Храповицкий Иван Сергеевич

ЭВРИСТИЧЕСКИЙ ПОЛИГОН ДЛЯ ГЕОМЕТРИИ

Одним из значительнейших событий, могущих радикально повлиять на технологию преподавания геометрии в школе, является, на мой взгляд, появление специальных компьютерных программ. В частности, это программы, позволяющие осуществлять динамизацию геометрических объектов. Одну из них – *The Geometer's Sketchpad* – я приобрел два года тому назад. Это было моей лучшей находкой за все годы работы в школе. Постепенно я пришел и ко второму открытию – эту программу почти никто из моих коллег, учителей математики, живущих в радиусе около пятисот километров (возможно, и больше!) не знает. Об этом свидетельствовали мои поиски в Интернет.

The Geometer's Sketchpad (далее GS) – небольшая программка (около 1 Мб, у меня 3-я версия), которая может выполнять следующие основные операции:

1) строить точки, прямые, лучи, отрезки, окружности;

2) из этих фигур образовывать их комбинации – другие фигуры: углы, многоугольники, части круга и даже эллипсы с гиперболами и параболами;

3) отмечать произвольную точку прямой, ломаной, окружности;

4) строить отрезки и углы заданной величины;

5) проводить прямые, перпендикулярные и параллельные данной, строить биссектрису угла;

6) выполнять параллельный перенос, симметрии, поворот и гомотетию фигуры;

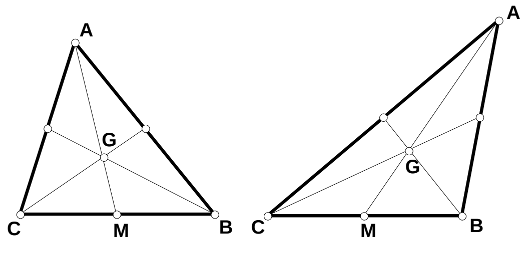
7) деформировать фигуру или отдельные ее части;

8) вычислять длину отрезка, величину угла, периметр и площадь многоугольника, длину окружности и площадь круга (все это приближенно);

9) осуществлять анимации фигуры или отдельных ее точек.

Таким образом, компьютер как бы дает нам в руки классические циркуль с линейкой плюс измерительное устройство (функции которого он исполняет сам). Смысл операции 7 виден из рисунка 1.

Если зацепить «мышкой» за вершину *A* левого треугольника и потянуть ее, то треугольник деформируется и принимает вид на рисунке справа. Медианы при этом остаются медианами, а отношение отрезков сохраняется. Мы имеем дело с афинными преобразованиями. Операция 8 дает возможность вывода на монитор числовых характеристик фигур. Во время изменения фигур меняются и соответствующие параметры. Все это означает, что мы получаем мощное эвристиче-



AG = 1,962 cm

GM = 0,981 cm

$\frac{AG}{GM}$ = 2,000

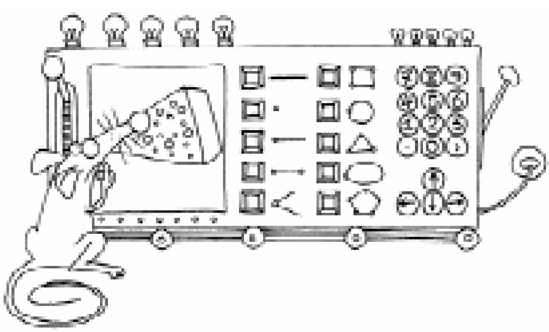
Рисунок 1.

ское средство для решения задач. Д. Пойа мог бы об этом только мечтать! Максимальная эвристичность рисунков-чертежей провоцирует пользователя на увлекательную исследовательскую деятельность. Сама программа очень проста в работе – для ее применения не требуется специальных знаний информатики. Возможность изменять фигуру в соответствии со своим желанием естественно выводит геометрические представления ученика и его сознание из статического состояния. Мышлению чужда статика.

Кроме всего, старые задачи на построение с помощью циркуля и линейки обретают новое дыхание – решать их на компьютере несравненно интереснее, чем древними евклидовскими инструментами. Программа GS существенно обогащает технологию работы над задачей. Теперь она может дополниться построением ***динамической модели***. Под последней будем понимать выполненный на компьютере чертеж, соответствующий условию задачи, и выведенные (при необходимости) на монитор числовые параметры. Это потенциально динамический чертеж, так как он несет в себе способность к изменению, сохраняющему, однако, заложенные в рисунок свойства фигуры.

Рассмотрим теперь некоторые возможности нашей программы с точки зрения методики преподавания геометрии.

1. ПРОЕКТ «СПРАВОЧНИК ПО ГЕОМЕТРИИ»



Первое, что приходит в голову учителю, имеющему программу GS, – это идея создания вместе с учениками некоего

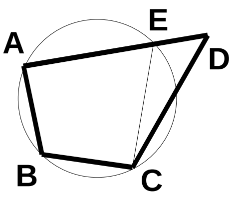


Рисунок 2.

электронного пособия по курсу планиметрии. Дети, получив конкретное задание, максимально погружаются в суть различных теорем курса, потому что геометрия «делается своими руками» и заниматься ею так интересно.

Поставим перед восьмиклассниками такую задачу: найти, при каком условии можно описать окружность около четырехугольника. Работу за компьютером можно организовать так:

Построить произвольный четырехугольник $ABCD$. Провести окружность через вершины A, B, C. Вывести на монитор величины всех углов и перемещать вершину D по плоскости до тех пор, пока она не попадет на окружность (рисунок 2). Замечаем при этом, что $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$. Возникает гипотеза: около выпуклого четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, если сумма его противолежащих углов равна 180°. Доказательство получим, если вспомним изученное накануне свойство вписанных углов и построим вспомогательный четырехугольник $ABCE$.

