Черкасова Полина Геннадьевна

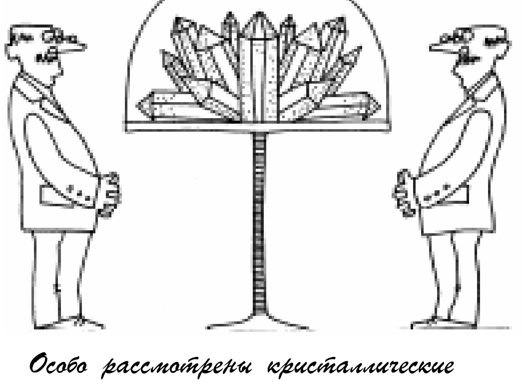
СИММЕТРИЯ И КРИСТАЛЛЫ

В этой статье мы расскажем о симметрии, о способах ее определения и задания для пространственных фигур, вообще, и для многогранников, в частности.

Особо рассмотрены кристаллические многогранники и их симметрия. К статье прилагается программа, которая позволяет построить все 44 кристаллических многогранника на основе их элементов симметрии. Программа позволяет изменять параметры многогранника и наглядно демонстрирует как сам многогранник, так и его элементы симметрии.

Симметрия в самом общем своем смысле подразумевает наличие в объектах или явлениях чего-либо неизменного или инвариантного по отношению к некоторым преобразованиям. Здесь мы рассмотрим точечную симметрию, то есть симметрию отдельных фигур конечных размеров.

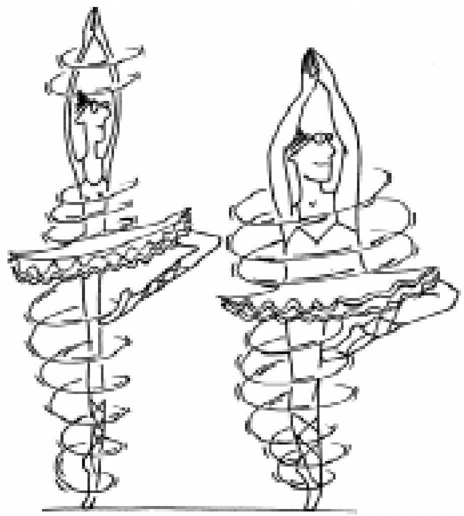
Симметричность фигуры можно охарактеризовать набором элементов симметрии. Каждый элемент симметрии – это некое движение в пространстве. Говорят, что фигура обладает элементом симметрии, если соответствующее движение совмещает эту фигуру с собой. Например, куб совмещается сам с собой при повороте пространства на 180 градусов вокруг его центра в любом направлении.



Особо рассмотрены кристаллические многогранники и их симметрия.

Элементы симметрии бывают двух видов: поворотные оси и зеркальные оси.

Говорят, что фигура обладает поворотной осью порядка n, если фигура совмещается сама с собой при повороте пространства вокруг этой оси на долю окружности, равную $1/n$. Любая фигура обладает бесконечным числом поворотных осей первого порядка, так как совмещается сама с собой при повороте в любом направлении на 360 градусов. Поэтому мы назовем такие оси тривиальными и не будем их в дальнейшем рассматривать.



Любая фигура... совмещается сама с собой при повороте в любом направлении на 360 градусов.

Правильная четырехугольная пирамида обладает поворотными осями второго и четвертого порядков. Ось цилиндра является для цилиндра поворотной осью всех порядков от нуля до бесконечности. А в шаре любая прямая, проведенная через его центр, становится осью симметрии любого порядка.

Будем говорить, что две оси имеют общую прямую, если они отличаются не более чем порядком.

Введем еще два понятия. Возьмем элемент симметрии и фигуру. Произведем в пространстве движение, которое соответствует элементу симметрии. В результате получим еще одну фигуру – копию первой, только в другом месте пространства. Будем таким образом размножать фигуры, пока они не перестанут появляться – на каком-то шаге они начнут просто переходить друг в друга. Если мы возьмем пересечение всех этих фигур, то получим результат шлифовки фигуры элементом симметрии. А если возьмем объединение, то получим результат умножения фигуры элементом симметрии.

