Гейнц Шуман

ИЗУЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ СРЕДСТВАМИ КОМПЬЮТЕРНОЙ ГРАФИКИ

ВВЕДЕНИЕ

Каким требованиям должен удовлетворять компьютерный инструмент, используемый в преподавании стереометрии? Он должен:

– обеспечивать возможность обращаться с геометрическим телом так, как будто держишьего в руке;

– позволять непосредственно изменять размеры и положение тела;

– предоставлять выбор разных способов представления тела;

– позволить перейти от чисто визуального восприятия изображенного на экране тела к его «осязанию»;

– использоваться в качестве инструмента для измерения самого тела и его частей;

– использоваться в качестве средства конструирования новых тел путем разбиения, соединения, вращения, деформации или вписывания одних тел в другие.

Программа KOERPERGEOMETRIE (Bauer и др., 1999), созданная под Windows, в значительной степени удовлетворяет вышеуказанным требованиям и поэтому может использоваться

– для развития и тренировки пространственного воображения,

– экспериментирования и изобретательства (открытие новых геометрических фактов, создание новых тел и т. д.),

– поддержки творческой деятельности (например, работа с открытыми задачами).

Далее мы покажем на примере ряда геометрических тел, как реализуются упомянутые возможности программы KOERPERGEOMETRIE в преподавании стереометрии. Работу с пространственными объектами можно рассматривать с двух точек зрения – инструментальной и теоретической. Первая из них (визуализация, представление, измерение, конструирование объектов) образует индуктивный базис для последующего обоснования и доказательства наблюдаемых свойств или вывода формул. В то же время она позволяет конкретизировать и делать наглядными общие теоретические положения. Из-за недостатка места мы ограничимся чисто инструментальной точкой зрения. К тому же одна из преследуемых нами целей – научить ученика и учителя работать с компьютером. Может быть, чтение данной статьи побудит читателя приобрести собственный опыт работы в новой графической среде. По нашему мнению, овладение основными принципами работы в такой богатой возможностями среде повышает компетентность учителя.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ТЕЛА В КОМПЬЮТЕРНОЙ ГРАФИКЕ

Предварительные замечания.

Для рассмотрения выбран 12-гранник, грани которого являются конгруэнтными ромбами. Такой многоугольник привлекателен с эстетической точки зрения и к тому же предоставляет разнообразные возможности для исследования.

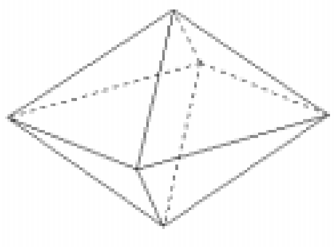


Рисунок 1

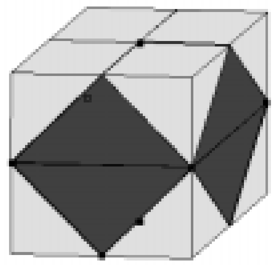


Рисунок 2

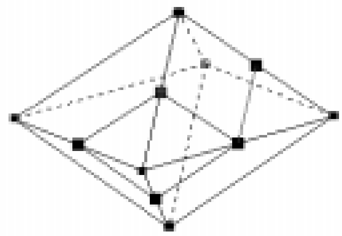


Рисунок 3

Данная тема относится к программе по геометрии 9/10 класса.

Средства печати, к сожалению, плохо приспособлены для адекватного отражения всего процесса и результатов работы с компьютерным инструментом.

Построение геометрических тел.

Мы исходим из «двойной» пирамиды, составленной из двух одинаковых четырехугольных пирамид, высоты которых равны половине стороны основания (рисунок 1). Эту пирамиду можно вырезать из кубика (рисунок 2) или построить в среде KOERPERGEOMETRIE.

На рисунках 3, 4, 5 показано, как из такой пирамиды можно вырезать тело, гранями которого являются ромбы. На рисунке 5 показана также развертка граней, состоящая из 12-ти конгруэнтных ромбов (Почему они конгруэнтны? Чему равно отношение их диагоналей?). Этот 12-гранник имеет 24 ребра и 14 вершин.

Построенное тело называется ромбододекаэдр (Rhombic Dodecahedron – в англоязычной литературе).

Визуализация.

