верхней стороны равна

$$w=\sqrt{(x_{ЛВ}-x_{ПВ})^2+(y_{ЛВ}-y_{ПВ})^2}\ .$$

Параметрические уравнения отрезков штриховки

$$x = x_s + me,\ y = y_s + ne,$$

где параметр e меняется от 0 до w.

В качестве одной внутренней точки выпуклого многоугольника выберем точку пересечения медиан M_m треугольника $M_1M_2M_3$, тогда ее координаты равны

$$x_m=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\quad y_m=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\ .$$

Уравнение стороны M_1M_2:

$$(y_2 - y_1)(x - x_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0.$$

Если точки $M(x, y)$, $M_m(x_m, y_m)$ оказались по одну сторону от прямой M_1M_2, то выражения $(y_2 - y_1)(x - x_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1)$ и $(y_2 - y_1)(x_m - x_1) - (x_2 - x_1)(y_m - y_1)$ имеют одинаковые знаки. Поэтому условие принадлежности двух точек $M(x, y)$, $M_m(x_m, y_m)$ одной полуплоскости принимает вид

$$[(y_2 - y_1)(x - x_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1)]\times$$
$$\times[(y_2 - y_1)(x_m - x_1) - (x_2 - x_1)(y_m - y_1)] > 0.$$

Для проверки принадлежности точки $M(x, y)$ выпуклому многоугольнику следует организовать цикл проверки принадлежности точек M, M_m полуплоскостям относительно прямых M_1M_2, M_2M_3, ..., $M_{n-1}M_n$, M_nM_1.

АЛГОРИТМ ШТРИХОВКИ ПРОИЗВОЛЬНОГО МНОГОУГОЛЬНИКА

Рассматрим штриховку произвольного многоугольника (рисунки 6, 7).

Пусть луч с начальной точкой M_0 (x_0, y_0) и направляющим вектором $\bar{q}(m,n)$ пересекает некоторые стороны границы многоугольника и не проходит через вершины многоугольника. Если точка M_0 расположена вне замкнутого многоугольника, то общее количество точек пересечения четно, а если точка находится внутри многоугольника, то нечетно. В [3, с.202] эта идея применялась к проверке принадлежности точки многоугольнику. После проверки принадлежности точки данному

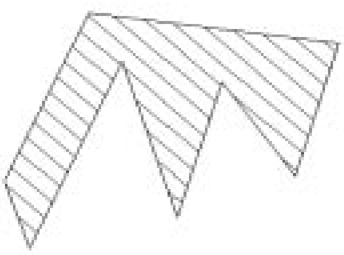


Рисунок 6.

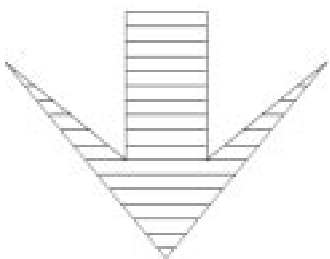


Рисунок 7.

многоугольнику можно изобразить ее на экране и осуществить дальнейшую штриховку. Однако такой метод штриховки осуществляется медленно. Найдем точки пересечения луча с границей, выберем необходимые отрезки и осуществим штриховку рисованием этих отрезков.

Если сторона многоугольника оказалась на луче, то этот участок границы нельзя перекрашивать штриховкой, так как граница многоугольника должна быть замкнутой и обозначена вся на чертеже. Итак, при выполнении условия $n\,(x_{i+1} - x_i) - m\,(y_{i+1} - y_i) = 0$ сторона многоугольника должна быть исключена из процесса нахождения пересечения луча с границей многоугольника.

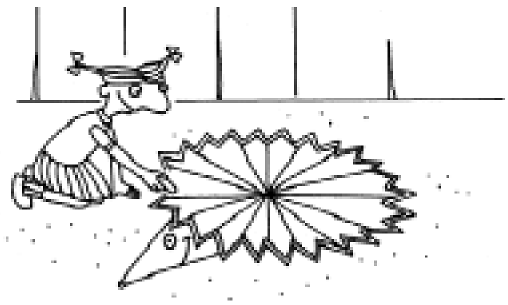
Пусть луч проходит через вершину многоугольника и не содержит его сторону. Для заданного направления вершины делятся на два типа. Вершина M_k (рисунок 8) называется экстремальной, если концевые точки M_{k-1}, M_{k+1} отрезков, приходящих в эту точку, расположены по одну сторону от прямой, проходящей через точку M_k. Скалярные произведения векторов $\bar{q}_1 \cdot \overline{M_k M_{k-1}}$, $\bar{q}_1 \cdot \overline{M_k M_{k+1}}$ в этом случае имеют одинаковые знаки. Экстремальная вершина многоугольника для заданного направления характеризуется условием

$$[n\,(x_{k+1} - x_k) - m\,(y_{k+1} - y_k)] \times$$
$$\times [n\,(x_{k-1} - x_k) - m\,(y_{k-1} - y_k)] > 0.$$

Экстремальную вершину учтем каждый раз при определении пересечения луча с границей, то есть учтем ее дважды.