Если ось симметрии степени бесконечность проходит через центр куба перпендикулярно двум его граням, то в результате шлифовки кубика получим маленький цилиндр, а в результате умножения – большой цилиндр.

Вопрос к читателю: что получится, если ось провести вдоль главной диагонали куба? А если произвольным образом через центр?

Еще один вид элементов симметрии – зеркальные оси. Их называют также инверсионными. Говорят, что фигура обладает зеркальной осью порядка n, если она переходит в себя после поворота на соответствующую долю окружности и последующей инверсии, то есть отражения в плоскости, перпендикулярной данной оси и проходящей, как правило, через центр фигуры.

Например, правильный тетраэдр обладает множеством элементов симметрии, в том числе инверсионной осью второго порядка, проходящей через середины его противоположных граней.

Зеркальная ось первого порядка – это просто отражение пространства в плоскости, перпендикулярной этой оси, а зеркальная ось второго порядка – центральная симметрия фигуры.

Обозначим поворотные оси символами a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_∞, а зеркальные – символами b_1, b_2, b_3, b_4, ..., b_∞, где индексы обозначают порядок оси.

Произведением двух движений называется их последовательное применение. Понятно, что произведение двух движений – тоже движение. Но произведение двух элементов симметрии в общем случае не является элементом симметрии. Если мы повернем пространство на половину окружности, а потом на треть окружности, то получим поворот на 5/6 окружности. Не существует элемента симметрии, которому соответствовало бы такое движение пространства.

Вопрос к читателю: произведение каких двух нетривиальных различных элементов симметрии дает элемент симметрии?

Если поворотную ось порядка n возвести в n-ную степень (умножить на себя n раз), получим тождественное преобразование – поворотную ось первого порядка. То есть $a_n^{\,n} = e$.

Вопрос к читателю: в какую степень нужно возвести зеркальную ось порядка n, чтобы получить тождественное преобразование?

Несмотря на то, что произведение элементов симметрии не является элементом симметрии, элементы симметрии могут порождать друг друга. Действительно, если фигура обладает поворотными осями второго и третьего порядков с общей прямой, то она обладает поворотной осью шестого порядка, и наоборот.

Если некий набор элементов симметрии фигуры порождает все остальные, то такой набор называется порождающим семейством элементов симметрии или просто порождающим семейством симметрии. У фигуры их может быть несколько. Например, семейства $< b_3 >$ и $< a_3, b_1 >$ порождают один и тот же набор элементов симметрии.

Если порождающее семейство содержит поворотную и инверсионную ось одного и того же порядка с общей прямой, то инверсионную ось можно заменить плос-

...что такая фигура называется асимметричной.

костью отражения b_1. При этом семейство останется порождающим. Проверьте.

Интересно, что у принципиально различных фигур может быть одно и то же порождающее семейство симметрии. Например, у n-угольной призмы и n-угольной пирамиды все элементы симметрии совпадают.

Если для фигуры операция отождествления есть единственное симметричное преобразование, то такая фигура называется асимметричной.

Для определения операций симметрии комбинации тел существует принцип симметрии Кюри, согласно которому комбинация тел наследует элементы симметрии, которые являются общими для всех тел данного набора. То есть, проще говоря, берется пересечение элементов симметрии всех тел.

Продемонстрируем этот принцип на примере различного взаимного расположения сферы и цилиндра. Для начала найдем порождающее семейство для каждого из тел по отдельности. Цилиндр обладает всеми возможными простыми и инверсионными осями, расположенными на его оси, элементами a_2 и b_2, проходящими ортогонально оси цилиндра через его центр во всех направлениях, всеми плоскостями отражения (b_1), содержащими его ось, и одной плоскостью отражения, перпендикулярной ей и проходящей через центр. А для сферы это просто все возможные оси, проходящие через ее центр, без ограничения на направление (включая плоскости симметрии, которые, как было сказано выше, являются инверсионными осями симметрии первого порядка).