Теперь нужно сделать ромбододекаэдр «осязаемым». Для этого его развертка, построенная автоматически или вручную, выводится на печать, затем вырезается и из нее складывается ромбододекаэдр. Модель закрепляется, например, скотчем. Одна из граней может служить «окошком», через которое можно заглянуть внутрь ромбододекаэдра.

С помощью мыши можно менять положение ромбододекаэдра, ставя его на вершины 3- и 4-гранных углов, на ребра, на грани (рисунки 6–9). Его можно повернуть так, что его проекция на экран будет выглядеть, как квадрат или правильный 6-угольник. На рисунке 10 показана раскрашенная модель. Раскраска помогает при построении модели вручную. На рисунке 11 имитировано освещение модели, а на рисунке 12 изображено тело в перспективном изображении. Дальнейшие возможности визуализации продемонстрированы на рисунках 13–14, на которых показаны проекции тела на три взаимно перпендикулярные плоскости.

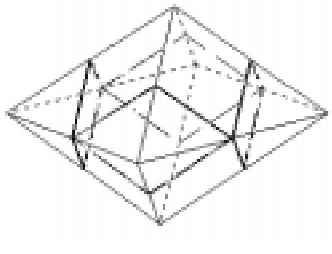


Рисунок 4

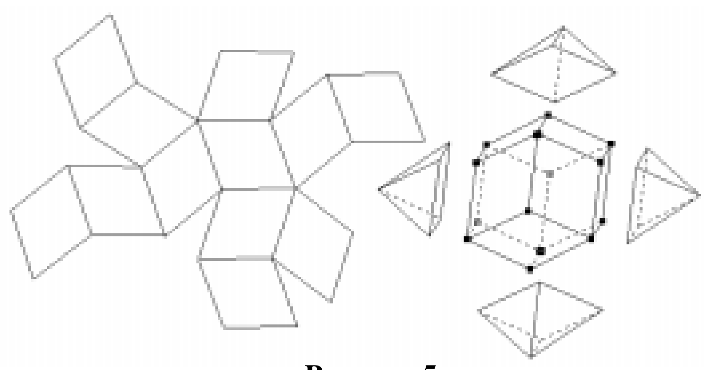


Рисунок 5

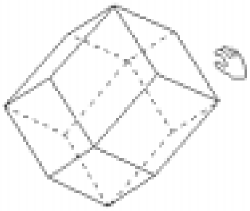


Рисунок 6

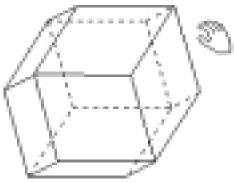


Рисунок 7

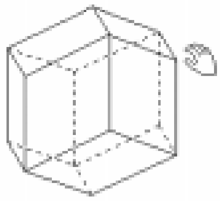


Рисунок 8

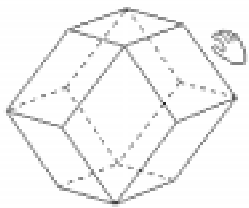


Рисунок 9

РАСЧЕТ И ИЗМЕРЕНИЕ

В данном теле имеются 2- , 3- и 4-гранные углы. Плоские углы при вершинах 4-гранных углов – острые, их можно измерить непосредственно. Результат измерения – 70,5^o (Чему равно точное значение?). Каждое ребро соединяет один 3-гранный угол с четырьмя 4-гранными углами. Множество всех ребер состоит из четырех подмножеств, по 6 параллельных ребер в каждом. Измерение показывает, что грани пересекаются под углом 120^o (рисунок 16, а обоснование?). При движении мыши вдоль тела высвечиваются длины ребер и площади граней. При длине ребра в 2 единицы программа KOERPERGEOMETRIE дает для объема тела и площади его поверхности значения 24,4 и 45,0 соответствующих единиц. (Каковы формулы, выражающие зависимость объема ромбододекаэдра и площади его поверхности от длины ребра?).