Затем, естественно, ставим перед учащимися задачу: при каком условии можно вписать окружность в четырехугольник? Эксперимент будет схожим с проведенным.

Приведем еще один пример.

На сторонах a, b, c произвольного треугольника построим квадраты (рисунок 3). «Отрежем» от большего из них два прямоугольника, равновеликие меньшим квадратам. Если изменять треугольник (зацепив мышкой одну из его вершин), то можно проследить за изменением суммы $a^2 + b^2$ и сравнить ее с c^2. Если $a^2 + b^2 < c^2$, как на рисунке, то треуголь-

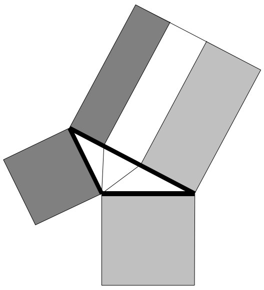
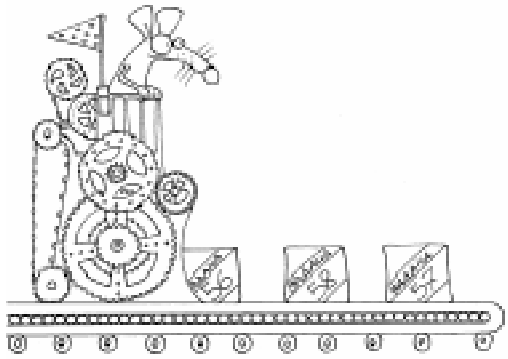


Рисунок 3.

ник, как видим (и докажем!), – тупоугольный; при $a^2+b^2<c^2$ треугольник станет остроугольным, а в случае $a^2+b^2=c^2$ – прямоугольным. Трудно представить более наглядную интерпретацию следствия из теоремы косинусов!

Динамические модели можно создать почти для любой теоремы геометрии. Если учесть, что программа GS дает возможность осуществлять анимации объектов, то имеем все условия для того, чтобы сделать интересное электронное пособие по геометрии, в котором каждый факт получит убедительное эмпирическое подтверждение. Программа допускает к тому же фиксацию основной идеи или плана доказательства. И самое главное здесь в том, что это пособие может создавать каждый заинтересованный ученик, получая от работы подлинное удовольствие. Возможно, он не разберется во всех дедуктивных аспектах курса геометрии, но зато вплотную познакомится с различными геометрическими свойствами, пусть пока и на эмпирическом уровне. Конечно, данная работа требует от учителя деликатного подхода, чтобы не навредить формированию научного мировоззрения детей. Или мы обращаемся к моделям как к эвристическому средству и затем доказываем или опровергаем гипотезу, или используем подвижную модель в качестве наглядного пособия после завершения доказательства. Ни в коем случае эксперимент не должен подменять собой дедуктивных рассуждений. Но меня здесь больше всего интересуют эвристические возможности GS.

2. ГЕНЕРАТОР НОВЫХ ЗАДАЧ



Динамическая модель к задаче зачастую подсказывает идею решения проблемы, формирует гипотезы и приглашает к развитию задачи в определенных направлениях. Приведу примеры задач, которые возникли при экспериментах с динамическим чертежом.

Задача 1.

Из внутренней точки правильного пятиугольника две смежные его стороны видны под углами в 84°. Под какими углами видны остальные стороны пятиугольника?

Решение. Пусть в соответствии с условием $\angle BZA = \angle BZC = 84°$ (см. рисунок 4).

Достаточно найти величины углов AZE и DZE. Точка Z, очевидно, принадлежит оси симметрии пятиугольника – прямой BZ. Тогда $BZ \perp DE$. Непосредственным измерением получаем гипотезу: $\angle DZE = 60°$. Допустим, что действительно $\angle DZE = 60°$. Тогда ΔAEZ – равнобедренный, $AE = ZE$. Так как пятиугольник правильный, то $\angle AED = 108°$. Откуда следует: $\angle AEZ = 48°$,

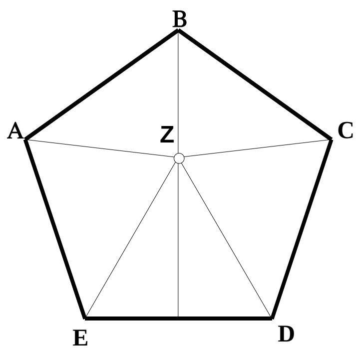


Рисунок 4.

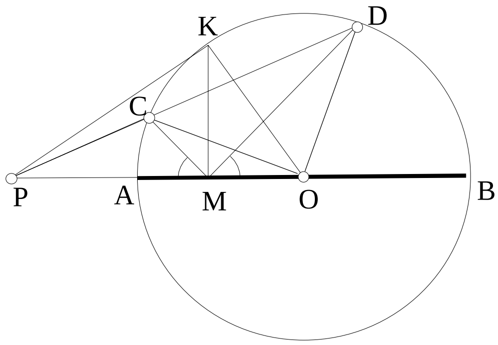


Рисунок 5.