Рассмотрим три варианта взаимного расположения этих двух тел (рис. 1*а*, *б*, *в*). В случае *а*), когда центры цилиндра и сферы совпадают, все элементы симметрии цилиндра являются общими для обоих тел, поэтому группа симметрии их комбинации просто совпадает с группой симметрии цилиндра. В случае *б*), когда ось цилиндра проходит через центр сферы, комбинация наследует только простые оси цилиндра и содержащие ось цилиндра плоскости отражения. А в самом общем случае *в*) остается только одна плоскость отражения, содержащая центр сферы и ось цилиндра.

Пока мы рассматривали здесь в основном симметрию тел вращения. А каким набором элементов симметрии могут обладать многогранники? Существуют ли какие-либо ограничения? Безусловно. Например, многогранник никак не может обладать группой симметрии сферы. Очевидно, что все оси симметрии многогранника должны проходить через одну общую точку – его центр. Исключением являются разве что только оси первого порядка.

Вопрос к читателю: существуют ли фигуры, элементы симметрии которых имеют порядок больше единицы и не пересекаются?

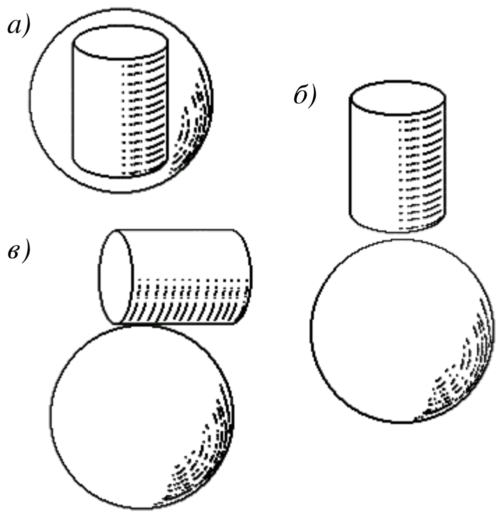


Рисунок 1

Предположим, нам дано семейство элементов симметрии. Может ли оно быть порождающим семейством для многогранника? Попробуем построить подходящий многогранник.

Возьмем любую плоскость – начальную грань будущего многогранника – и поместим ее «вблизи» центра, через который проходят все данные нам элементы симметрии. Далее начнем размножать эту грань элементами симметрии. Плоскость будет отражаться и поворачиваться всеми возможными способами, которые предоставляет ей данное порождающее семейство. Завершится ли когда-нибудь этот процесс? Может быть, и завершится. Тогда мы получим конечное число плоскостей, которые при действии на них элементов симметрии будут просто переходить друг в друга. Будут ли они при этом ограничивать многогранник? Возможно, и будут. Тогда нам повезло. На самом деле в результате может получиться пара параллельных плоскостей, двугранный угол или цилиндрическая или коническая поверхность над правильным многоугольником. В случае, если данный процесс не завершится, мы получим бесконечное число плоскостей, ограничивающих тело вращения прямой, ломаной или окружности.

В результате такого процесса пространство разбивается образовавшимся множеством плоскостей на несколько компонент связности. Выберем ту из них, которая содержит центр (то есть множество пересечений всех элементов симметрии – точка, либо прямая). Таким образом, каждой паре «семейство симметрии – плоскость» мы можем сопоставить фигуру в пространстве.

Возьмем поворотные оси симметрии пятого и третьего порядков с общей прямой. В результате размножения плоскость повернется на все доли окружности вида $m/3 + n/5$, то есть на все пятнадцатые доли. В зависимости от выбора начальной грани, мы получим коническую поверхность над правильным пятнадцатиугольником (другими словами, пятнадцатиугольную пирамиду), цилиндрическую поверхность над ним же (то есть призму) или полупространство.