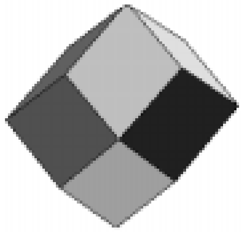


Рисунок 10

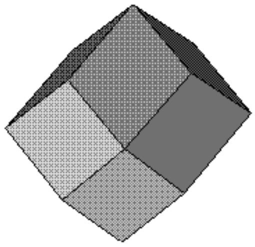


Рисунок 11

ПОСТРОЕНИЕ ОБЪЕКТОВ ВНУТРИ ТЕЛА И НА НЕМ

Проведем сначала диагонали внутри тела. Из вершины 4-гранного угла выходят 5 диагоналей, из которых 4 равны друг другу (рисунок 17), а из вершины 3-гранного угла – 7 диагоналей, из которых 3 пары одинаковых (рисунок 18). Всего 43 диагонали, их можно разбить на 4 подгруппы, объединяя в одну подгруппу диагонали одинаковой длины. Какие из диагоналей являются осями симметрии? Диагонали, соединяющие диаметрально противоположные углы, показаны на рисунке 19. Вокруг ромбододекаэдра нельзя описать сферу, так как расстояние между диаметрально противоположными 3-гранными углами короче, чем

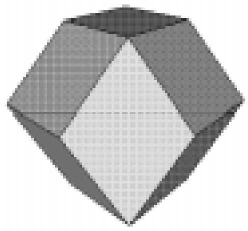


Рисунок 12

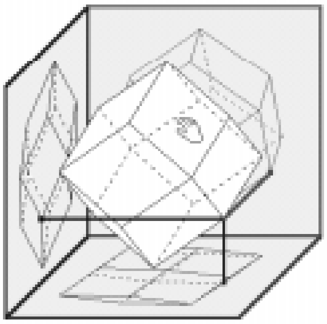


Рисунок 13

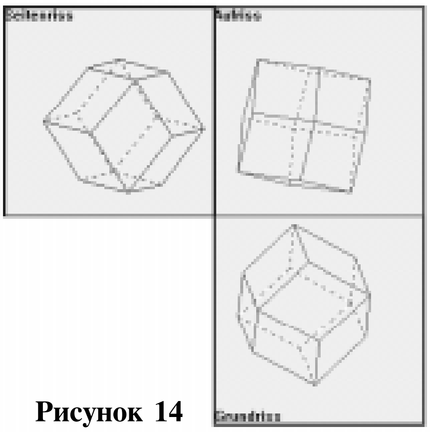
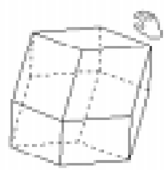


Рисунок 14



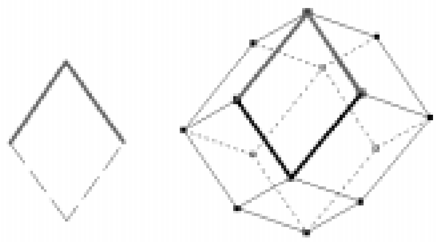


Рисунок 15

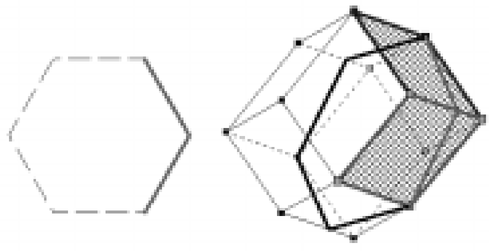


Рисунок 16

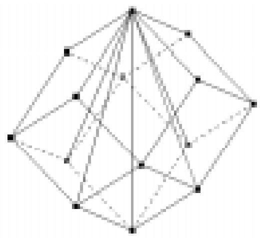


Рисунок 17

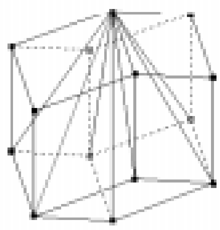


Рисунок 18

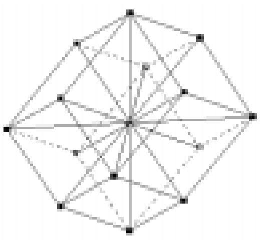


Рисунок 19

между такими же 4-гранными углами. Проверим, можно ли вписать в ромбододекаэдр сферу. Для этого соединим середины противоположных граней (рисунок 20), измерим длины этих отрезков и проверим, перпендикулярны ли они соответствующим граням (рисунок 21). Оказывается, вписанная сфера существует, но построить ее средствами KOERPERGEOMETRIE невозможно.