$\angle EAZ = (180° - 48°) : 2 = 66°$, $\angle ZAB = 108° - 66° = 42°$, $\angle BZA = 84°$. Замечаем, что при движении точки Z по прямой BZ в направлении к точке B $\angle DZE$ непрерывно уменьшается, а $\angle BZA$ увеличивается. Поэтому $\angle DZE$ принимает значение 60° только один раз. При этом, $\angle BZA = \angle BZC = 84°$. По причине единственности решения угол DZE равен 60°. Тогда $\angle AZE = 66°$.

Предложим девятиклассникам построить динамическую модель к следующей задаче (рисунок 5). Пусть M – произвольная точка на диаметре AB окружности с центром O, C и D – точки окружности, расположенные с одной стороны от AB, причем $\angle CMA = \angle DMB$. Доказать, что $\angle CMD = \angle COD$.

Получив решение этой несложной задачи, не удовлетворимся им и построим подвижную модель. Переместим точку M и увидим, что и точка D конечно же переместится. Заметим при этом, что прямая CD пересекает в каждый момент движения прямую AB в неподвижной точке P. Продолжив эксперимент, замечаем, что касательная к окружности, проходящая через точку K, где $KM \perp AB$, также пересекает AB в точке P. Получаем новую задачу.

Задача 2.

Пусть C – произвольная точка окружности с диаметром AB, M ($M \neq O$) – фиксированная точка на диаметре, D – точка окружности, для которой $\angle DMB = \angle CMA$. Доказать, что точка P пересечения прямых AB и CD является неподвижной при изменении точки C, и прямая PK – касательная к окружности в точке K.

(Как-то, спустя некоторое время после обнаружения этого свойства, я нашел по сути такую же задачу в одном из номеров «Математики в школе», что несколько охладило мои амбиции первооткрывателя).

Полезным упражнением для девятиклассников является построение динамической модели и решение следующей задачи: найти прямоугольник наибольшей площади, который можно вписать в треугольник заданного периметра.

Модель (визуально всего лишь) выглядит так, как показано на рисунке 6.

Здесь периметр треугольника ABC задан постоянным и равен длине отрезка PQ. Если двигать вершину A, то будет изменяться и весь треугольник, а вместе с ним и вписанный прямоугольник. Максимум его площади будет достигаться, когда сторона MN станет средней линией треугольника. Доказательство простое, и приводить его здесь не будем. Главное, что интересует в этой «истории» – эвристическая деятельность учеников. С логической стороны нет никакой необходимости в эвристике – можно сразу же получить решение задачи после ее постановки в классе. Но насколько более содержательна предложенная работа! Уже само построение динамического рисунка (полагаю, естественно его так называть) чего стоит. Но главное впереди. Модель как бы приглашает к дальнейшим исследованиям ситуации – поиску пограничных задач. Почему бы не поставить следующий вопрос.

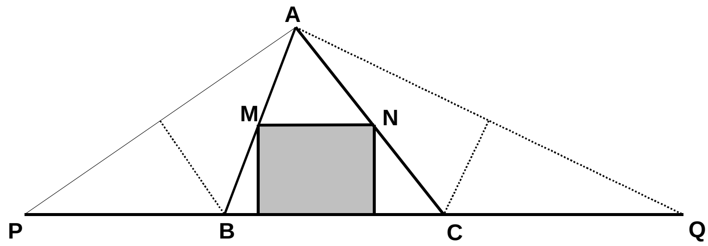


Рисунок 6.

Задача 3.

В треугольник с основанием a и высотой h вписать (поместить) два прямоугольника с наибольшей суммарной площадью.

Будем считать, что прямоугольники следует разместить, как показано на рисунке 7. Тогда эксперимент с динамической моделью показывает, что их максимальная общая площадь составляет 2/3 от площади треугольника ABC. Докажем это.

Пусть $AO \perp BC$, $BC = a$, $AQ = h$, $MN = x$, $HK = y$, $PH = t$. Тогда нетрудно вычислить $ME = h\left(1-\frac{x}{a}\right)$. Треугольник APQ подобен треугольнику ABC, откуда $\frac{AG}{AL} = \frac{PQ}{EF}$, $\frac{\frac{hx}{a}-t}{\frac{hx}{a}} = \frac{y}{x}$, $t = \frac{h(x-y)}{a}$. Сумма площадей двух прямоугольников вместе

$S = hx - \frac{h}{a}x^2 + \frac{h}{a}xy - \frac{h}{a}y^2$, откуда $hy^2 - hxy + {}$ $+ hx^2 - ahx + aS = 0$. Это квадратное уравнение относительно y. Оно имеет решение в случае неотрицательности дискриминанта $D = h^2x^2 - 4h^2x^2 + 4ah^2x - 4ahS =$ $= -3h^2x^2 + 4ah^2x - 4ahS \geq 0$. Последнее неравенство имеет решение, если дискриминант квадратного трехчлена неотрицателен, то есть $4a^2h^2 - 12ahS \geq 0$. Наибольшее значение S, при котором выполняется неравенство, равно $\frac{ah}{3}$, что составляет 2/3 площади треугольника.

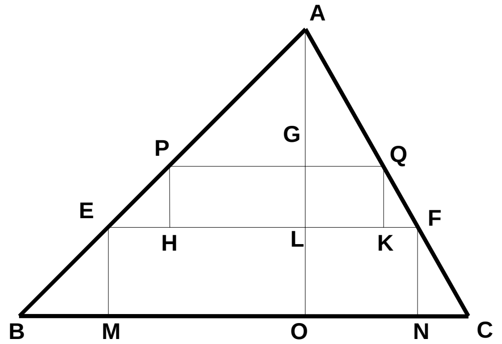


Рисунок 7.