Среди групп симметрии конечных фигур особое место занимают кристаллографические группы симметрии, то есть группы симметрии кристаллов. Кристаллические многогранники имеют в качестве элементов симметрии только простые и инверсионные оси второго, третьего, четвертого и шестого порядков в том или ином сочетании. Остальные оси для них являются запрещенными, так как существование этих осей в кристалле несовместимо с представлением о кристаллической решетке. При этом порождающие семейства можно подобрать так, что инверсионные оси будут только первого порядка.

Общее число кристаллографических групп симметрии равно 32. Они порождают 44 многогранника (в зависимости от выбора начальной грани, порождающее семейство может образовывать тот или иной многогранник). Однако нужно заметить, что здесь страдает определение многогранника как ограниченной фигуры, – в число 44 входят также призмы (7 шт.) и пирамиды (7 шт.), не ограниченные «снизу» и «сверху».

Все кристаллографические группы разделены на 7 сингоний, каждой из которых сопоставлена некая своя кристаллографическая группа симметрии. Каждый кристалл сингонии обладает подмножеством элементов симметрии сингонии.

Следует отметить, что первые две сингонии (триклинная и моноклинная) многогранников не порождают по причине «скудности» своих групп.

Разработана программа, которая демонстрирует все существующие кристаллографические многогранники. Для построения многогранников входными данными служит описание порождающего семейства для каждой сингонии и описание его подмножества вместе с начальной гранью для каждого многогранника.

Размножая эту грань всеми операциями симметрии данного порождающего семейства, программа получает множе-