Какие плоскости и сколько их можно провести через диагонали ромбододекаэдра? Какие из них являются плоскостями симметрии, то есть делят тело на зеркально симметричные части? Рисунок 22 дает пример отсутствия зеркальной симметрии. На рисунке 23 поверхность разрезана на две симметричные части. Какие многоугольники получаются при сечении поверхности плоскостями, проходящими через диагонали?

Рассмотрим теперь сечения ромбододекаэдра. Например, сечение плоскостью, проходящей через соответствующие вершины (рисунок 24), является квадратом, в чем можно убедиться, повернув многогранник так, чтобы сечение стало параллельно экрану. Если секущую плоскость перенести параллельно самой себе так, чтобы она проходила через середины ребер(рисунок 25), то сечение принимает форму правильного восьмиугольника. Проводя сечение через три другие точки (рисунок 26), получаем правильный треугольник. Параллельный перенос приводит к правильному шестиугольнику (рисунок 27), а затем к осесимметричному равностороннему девятиугольнику (рисунок 28). Существует ли сечение с еще большим числом вершин?

ВПИСЫВАНИЕ И РАЗВЕРТКА

Какие тела можно вписать в ромбододекаэдр? Например, можно вписать кубик (рисунок 29).

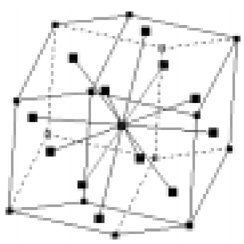


Рисунок 20

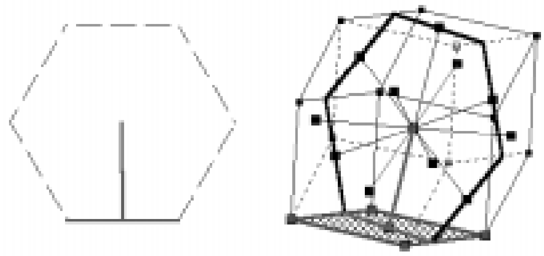


Рисунок 21

Рисунок 18

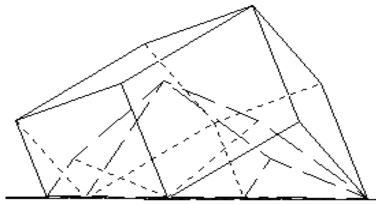


Рисунок 22

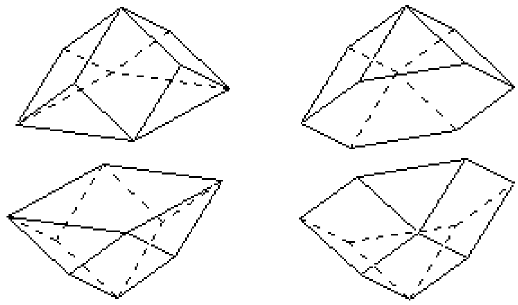


Рисунок 23

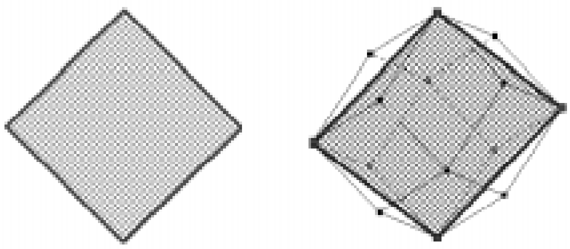


Рисунок 24

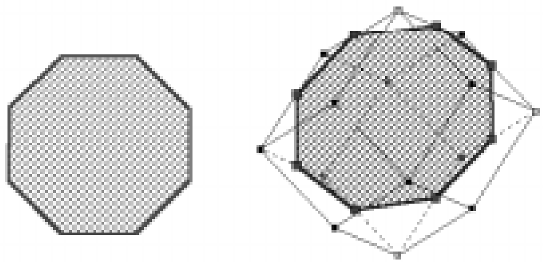


Рисунок 25

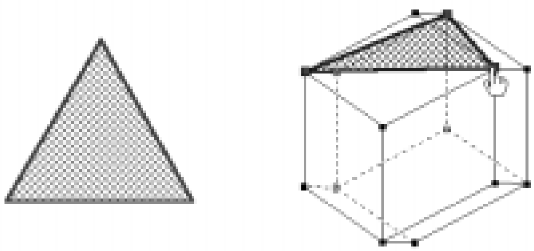


Рисунок 26

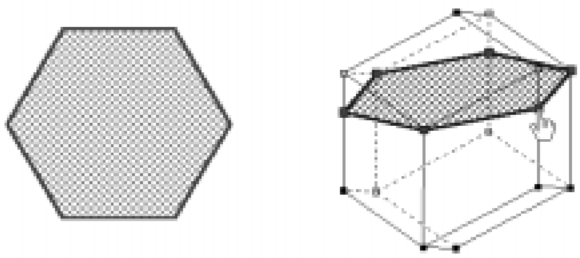


Рисунок 27

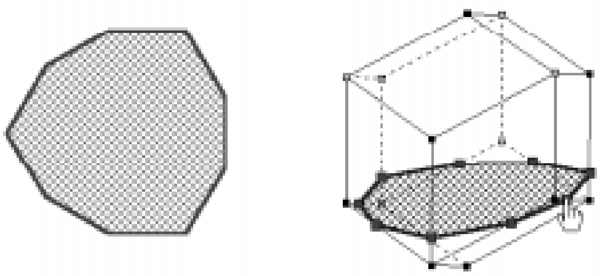


Рисунок 28