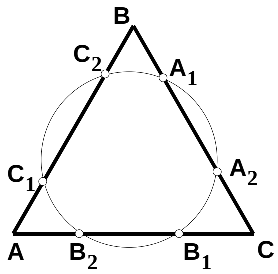


Рисунок 8.

Далее естественно поставить аналогичную задачу для трех вписанных прямоугольников. Подобным образом можно доказать, что максимум площади в этом случае составляет 3/4 от площади треугольника. Возникает гипотеза: максимум площади n вписанных в данный треугольник прямоугольников составляет $\frac{n}{n+1}$ от площади треугольника. Ее можно доказать методом математической индукции.

Обобщение – одна из основных мыслительных операций, и этому стоит учить детей.

Задача 4.

Окружность пересекает стороны равностороннего треугольника, как показано на рисунке 8. Доказать равенство $AB_2 + CA_2 + BC_2 = AC_1 + BA_1 + CB_1$.

Решение основано на том, что $AB_2 \cdot AB_1 = AC_1 \cdot AC_2$ (то же относится и к вершинам B и C).

Поставим перед учащимися вопрос: какую аналогичную задачу вы можете предложить? Они легко придут к следующей конфигурации (рисунок 9).

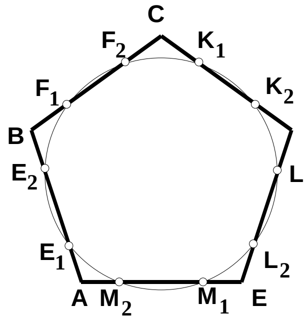


Рисунок 9.

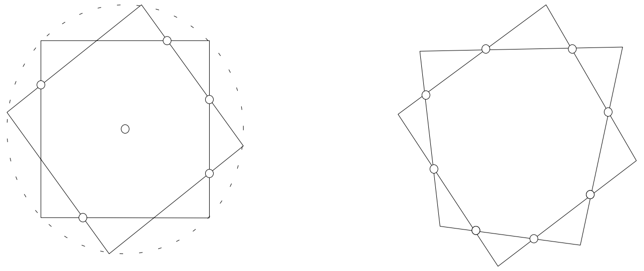


Рисунок 10.

После того, как получено решение для треугольника, несложно понять, что и для прозвольного правильного многоугольника имеет место аналогичное свойство.

Используя правильный пятиугольник, можно рассмотреть известную задачу: доказать, что сумма расстояний от любой точки правильного многоугольника до его сторон является постоянной величиной. На модели ученики проверяют этот факт. Потом ребятам предлагается найти неправильный пятиугольник, для которого также выполняется доказанное свойство. Построив динамическую модель пятиугольника с равными углами и с различными по длине сторонами, устанавливаем, что и для него имеет место указанное свойство. После решения предыдущей задачи несложно будет это доказать.

В № 6 журнала «Квант» за 1990 год была напечатана такая задача.

Если квадрат повернуть возле его центра на угол 45°, то полученный квадрат разделяет стороны первоначального в некотором отношении. Возмем теперь произвольный четырехугольник и разделим его стороны в том же отношении. Через точки деления проведем прямые, которые образуют новый четырехугольник (рисунок 10). Доказать, что площади этих четырехугольников равны.

Попробуем «динамизировать» данную в условии задачи конфигурацию, а именно, построим второй квадрат так, чтобы он мог поворачиваться на *произвольный* угол. Тогда при его вращении вокруг центра первого квадрата синхронно будет вращаться и соответствующий четырехугольник справа. Оказывается, что при этом его площадь остается неизменной (сам же он меняется согласно своему определению), равной площади первого четырехугольника. Так что имеем новую задачу. Аналогичный эксперимент можно провести и с пятиугольниками. Соответствующая конфигурация представлена на рисунке 11.

Здесь слева – правильные пятиугольники, справа – их «спутники» – один произвольный выпуклый пятиугольник, второй – его «порождение». Будут ли равны их площади? Может быть, эксперимент дает нам только приближенное равенство площадей? Ответ мне пока неизвестен.

Новые задачи с помощью программы GS, как мы видели, могут возникнуть в результате динамизации статических конфигураций. Рассмотрим еще пример задач-«двойников».

Рисунок 11.

Задача 5.

На сторонах правильного треугольника ABC отмечены точки C_1 и B_1 так, что $BC_1 = AB_1 = AB : 3$, M – точка пересечения отрезков BB_1 и CC_1. Найти угол AMC (рисунок 12).

Задача 6.

На сторонах правильного треугольника ABC отмечены точки B_1 и C_1 так, что $BC_1 = AB_1$ и угол

$AMC = 90°$, M – точка пересечения отрезков BB_1 и CC_1. Найти длину отрезка AB_1, если $AB = 6$ (рисунок 13).

Решение первой задачи получим, если заметим, что четырехугольник AB_1MC_1 вписан в окружность.

На рисунке 13 угол AMC отличен от прямого, но он изменится, если изменится положение точки B_1 на стороне AC. Изменяя это положение на модели, получим гипотезу $AB_1 = AC:3$. Доказательсво следует из утверждения в задаче 5 и из монотонности изменения угла AMC при движении точки B_1 в определенном направлении.