Вершины другого типа не являются экстремальными. Концевые точки отрезков, приходящих в точку M_{nk}, расположены по разные стороны от прямой, проходящей через эту точку (рисунок 8). Вершины этого типа нельзя учитывать дважды, так как общее количество точек пересечения может получиться нечетным.

Алгоритм подсчета точек пересечения луча с границей и задания штриховки:



Штриховку любого многоугольника можно осуществить ... и центральным проектированием...

• Для вершин многоугольника и заданного направления определяем точки с условием
$[n\,(x_{k+1} - x_k) - m\,(y_{k+1} - y_k)] \times$
$\times [n\,(x_{k-1} - x_k) - m\,(y_{k-1} - y_k)] < 0,$
создаем массив из координат некритических точек.

• Находим точки пересечения луча со сторонами границы, которые не лежат на луче, создаем массив из этих точек.

• В массиве точек пересечения находим две точки с одинаковыми координатами. Если такие точки принадлежат массиву некритических точек, то объединяем их в одну точку.

• Сортируем массив оставшихся точек пересечения по близости к данной точке M_0. Если вектор штриховки не является вертикальным, то для этого достаточно отсортировать точки по разности координат $x_i - x_0$.

• Рисуем штриховку отрезками от точек с нечетными номерами до точек с четными номерами.

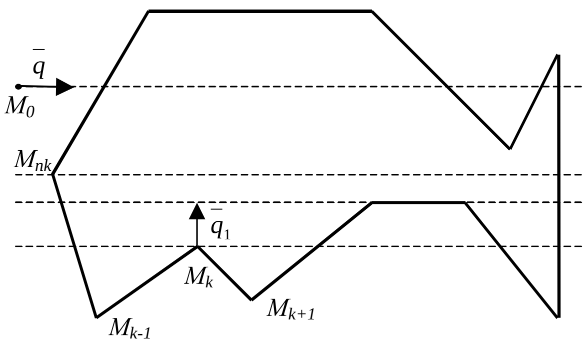
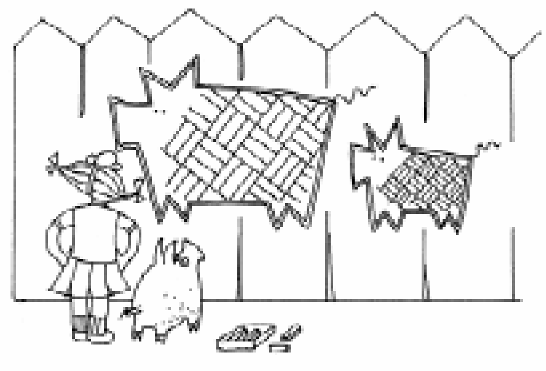


Рисунок 8.



Используя различные штриховки, можно создавать узоры и геометрические паркеты в многоугольнике...

Штриховку по этому алгоритму можно применять как для простых (рисунок 9), так и для самопересекающихся многоугольников (рисунок 10).

Штриховку любого многоугольника можно осуществить как параллельным пучком отрезков, так и центральным проектированием (рисунок 11) из заданной точки. При центральном проектировании начальная точка $M_0(x_0, y_0)$ луча является фиксированной, а координаты m, n направляющего вектора изменяются с помощью цикла.

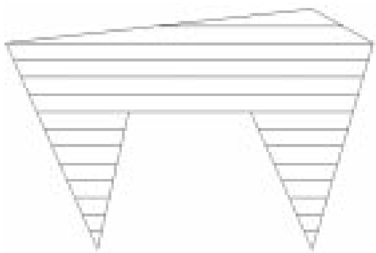


Рисунок 9.

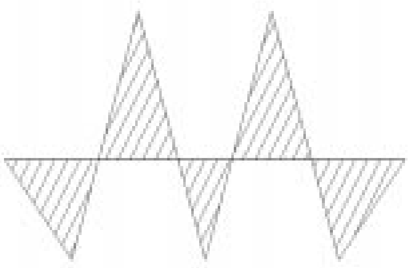


Рисунок 10.

ПРОГРАММА ШТРИХОВКИ

Программа штриховки многоугольника написана на языке Visual Basic 6.0.

Последовательность действий на экране компьютера (рисунок 12):

1 шаг. Пользователь осуществляет ввод координат вершин многоугольника с помощью мыши на графическом окне. При необходимости можно вывести на экран координаты точки рядом с курсором мыши и номера сторон многоугольника. Нажимая левую кнопку мыши, фиксируем вершину на экране, а, нажимая правую кнопку мыши, замыкаем ломаную до многоугольника.

2 шаг. Метод штриховки можно осуществить тремя способами. Первый способ «по вектору» – он выбран по умолчанию. В этом случае можно ввести координаты вектора (целочисленные, через запятую) и ширину шага штриховки (целые числа от 1 до 9).

