Златопольский Дмитрий Михайлович

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ ТАБЛИЦ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

В числе множества задач, решаемых с помощью электронных таблиц, находятся и задачи решения уравнений различных типов. По мнению автора, обучение использованию электронных таблиц для решения уравнений и ряда других задач алгоритмического характера[1], является компромиссным направлением в «алгоритмической» и «пользовательской» линиях в изучении информатики.

В статье рассмотрена методика решения трех типов уравнений:

1) линейных – вида $ax + b = 0$;

2) квадратных – вида $ax^2 + bx + c = 0$;

3) трансцендентных – методом деления отрезка пополам[2].

В качестве инструмента для решения применяется программа Microsoft Excel.

1. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВИДА $ax + b = 0$

Значения коэффициентов a и b будем вводить, соответственно, в ячейки B2 и B3, а сообщения, указывающие об этом, запишем в ячейки A2 и A3 (таблица 1). В ячейке B4 будем выводить информацию о том, имеет ли заданное пользователем уравнение корень или нет, и в случае положительного ответа значение корня укажем в ячейке D4.

Формулы должны иметь вид:

в ячейке B4:

=ЕСЛИ(B2=0; "Нет";"Есть");

в ячейке C4:

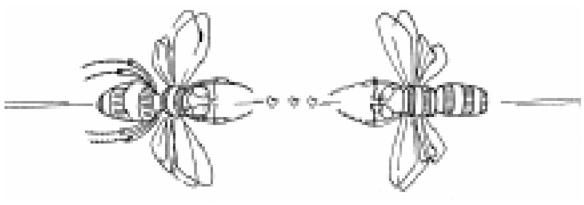
=ЕСЛИ(B3><0;"Его значение";"")[3];

а в ячейке D4:

=ЕСЛИ(B3><0;–B4/B3;"").

Вид фрагмента листа для двух возможных случаев приведен в таблицах 2–3.

Очевидно, что при представленном оформлении листа в ячейке B4 сообщение «Нет» будет выводиться даже в случае, когда коэффициент a вообще не задан, что не совсем корректно. Чтобы устранить этот недостаток, можно использо-



Решение линейных уравнений...

Таблица 1

	A	B	C	D
1	**Решение линейных уравнений**			
2	Введите значение коэффициента a -->			
3	Введите значение коэффициента b -->			
4	Есть ли корень?		Его значение	
5				

[1] Под задачами алгоритмического характера подразумеваются задачи, для решения которых необходимо выполнить *однозначно определенную последовательность* действий.

[2] Такой метод называют также методом половинного деления, методом дихотомии или методом бисекции.

[3] Учащихся следует ознакомить с оформлением «неполного» варианта функции ЕСЛИ, когда при одном из двух возможных результатов логического выражения значение в ячейке отсутствует.

Таблица 2

	A	B	C	D
1	**Решение линейных уравнений**			
2	Введите значение коэффициента a -->	0		
3	Введите значение коэффициента b -->	34		
4	Есть ли корень?	Нет		
5				

Таблица 3

	A	B	C	D
1	**Решение линейных уравнений**			
2	Введите значение коэффициента a -->	3		
3	Введите значение коэффициента b -->	–4		
4	Есть ли корень?	Есть	Его значение	1,333333
5				

вать функцию ЕПУСТО(), возвращающую значение ИСТИНА, если в ячейке, адрес которой указан в качестве аргумента функции в скобках, значение отсутствует.

С использованием указанной функции формулы в ячейках A4, B4, C4 и D4 будут иметь вид (соответственно):

=ЕСЛИ(ЕПУСТО(B2);"";"Есть ли корень?"),
=ЕСЛИ(ЕПУСТО(B2);"";ЕСЛИ(B2=0;"Нет";"Есть")),
=ЕСЛИ(ЕПУСТО(B2);"";ЕСЛИ(B2><0;"Его значение»;"")),
=ЕСЛИ(ЕПУСТО(B2);"";ЕСЛИ(B2><0;-B3/B2;"")).

Решение квадратных уравнений...

2. РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ ВИДА $ax^2 + bx + c = 0$

Здесь значения коэффициентов *a*, *b* и *c* будем задавать соответственно в ячейках B2, B3 и B4, а сообщения, указывающие об этом, запишем в ячейки A2, A3, A4 (таблица 4). В ячейке B5 будем выводить информацию о том, имеет ли заданное пользователем уравнение корень или

Таблица 4

	A	B	C	D
1	**Решение квадратных уравнений**			
2	Введите значение коэффициента a -->			
3	Введите значение коэффициента b -->			
4	Введите значение коэффициента c -->			
5	Есть ли корень?		Значение первого корня:	
6			Значение второго корня:	
7				

нет, и в случае положительного ответа значения корней укажем в ячейках D5 и D6.