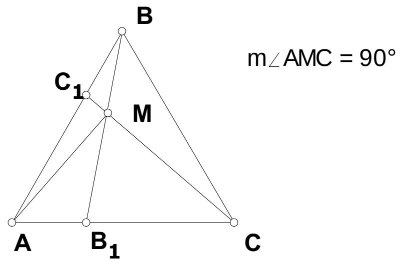
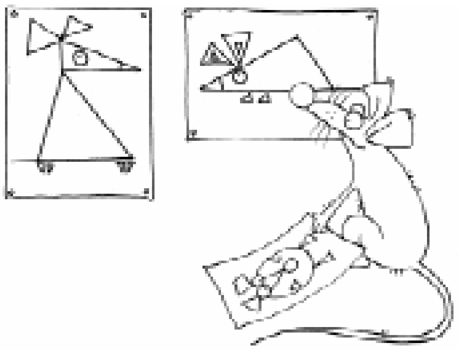


Рисунок 12.

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ



Кто-то из педагогов-математиков заметил, что в школьном курсе геометрии катастрофически не хватает задач прикладного значения. Программа GS ликвидирует этот дефицит в значительной мере. Например, как показать учащимся практический выход одной из важнейших геометрических тем – преобразования на плоскости? Стоит заняться паркетами (или мозаиками) – замощениями плоскости копиями равных многоугольников! Именно программа *The Geometer's Sketchpad* дает уникальные возможности для того, чтобы школьники погрузились в эту интереснейшую тему, которая имеет и практические приложения.

Начнем с постановки проблемы: какими правильными многоугольниками можно замостить плоскость. После того, как будет понят ответ на этот вопрос, поручим детям построить паркет из правильных шестиугольников. Полезное занятие: здесь и построение правильного шестиугольника (напомним, с помощью циркуля и линейки), и использование симметрии и параллельных переносов. Да и раскраска паркета – тоже немаловажное дело – геометрия должна быть эстетичной. Далее, поставим задачу: какими неправильными многоугольниками можно покрыть плоскость? Дети легко это делают с треугольниками, параллелограммами, трапециями... Затем переходим к произвольным четырехугольникам. Девятиклассники догадываются, как и в этом случае сделать паркет. Достаточно построить четырехугольник, симметричный данному (прозвольному!) относительно середины одной из сторон, а затем параллельными переносами «распространить» на всю плоскость.

Это подвижный паркет – потянув мышкой за одну из вершин первоначального четырехугольника, можем получить паркет какой угодно формы. Теперь перейдем к пятиугольникам. Здесь интереснейшая история. Ее мастерски излагает Мартин Гарднер в своих книгах по занимательной математике. Самую простую мозаику из пятиугольников, у которых сумма трех последовательных углов равна

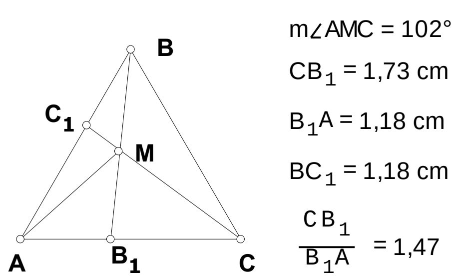


Рисунок 13.

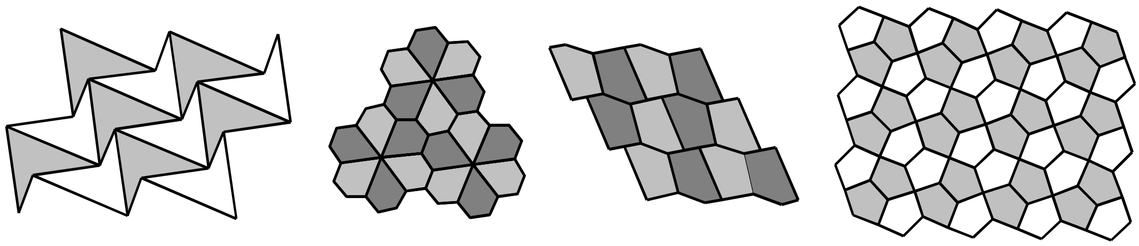


Рисунок 14.

360°, дети могут построить самостоятельно (рисунок 14).

А вот для получения двух других мозаик надо использовать еще и повороты плоскости. Если пятиугольник обозначить как *ABCDE*, *a*, *b*, *c*, *d*, *e* – длины его последовательных сторон, то у второго пятиугольника $A = 60°$, $C = 120°$, $a = b$, $c = d$. А у третьего пятиугольника все стороны равны. Построение таких паркетов – увлекательное и полезнейшее геометрическое занятие, которое развивает интуицию и эстетический вкус. Все они могут быть деформированы так, что и получатся, в частности, невыпуклые пятиугольники. Всего известно 14 типов паркетов из выпуклых пятиугольников. Учащихся можно познакомить и с принципами построения мозаик более сложной формы. Один из методов отражен на рисунке 15.

1. Строим параллелограмм *ABCD*.
2. На сторонах *AB* и *AD* построим произвольные ломаные.
3. Перенесем ломаную, построенную на стороне *AB*, на вектор *BC*.
4. Перенесем ломаную, построенную на стороне *AD*, на вектор *AB*.
5. Серией параллельных переносов заполняем плоскость.

И если у детей развито художественное воображение, то может получиться достаточно любопытная мозаика. Далее, по логике вещей, следует познакомить учащихся с математическим творчеством голландского художника Морица Эшера. Это будет достойным завершением темы.