Для штриховки «по стороне» необходимо ввести номер стороны многоугольника. В этом случае штриховка осуществляется прямыми, параллельными указанной стороне.

Для штриховки «из точки» необходимо нажать кнопку «штриховать» и щелчком мыши указать точку на экране, из которой будет осуществляться центральное проектирование.

На экране можно изобразить опорный прямоугольник для многоугольника.

Для заданного многоугольника можно накладывать штриховки произвольное число раз (рисунок 13). Каждый раз мож-

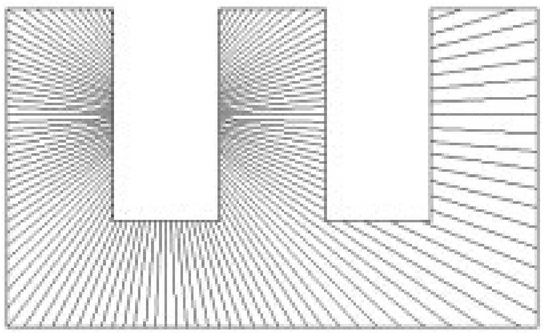


Рисунок 11.

но выбирать снова любой метод штриховки и повторить указанные операции. Чтобы различать штриховки, каждую штриховку можно осуществить новым цветом. Штриховку можно отменить и осуществить новую штриховку, не изменяя заданный многоугольник.

Используя различные штриховки, можно создавать узоры и геометрические паркеты в многоугольнике (рисунок 14).

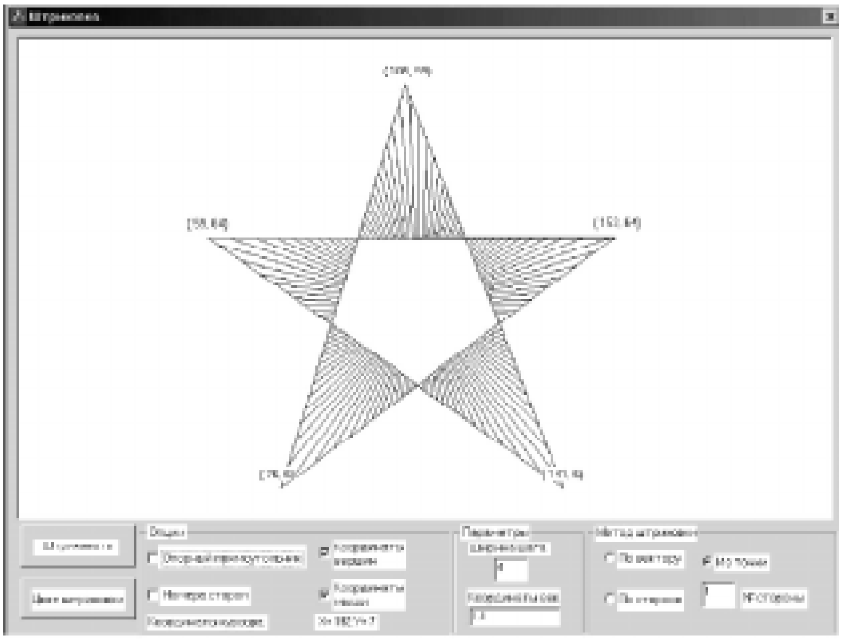


Рисунок 12.

Примечание. Если программа выдает информацию о том, что не найден какой – либо файл, то необходимо установить Visual Basic 6.0.

Литература.

1. *Болтянский В.Г.* Элементарная геометрия. М.: Просвещение, 1985.

2. *Романовычева Э.Т., Соколова Б.Ю., Шандурина Г.Ф.* Инженерная и компьютерная графика. М.: ДМК Пресс, 2001.

3. *Шикин Е.В., Боресков А.В.* Компьютерная графика. Полигональные модели. М.: ДИАЛОГ–МИФИ, 2000.

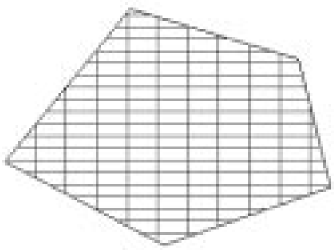


Рисунок 13.

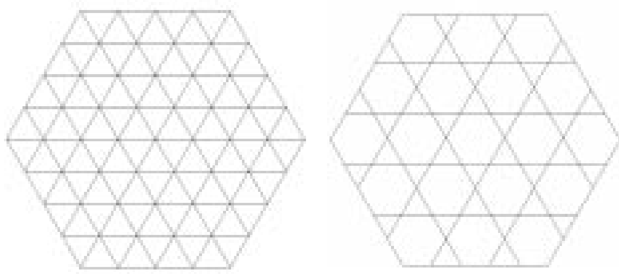


Рисунок 14.

Совертков Петр Игнатьевич, доцент кафедры геометрии и МПМ Нижневартовского государственного педагогического института (НГПИ).

Хохлов Д. Н., студент факультета информатики и математики НГПИ.