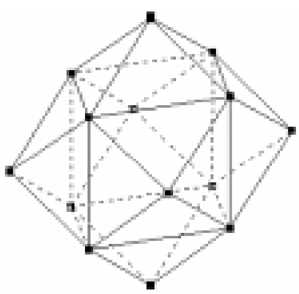


Рисунок 29

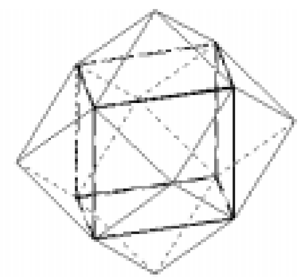


Рисунок 30

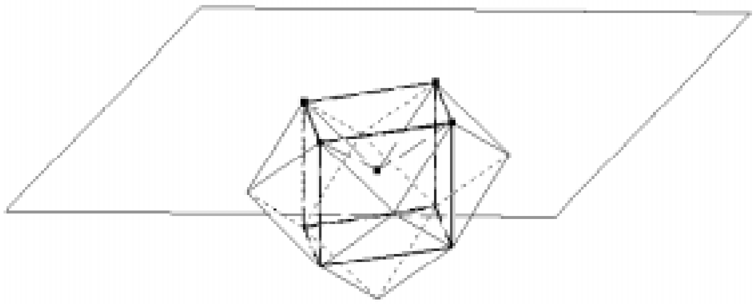


Рисунок 31

Чему равна длина его ребра? Рисунок 30 показывает, какие сечения вырезают кубик. Симметричность кубика определяет характер симметрии сечений так же, как симметрия двойной пирамиды порождает свойства симметрии ромбододекаэдра. Наш додекаэдр можно представлять как результат соединения шести четырехугольных пирамид, высота которых равна половине высоты кубика. Это можно представить еще и так: вершина пирамиды зеркально отражается относительно плоскости сечения, и отраженная вершина попадает в центр кубика (рисунок 31).

Рисунок 32 показывает каркас кубика и его разбиение на части. На рисунке 33 шесть пирамид соединяются в один кубик. Объем додекаэдра равен удвоенному объему кубика. (Головоломка: в кубике, составленном из 8 таких кубиков должны поместиться 4 додекаэдра. Как это выглядит? Подсказка: 3 додекаэдра нужно расположить так, как показано на рисунке 34.) Кроме того, сюда могут быть вписаны: правильный октаэдр (рисунок 35, «оболочка» и каркас), правильный тетраэдр (рисунок 36), кубоктаэдр (рисунок 37). Вписав один правильный тетраэдр в другой, получим «звездный» многогранник, называемый STELLA OCTANGULA (восьмиугольная звезда), который не может быть получен в KORPERGEOMETRIE, так как эта программа поддерживает создание лишь выпуклых тел. Дополнительно мы рассматриваем разложение ромбододекаэдра на 4 конгруэнтных параллелепипеда с ромбами в качестве граней (рисунок 38), из которых один показан на рисунке 39. Наконец, срезая вершины шести четырехгранных углов по серединам ребер, получаем так называемый ромбокубооктаэдр (рисунки 40, 41, 42).