Заметим, наконец, что построение паркетов на компьютере принципиально отличается от хаотических попыток ребенка сделать то же самое с материальными плитками. Попробуйте, например, такое (рисунок 16) сложить на компьютере! Это паркет из полиамондов Пенроуза – английского математика. Каждая из плиток состоит из правильных треугольников. По-разному ориентированные 12 полиамондов образуют фраг-

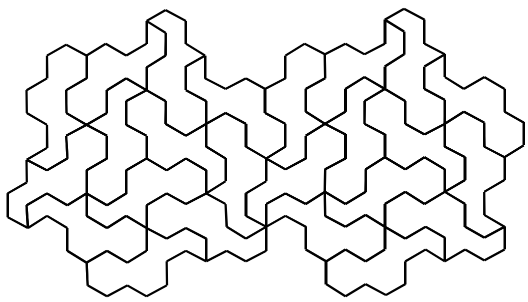


Рисунок 16.

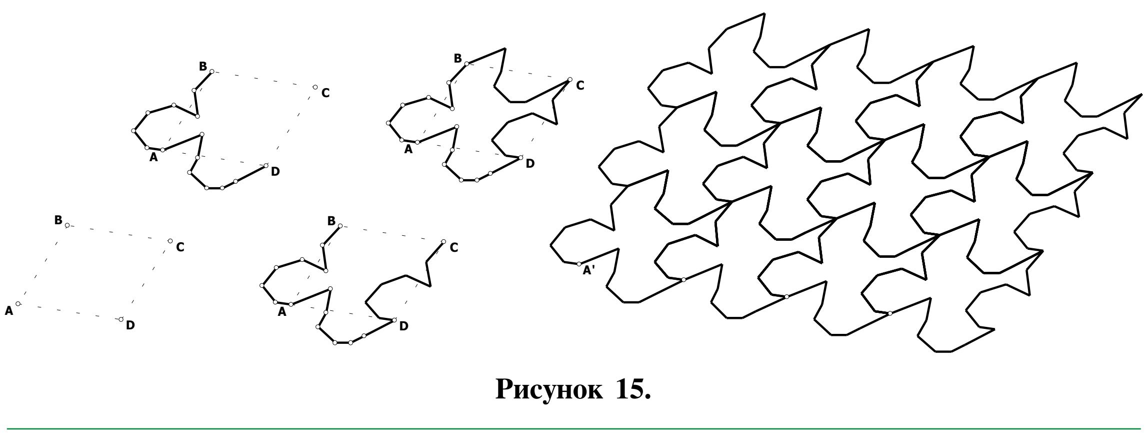
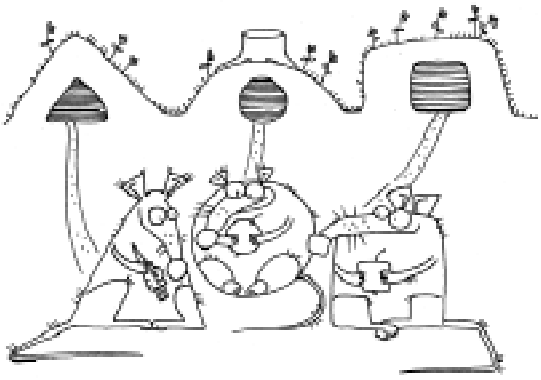


Рисунок 15.

мент, которым параллельными переносами можно покрыть плоскость.

4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА



Задачи на геометрические места точек решать с помощью программы GS также увлекательно. Здесь, кстати, есть хорошая возможность ввести параболу, гиперболу и эллипс в геометрический контекст, то есть рассмотреть их так, как сложилось еще со времен Архимеда.

Построим, к примеру, гиперболу как геометрическое место точек P плоскости, модуль разности расстояний которых до двух данных точек F_1 и F_2 есть величина постоянная. На рисунке 17 $|PF_1 - PF_2| = |PF_1 - PM| = F_1M$. Это значит, что если заставить точку M двигаться по окружности, то точка P будет описывать гиперболу. Для этого в программе служит команда *animation*, выполнив которую, увидим, что при движении точки M точка P оставляет след – гиперболу.

Построение эллипса выполняется аналогично. На рисунке 18 точка X определена так, что $AX = MX$. Тогда, если точка M будет двигаться по окружности постоянного радиуса с центром B, то сумма расстояний $AX + BX$ не изменяется. А это и означает, что точка X опишет эллипс.

Технология построения параболы также сходна с рассмотренной. Аналогично можно построить окружность Аполония и много других геометрических мест. В программе GS легко продемонстрировать световое свойство параболы, рассказав при этом детям легенду об Архимеде, который поджег неприятельские корабли с помощью параболического зеркала.

Соответствующий рисунок 19 выглядит так. Здесь: $MN \parallel OF$, AM – касательная к параболе, F – ее фокус. Если вывести на монитор величины углов, заметим, что $\angle AMF = \angle KMN$. Значит, луч света, выходящий из точки F, отразившись от параболической поверхности, пойдет параллельно оси параболы.

Это свойство можно доказать в десятом классе с помощью производной.

Наша программа – превосходный инструмент для построения геометрических мест точек. Его можно использовать и здесь двояко: либо как эвристическое средство для получения гипотез и дальнейших вариаций задачи, либо как графопостроитель для визуальной демонстрации свойств, задающих ГМТ. Рассмотрим известную задачу.

Задача 7.

Точка A – фиксированная вершина прямоугольника $AMXN$ – лежит внутри заданной окружности (рисунок 20), вершина M – переменная точка окружности. Найти геометрическое место вершин X прямоугольника.