Очевидно, что для решения квадратного уравнения следует вычислять его дискриминант. Однако значение дискриминанта уравнения является вспомогательным и для пользователя может быть скрыто, например, выведено за пределы страницы, оформлено белым цветом и т.п. В статье рассмотрим вариант размещения значения дискриминанта за пределами страницы в ячейке M3. Формула для его расчета следующая:

=B3*B3-4*B2*B4,

а формулы в ячейках B5, C5, C6, D5 и D6, соответственно:

=ЕСЛИ(M3<0;"Нет";"Есть"),
=ЕСЛИ(M3>=0;"Значение первого корня:";""),
=ЕСЛИ(M3>=0;"Значение второго корня:";""),
=ЕСЛИ(M3>=0;(-B4+КОРЕНЬ(M3))/(2*B2);""),
=ЕСЛИ(M3>=0;(-B4-КОРЕНЬ(M3))/(2*B2);"").

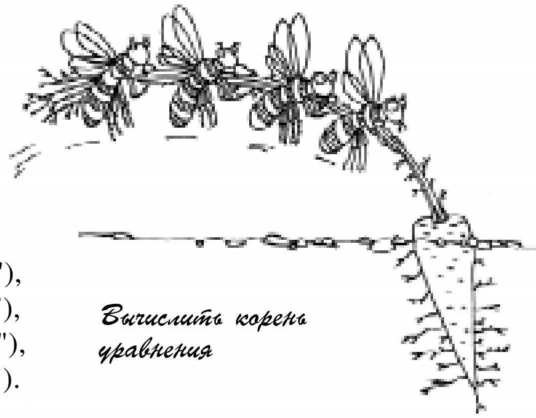
Примечание. Предложите ученикам разработать вариант оформления листа, использующий функцию ЕПУСТО() (см. выше).

3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ДЕЛЕНИЯ ОТРЕЗКА ПОПОЛАМ

Напомним суть метода [1], который, конечно же, следует предварительно обсудить с учащимися.

Пусть требуется найти корень уравнения $f(x)=0$, где $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция и $f(a) * f(b) < 0$. Тогда f обязательно имеет корень на указанном отрезке. Возьмем середину отрезка $c = (a + b)/2$ в качестве приближенного значения корня. Настоящий корень отличается от c не более чем на половину длины отрезка, то есть не более чем на $(b – a)/2$. Если такая точность нас не устраивает, то можно от отрезка $[a, b]$ перейти к одной из его половин: либо к $[a, c]$, либо к $[c, b]$, а именно к той из них, где находится искомый корень:

Решение уравнения методом деления отрезка пополам



Вычислить корень уравнения

если $f(a) * f(c) < 0$, то корень на отрезке $[a, c]$;

если $f(a) * f(c) > 0$, то корень на отрезке $[c, b]$.

Так как длина нового отрезка вдвое меньше старого, то, взяв в качестве приближенного значения корня середину нового отрезка, мы получим корень с точностью $(b – a)/4$. Если и эта точность нас не устраивает, можно поделить пополам новый отрезок и т. д.

Таким образом, мы можем делить отрезок пополам и переходить к одной из его половин, пока длина отрезка не станет достаточно малой, а потом в качестве корня взять середину отрезка.

Использование метода деления отрезка пополам для нахождения корня уравнения с помощью электронных таблиц проиллюстрируем на следующем примере: вычислить корень уравнения $cos(x) = x$ на отрезке [0, 2] с точностью 0,001.

Исходные значения границ отрезка a и b запишем в ячейки A4 и B4 (таблица 5). В ячейке C4 получим середину заданного отрезка c, а в ячейках D4 и E4 – значения функции $f(x)$ на концах отрезка

Таблица 5

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Решение уравнения методом деления отрезка пополам**									
2										
3	a	b	c	f(a)	f(c)	Длина	Значение корня		Точность	0,001
4	0	2	1	1	-0,4597	2				
5										

(очевидно, что $f(x) = cos(x) - x$). В ячейке F4 будем определять длину отрезка [a, b]. Формулы в ячейках C4, D4, E4 и F4 имеют вид, соответственно:

=(A4+B4)/2,
=COS(A4)-A4,
=COS(C4)-C4,
=B4-A4.

Необходимую точность вычислений укажем, например, в ячейке J3. После этого мы можем провести проверку длины заданного отрезка на соответствие принятой точности. Для поиска корня уравнения используем колонку G. В ячейке G4 запишем формулу:

=ЕСЛИ(F4/2<J3;C4;"")

(если длина отрезка соответствует требуемой точности, то в качестве корня принимаем середину этого отрезка).

В строке 5 запишем значения, полученные после первого шага деления исходного отрезка пополам. В соответствии с рассуждениями о возможных переходах от «старого» отрезка к одной из его половин, сделанных чуть выше, можем записать следующие формулы:

в ячейку A5:

=ЕСЛИ(D4*E4<0;A4;C4),

в ячейку B5:

=ЕСЛИ(D4*E4>0;B4;C4).