Как зависят длины ребер, высоты, объемы и площади поверхностей этих тел от длины ребра ромбододекаэдра?

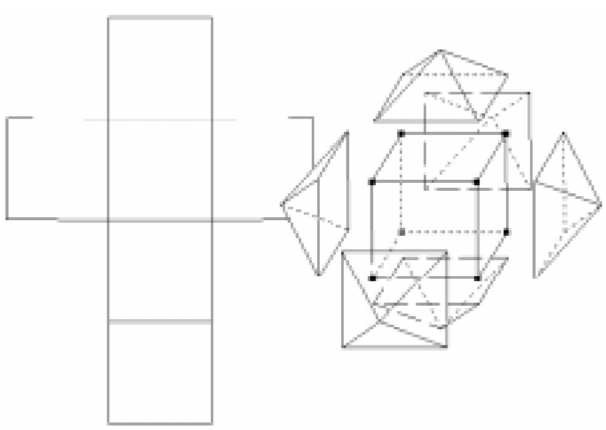


Рисунок 32

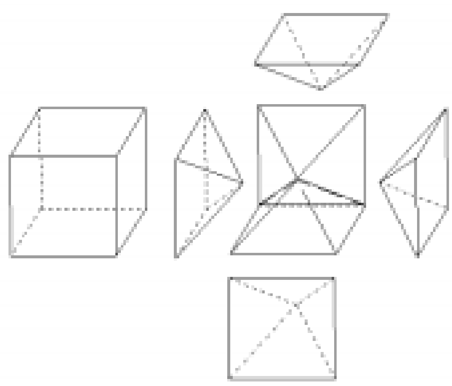


Рисунок 33

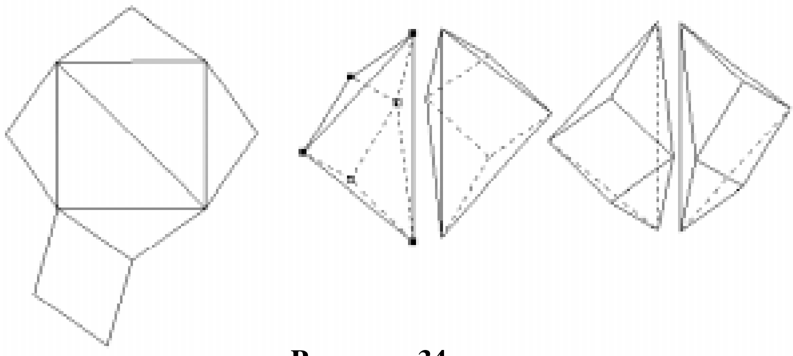


Рисунок 34

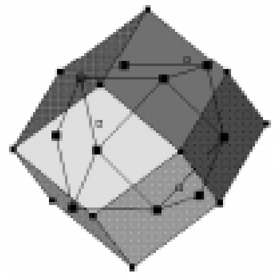


Рисунок 37

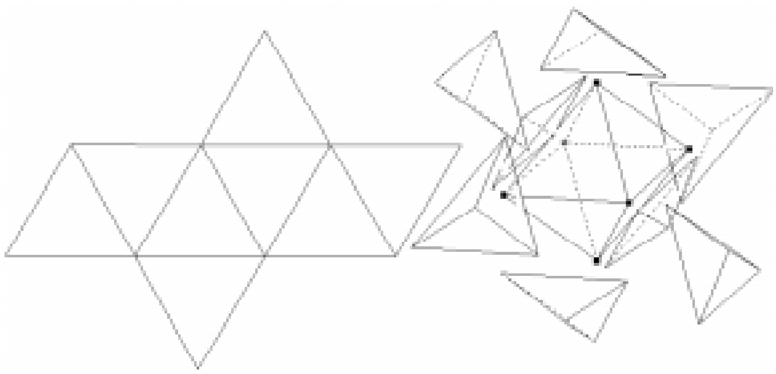


Рисунок 35

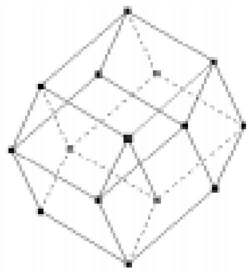


Рисунок 38

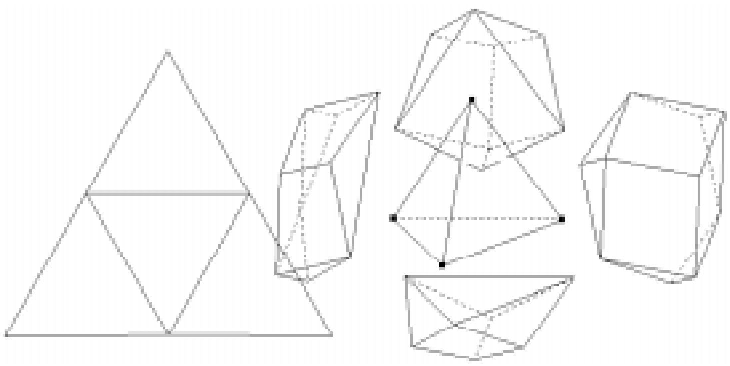


Рисунок 36

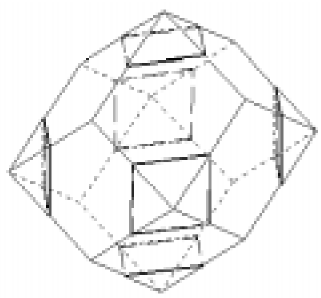


Рисунок 40

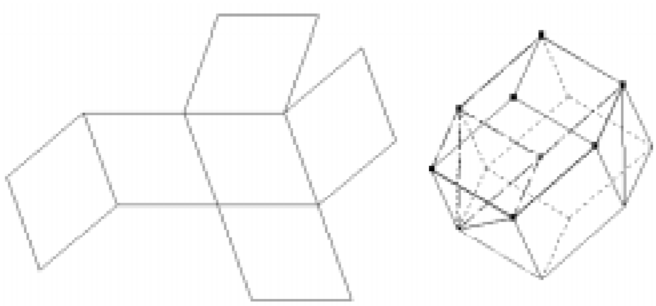