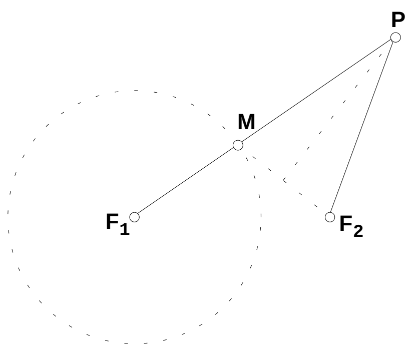


Рисунок 17.

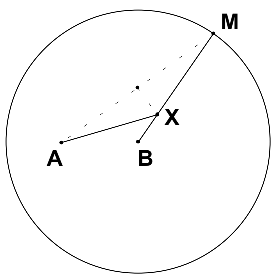


Рисунок 18.

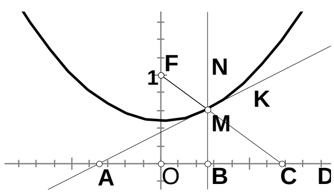


Рисунок 19.

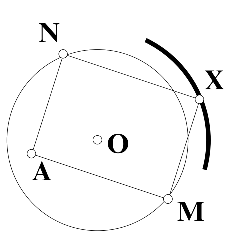


Рисунок 20.

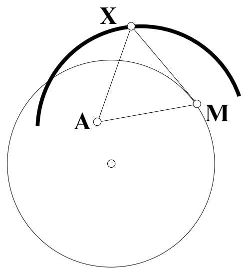


Рисунок 21.

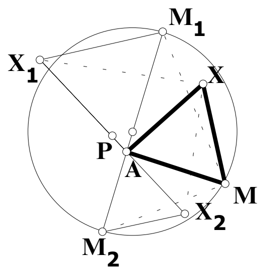


Рисунок 22.

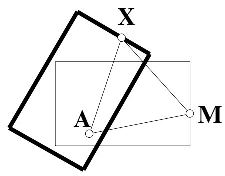


Рисунок 23.

Утверждение задачи следует из известного факта: $OX^2 + OA^2 = OM^2 + ON^2$.

Следовательно, точка X при изменении точки M будет двигаться по окружности с центром O и радиусом $\sqrt{2R^2 - OA^2}$, где R – радиус данной окружности. Эксперимент на модели подтверждает это. Однако пойдем дальше: возьмем вместо прямоугольника правильный треугольник и решим аналогичную задачу.

Пусть точка A – фиксированная вершина правильного треугольника AMX (рисунок 21), M – переменная точка данной окружности. Найти геометрическое место точек X.

Эксперимент показывает, что искомое ГМТ – также окружность, однако она не концентрична данной окружности. Докажем это.

Рассмотрим диаметр M_1M_2 данной окружности, проходящий через точку A, и два равносторонних треугольника AM_1X_1 и AM_2X_2 (как показано на рисунке 22). Тогда точки A, X_1 и X_2 лежат на одной прямой. Пусть P – середина отрезка X_1X_2. Рассмотрим поворот на 60° против часовой стрелки вокруг точки A. Тогда прямая M_2M перейдет в прямую X_2X, а прямая MM_1 – в прямую XX_1, так как угол M_2MM_1 – прямой, то и угол X_2XX_1 будет прямым. Это означает, что из переменной точки X фиксированный отрезок X_1X_2 виден под прямым углом, следовательно точка X принадлежит окружности с центром P и радиусом PX_1, равным радиусу данной окружности.

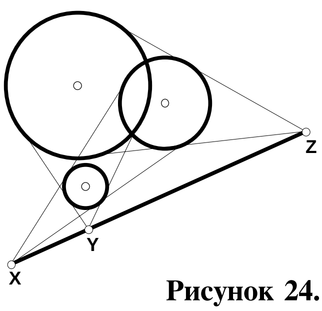
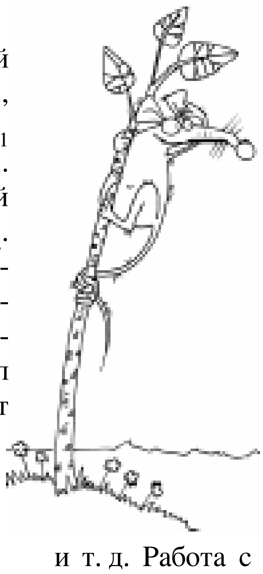


Рисунок 24.

А что если, вместо слова «окружность» в условии предыдущей задачи, вставить слово «прямоугольник»? То есть заставить одну вершину правильного треугольника двигаться по периметру прямоугольника (рисунок 23). Теперь искомым ГМТ будет равный исходному прямоугольник, полученный из него поворотом на 60° вокруг точки A.

5. РАСШИРЕНИЕ КРУГОЗОРА



Учитель, благодаря программе GS, имеет прекрасную возможность познакомить учеников с многими жемчужинами постевклидовой геометрии, такими, как теорема Дезарга, теорема Паскаля, окружность девяти точек, теорема Чевы, инверсор Поселье-Гарта, треугольники Шварца и Наполеона, педальный треугольник, теорема о бабочке и т. д. Работа с этими темами может выглядеть, как «побочный продукт» в контексте обязательного курса планиметрии. Например, предложим девятиклассникам построить общие касательные к трем парам окружностей (рисунок 24). Выпол-

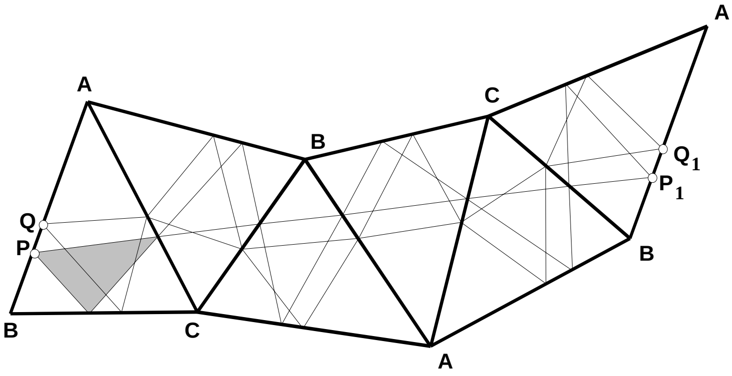


Рисунок 25.

