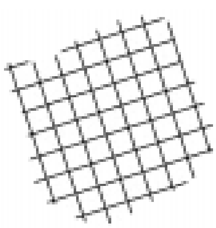
Пискарев Алексей Валерьевич

ЦЕПНЫЕ ДРОБИ НА ДАЧЕ

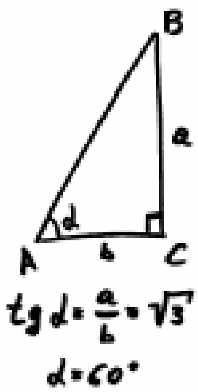
В новый дачный сезон на нашем садовом участке было решено развить строительство. Планы были наполеоновскими, и на очередном подъеме семейного энтузиазма возникла мысль переделать систему крепления балок, удерживающих крышу.

В какой-то момент оказалось, что для воплощения замысла недостает фанерных уголков в 60 градусов.

Фанера нашлась, но какого-либо слесарного инструмента для разметки углов у нас не было. Зато обнаружилась палеточная сетка: плотный лист прозрачной пленки с ободранными краями, размером примерно полтора на полтора метра, который был полиграфическим способом разлинован прямыми линиями на квадратики со стороной около 7 миллиметров.



Хорошо известно, что нельзя построить прямоугольный треугольник с целочисленными длинами катетов, чтобы один из острых углов был равен 60 градусам, поскольку в таком случае отношение длин катетов должно оказаться равным $\sqrt{3}$, а отношение целых чисел не может быть равно $\sqrt{3}$.



Но для длин катетов можно подобрать такие целые числа *a* и *b*, отношение которых *приближает* значение $\sqrt{3}$ достаточно хорошо.

На помощь пришла теория цепных дробей, которую автор незадолго до этого прослушал в курсе дискретной математики.

Вычислим цепную дробь для $\sqrt{3}$.

А) $\sqrt{3} = 1 + (\sqrt{3} - 1)$.

Первый член цепной дроби равен 1 – целой части $\sqrt{3}$, а с дробной частью числа $\sqrt{3}$ (то есть с числом $\sqrt{3} - 1$) мы проделаем следующие действия: представим эту дробную часть в виде $\frac{1}{\beta}$ и выделим целую часть числа β.

Б) $\sqrt{3} - 1 = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}}$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{\left(\sqrt{3}-1\right)*\left(\sqrt{3}+1\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 1 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Получаем 1 – второй член цепной дроби для $\sqrt{3}$ и повторяем операции пункта Б над дробной частью числа β, то есть над числом $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

В) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} = \dfrac{1}{\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}} =$

$$= \frac{1}{\dfrac{2*\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)*\left(\sqrt{3}+1\right)}} =$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a_k	1	1	2	1	2	1	2	1	2
p_k	1	2	5	7	19	26	71	97	265
q_k	1	1	3	4	11	15	41	56	153

Таблица 1

$$= \frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{1}{2+\left(\sqrt{3}-1\right)}$$

Третий член цепной дроби равен 2 – целой части числа $\sqrt{3}+1$. Дробная часть этого числа (то есть число $\sqrt{3}-1$) уже встречалось в пункте Б. Следовательно, члены цепной дроби, полученные в пунктах Б и В, будут повторяться.

Члены цепной дроби для $\sqrt{3}$ образуют последовательность

1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2...,

а сама цепная дробь принимает вид

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}$$

Набор (1, 2) образует *период* цепной дроби. Для краткости такую цепную дробь записывают так:

$\sqrt{3}$ = [1; (1, 2)]

Любая подходящая дробь для полученной цепной дроби, начиная со второй, будет *наилучшим приближением* заданного числа.

Последнее означает, что любая обыкновенная дробь со знаменателем не большим, чем у выбранной подходящей дроби, будет хуже приближать заданное число.

Подсчитаем несколько первых подходящих дробей для числа $\sqrt{3}$.

Первая дробь равна 1 (ей присвоен нулевой номер).