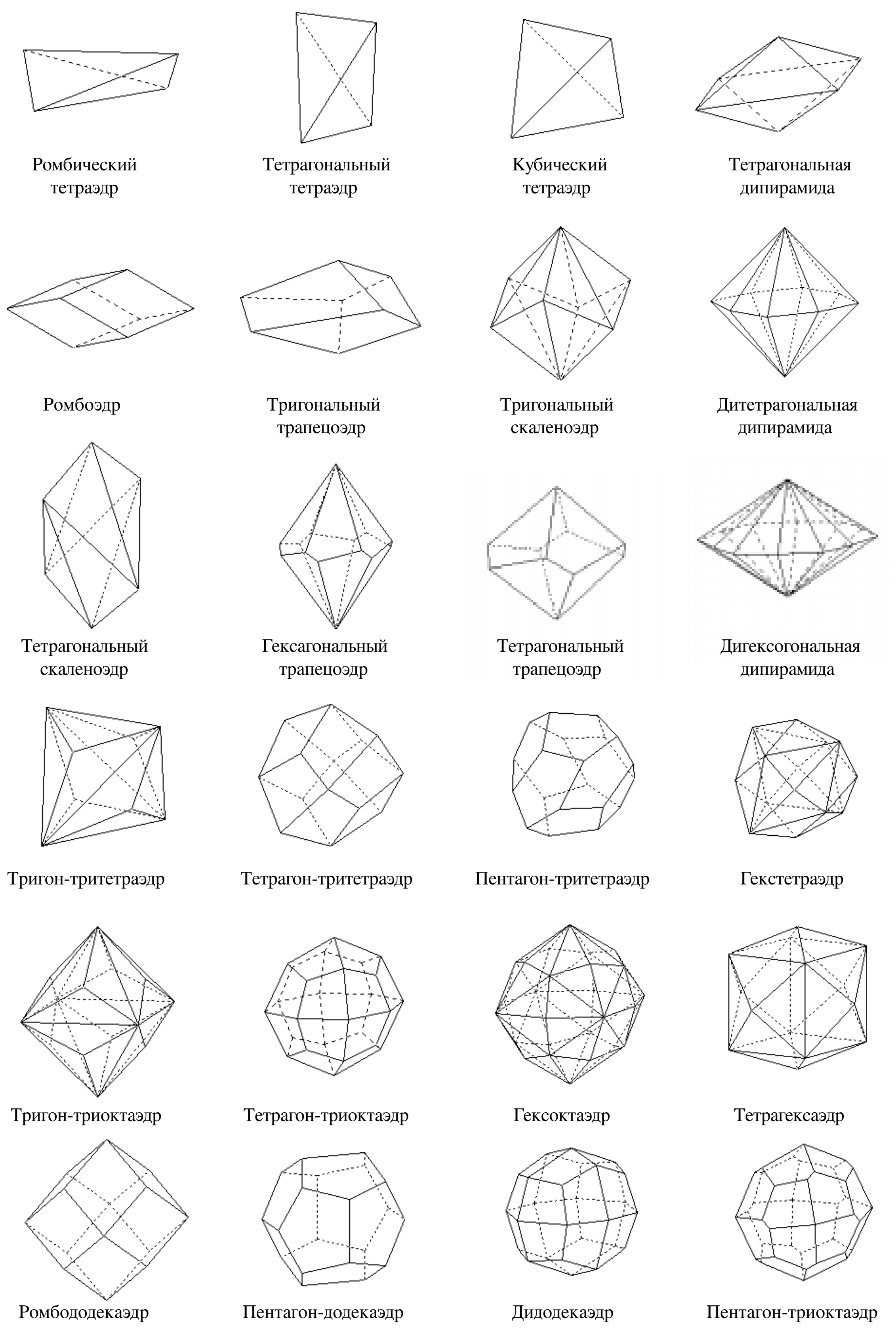


Рисунок 2. Некоторые кристаллографические многогранники

ство всех граней данного многогранника в виде нормалей к их плоскостям. Дело в том, что любой порожденный группой симметрии многогранник является описанным, так как все его грани получаются в результате поворота одной из них – начальной, и, следовательно, расстояние от центра до всех граней одинаково. Поэтому для однозначного задания граней достаточно только нормалей к ним.

Далее за время порядка n^4 (где n – количество граней) программа находит все вершины и ребра многогранника по следующему алгоритму: происходит перебор всех троек плоскостей, для каждой из которых находится точка их пересечения (если таковая вообще имеется), и происходит проверка ее принадлежности многограннику. Точка принадлежит многограннику, если она лежит по ту же сторону от каждой плоскости, что и центр многогранника, или принадлежит плоскости. Все «хорошие» точки отбираются, и те из них, которые имеют две общие грани, связываются ребрами. Далее, идет определение видимых и невидимых граней – в зависимости от направления их нормалей.

Программа выводит изображение на экран, позволяя его вращать в различных направлениях. Пользователь может посмотреть все элементы симметрии данного многогранника. Программа позволяет изменить нормаль к начальной грани и увидеть, как при этом изменится многогранник. Ниже приведены изображения некоторых полученных в результате работы программы кристаллических многогранников.

Интересно поэкспериментировать с заданием начальной грани. Дело в том, что для некоторых многогранников выбор начальной грани ограничен. Часто она должна быть перпендикулярна или параллельна какой-нибудь оси симметрии. Например, начальная грань куба должна быть перпендикулярна одной из осей симметрии. То есть ее нормаль должна иметь координаты вида (n, 0, 0) в системе координат, где координатные оси совпадают с осями симметрии кубической сингонии. В некоторых многогранниках две координаты начальной грани должны совпадать, то есть иметь вид (n, n, m).

Можно взять один из многогранников кубической сингонии с начальной гранью общего вида (m, n, k) и постепенно изменить взаимные пропорции координат, приближая их к пропорциям начальной грани куба. Возьмите гекстетраэдр и посмотрите последовательно начальные грани (1, 2, 3), (10, 2, 3), (100, 2, 3), (1000, 2, 3), (10000, 2, 3). Вы увидите, как гекстетраэдр постепенно вырождается в куб.

Во время экспериментов с координатами учтите, что в сингониях с кратностью, равный трем (гексагональная и тригональная), координатные оси расположены не перпендикулярно друг другу, а под углом 120 градусов.

На рисунке 2 изображены некоторые кристаллографические многогранники.

Черкасова Полина Геннадьевна, разработчик программного обеспечения, магистр математики, Microsoft Certificated Professional.