нив это полезное само по себе задание, ученики заметят удивительное свойство: три пары касательных пересекаются в точках, которые принадлежат одной прямой (теорема Монжа из проективной геометрии). И ничего, что дети еще не готовы для понимания доказательства теоремы. Зато они получат еще один пример геометрической гармонии на евклидовой плоскости. Кстати, в десятом классе при изучении курса стереометрии можно рассмотреть доказательство, основанное на пространственной интерпретации теоремы Монжа.

Предложим учащимся и такую задачу: найти треугольник наименьшего периметра, вписанный в данный остроугольный треугольник. Подвижная модель и эксперименты с ней (вспомним – программа GS дает возможность находить площадь построенного треугольника) приводят к гипотезе: вершины искомого треугольника совпадают с основаниями высот данного треугольника. Найти доказательство самостоятельно девятиклассникам обычно не под силу. В таком случае предложим им после некоторой эвристической мотивации выполнить композицию нескольких симметрий относительно сторон данного треугольника и его образов (рисунок 25). Придем к следующей конфигурации, с помощью которой немецкий математик Шварц доказал экстремальность площади высотного треугольника. В этом легко убедиться и на модели и чисто дедуктивно. Любопытно, что аналогичная задача для вписанного четырехугольника решается с помощью схожего построения.

А вот как выглядит рисунок к динамической модели теоремы Дезарга. Это обычный рисунок на листе бумаги, но на мониторе компьютера он оживает. Двигая различные точки, убеждаемся в истинности теоремы. Вместе с тем, выбранный ракурс склоняет мысль к пространственной интерпретации. Как только мы увидели плоскости, которым принадлежат треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ (рисунок 26), так сразу же поймем, почему точки P, Q, R лежат на одной прямой.

Работая в программе GS, трудно обойти такую тему как инверсия. Познакомив детей с ее определением и выполнив с ним ряд вводных упражнений, поставим задачу: построить модель, позволяющую создавать образы фигур при инверсии с заданным центром и радиусом. На рисунке 27 компьютер вычертил замкнутую кривую, являющуюся образом данного четырехугольника.

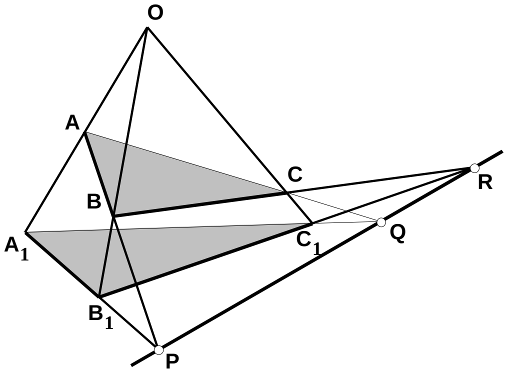


Рисунок 26.

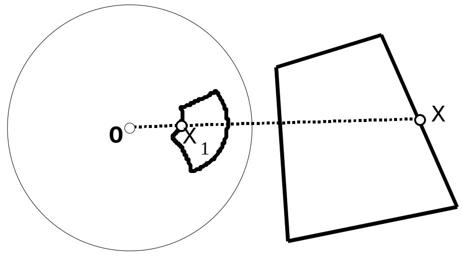


Рисунок 27.

6. ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО ГЕОМЕТРИИ

Программа по динамической геометрии открывает неограниченные возможности для проведения интереснейших лабораторно-исследовательских работ на школьном уровне. Каждую из рассмотренных выше задач или их серии можно оформить в виде лабораторного эксперимента с последующим (или предшествующим доказательством). Полезнейшей работой, к примеру, при изучении курса стереометрии является построение динамических моделей сечений многогранников. На полученных рисунках сечения могут поворачиваться, двигаться самостоятельно, изменяя при этом свою форму.

Программа *The Geometer's Sketchpad* – великолепный педагогический инструмент для учителя математики.

Этот материал об использовании компьютера при изучении геометрии не дает полного представления о возможностях динамизации геометрических объектов. За рамками статьи остались сюжеты, связанные с построениями на плоскости, инвариантами, шарнирными многоугольниками, геометрической интерпретацией алгебраических задач и многое другое. Автор имеет значительные наработки в виде компьютерных файлов (около 5 Мб), где вживую развертываются плодотворные идеи динамизации, и готов поделиться более специального рода опытом.

От редакции: демонстрационную версию среды The Geometer's Sketchpad, которая является по существу ограниченно-рабочей (не позволяет сохранять и распечатывать результаты работы), можно получить в Интернет от ее издателя: http://www.keypress.com/sketchpad/sketchdemo.html

Русифицированная версия The Geometer's Sketchpad под названием «Живая геометрия» распространяется Московским Институтом новых технологий: http://www.int-edu.ru, тел.: (095) 926-49-65.

Храповицкий Иван Сергеевич,
учитель математики
на углубленном уровне средней школы №3 г.Глубокое, Беларусь.