Рисунок 39

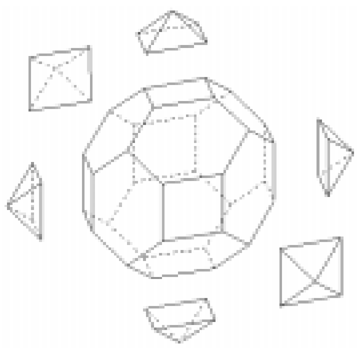


Рисунок 41

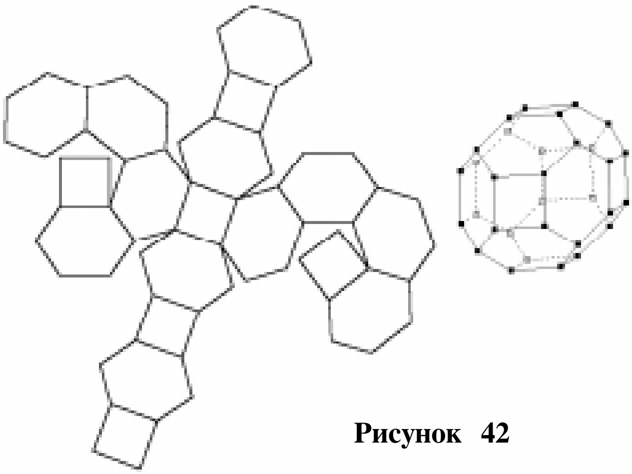


Рисунок 42

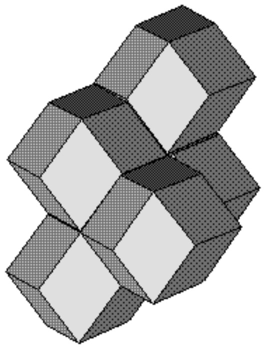


Рисунок 44

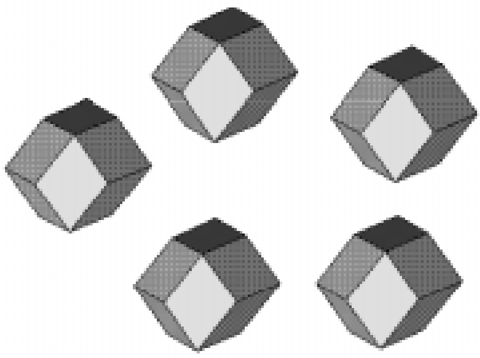


Рисунок 43

ПРИСОЕДИНЕНИЕ И ЗАПОЛНЕНИЕ

Присоединяя ромбододекаэдры друг к другу, можно заполнить пространство без пустот. Для иллюстрации соединим пять таких додекаэдров (рисунки 43 и 44). Вопрос для любителей: какие различные, то есть неконгруэнтные пространственные формы можно получить, соединяя подходящим образом 3, 4, ... конгруэнтных ромбододекаэдра?