В ячейки C5, D5, E5, F5 и G5 формулы можно скопировать из ячеек C4, D4, E4, F4 и G4[4], соответственно.

После этого наш лист примет вид, как в таблице 6.

Таким образом, искомый корень уравнения находится на отрезке [0,1].

Скопировав все формулы из ячеек строки 5 в строку 6, мы проведем еще одно деление отрезка пополам (таблица 7).

Возникает вопрос: а сколько раз надо копировать строки с формулами, для того чтобы получить решение уравнения?

Здесь можно поступить по-разному. Можно копировать формулы в одну (очередную) строку до тех пор, пока в столбце G не появится искомое значение корня. А можно число шагов определить за-

Таблица 6

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Решение уравнения методом деления отрезка пополам**									
2										
3	a	b	c	f(a)	f(c)	Длина	Значение корня		Точность	0,001
4	0	2	1	1	-0,4597	2				
5	0	1	0,5	1	0,3776	1				
6										

[4] Для того чтобы при копировании формулы из ячейки G4 имеющийся в ней адрес ячейки J3 не менялся, следует использовать абсолютную или смешанную ссылку на него, то есть формула в ячейке G4 должна быть уточнена: =ЕСЛИ(F4/2<J$3;C4;"")

Таблица 7

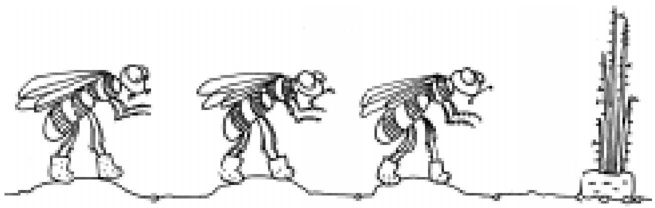
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Решение уравнения методом деления отрезка пополам**									
2										
3	a	b	c	f(a)	f(c)	Длина	Значение корня		Точность	0,001
4	0	2	1	1	-0,4597	2				
5	0	1	0,5	1	0,3776	1				
6	0,5	1	0,75	0,377583	-0,0183	0,5				
7										

ранее и скопировать формулы в диапазон из необходимого числа строк.

Число шагов до нахождения корня определяется по формуле:

$\lfloor \log_2((b-a)/(2*t)) \rfloor +1$,

где $\lfloor x \rfloor$ есть целая часть числа x, t – заданная точность вычислений.



Число шагов до нахождения корня...

С учащимися, знакомыми с логарифмами, указанную формулу полезно получить, а остальным ученикам ее можно предъявить в качестве готовой.

Число шагов по этой формуле можно рассчитать с помощью Microsoft Excel, использовав функцию LOG, позволяющую определить логарифм по любому основанию, а также функцию ОТБР, возвращающую число без его дробной части. Записав в какой-либо ячейке формулу:

=ЦЕЛОЕ(LOG((B4-A4)/(2*J3);2))+1,

Таблица 8

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Решение уравнения методом деления отрезка пополам**									
2										
3	a	b	c	f(a)	f(c)	Длина	Значение корня		Точность	0,001
4	0	2	1	1	-0,4597	2				
5	0	1	0,5	1	0,3776	1				
6	0,5	1	0,75	0,3776	-0,0183	0,5				
7	0,5	0,75	0,625	0,3776	0,1860	0,25				
8	0,625	0,75	0,6875	0,1860	0,0853	0,125				
9	0,6875	0,75	0,7188	0,0853	0,0339	0,0625				
10	0,7187	0,75	0,7344	0,0339	0,0079	0,0313				
11	0,7344	0,75	0,7422	0,0079	-0,0052	0,0156				
12	0,7344	0,7422	0,7383	0,0079	0,0013	0,0078				
13	0,7383	0,7422	0,7402	0,0013	-0,0019	0,0039				
14	0,7383	0,7402	0,7393	0,0013	-0,0003	0,0019	0,7393			
15										

получим число шагов, необходимых для нахождения корня заданного уравнения, равное 10.

Дважды мы уже формулы копировали (в строки 5 и 6). Поэтому скопируем формулы из строки 4 еще 8 раз. В результате получим картину, как в таблице 8.

То есть корень заданного уравнения равен 0,7393.

Литература.

1. *Абрамов С.А. Гнездилова Г.Г. Капустина Г.Г. Селюн М.И.* Задачи по программированию. М.: Наука, 1988.

2. Задачи по программированию. 7–11 класс / *Златопольский Д.М.* М.: Изд-во «Первое сентября», 2001.

Златопольский Дмитрий Михайлович,
доцент Московского городского университета,
учитель гимназии № 1530 г. Москвы.