Решения показаны на рисунке 45 (см. также http://www.johnrausch.com/PuzzlingWorld/chap18b.htm). Кристаллы такой формы встречаются в природе, например, Rhodochrosit (Magnesiumcarbonat) или гранат.

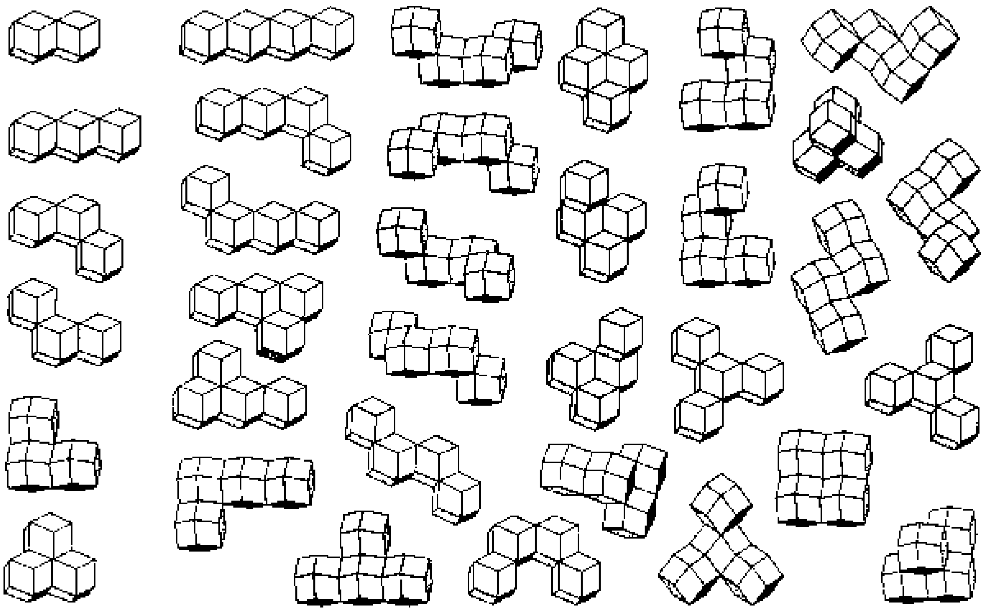


Рисунок 45

Перспектива.

Экскурсия в мир ромбододекаэдра может быть продолжена в двух направлениях. Существуют ли еще какие-нибудь двенадцатигранники, кроме ромбододекаэдра и правильного пентагондодекаэдра? Какие еще тела, кроме ромбопараллелепипеда, можно сотавить из конгруэнтных ромбов? Для частичных ответов на эти вопросы мы используем Интернет.

По ключевому слову «dodecahedra» программа Fireball находит 722 страницы (состояние на июль 2001) и как раз первые десять из них принадлежат специалисту по многогранникам Георгу Харту (George W. Hart) (http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/dodecahedra.html). В них содержится интересующая нас информация. Можно также воспользоваться поисковой программой самого Харта: http://www.georgehart.com/search.html).

Литература.

1. Bauer, H., Freiberger, U., Kuhlewind, G. Schumann, H. (1999): KORPER-GEOMETRIE (Software mit Manual). Berlin Cornelsen.

2. Schumann, H.(2000): Computerunterstutztes Losen offener raumgeometrischer.

3. Aufgaben. In: ZDM Zentralblatt fьr Didaktik der Mathematik Nr. 6.

4. Schumann, H.(2001): Raumgeometrie, Unterricht mit Computerwerkzeugen. Berlin. Cornelsen.

Heinz Schumann,
Prof. Dr. habil, Fakultat III,
Mathematik/Informatik,
Institur fur Bildungsinformatik
University of Education (PH),
Weingarten, Germany.

Перевод М.И. Юдовина.