Следующая дробь равна 2 (то есть $1+\frac{1}{1}$).

Последующие подходящие дроби мы будем вычислять по рекуррентной формуле. Для этого введем обозначения:

p_k, q_k – числитель и знаменатель k-ой подходящей дроби;

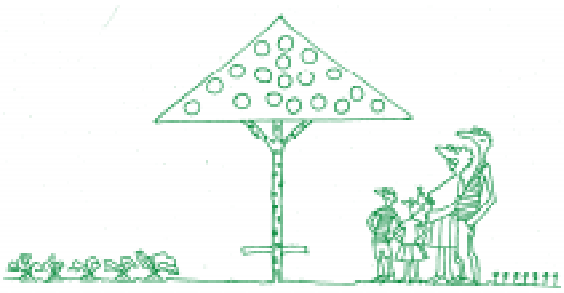
a_k – k-ый член цепной дроби.

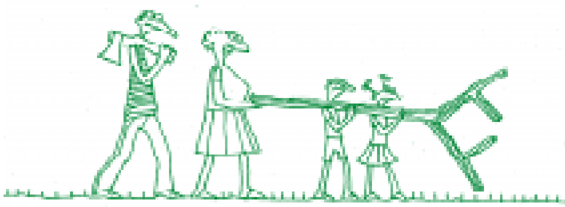
Рекуррентная формула (она приведена в статье С.С. Лаврова в этом номере журнала) выглядит следующим образом:

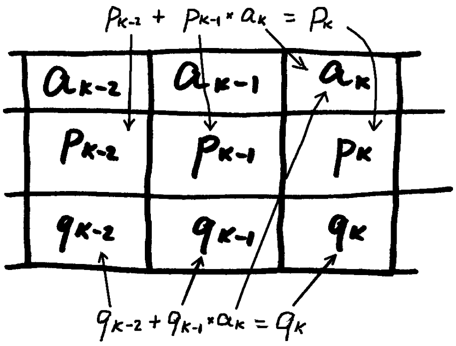
$p_k = p_{k-1} \cdot a_k + p_{k-2}$,
$q_k = q_{k-1} \cdot a_k + q_{k-2}$,
$p_0 = 1$,
$q_0 = 1$,
$p_1 = 2$,
$q_1 = 1$.

Составим таблицу для упрощения записи расчета (таблица 1).

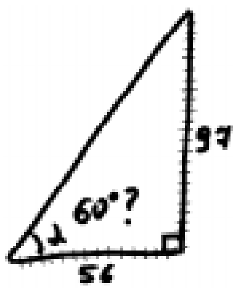
Тогда, на даче, мы взяли восьмую подходящую дробь: $\frac{97}{56}$.







Мы взяли палеточную сетку, определили на ней точку отсчета, отсчитали по одному направлению 97 клеточек и по другому 56 клеточек и таким способом получили прямоугольный треугольник с катетами 97 и 56. Тангенс угла α,



что лежит против катета 97, равен $\frac{97}{56}$.

Какую погрешность мы при этом допустили?

Для расчета погрешности, кроме уже вычисленной восьмой подходящей дроби, мы будем использовать также седьмую и девятую.

Седьмая подходящая дробь равна $\frac{71}{41}$.

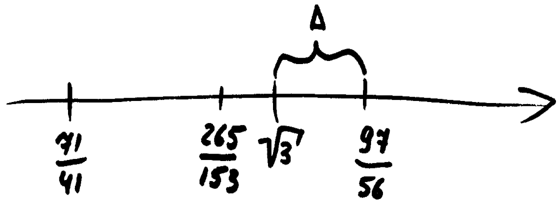
Девятая подходящая дробь равна $\frac{265}{153}$.

Известно, что исходное число находится между двумя последовательными подходящими дробями:

$$\frac{71}{41} < \sqrt{3} < \frac{97}{56},$$

причем находится ближе к подходящей дроби с большим номером.

Также известно, что подходящие дроби с четным номером всегда меньше исходного числа, а с нечетным – всегда больше.



Через Δ обозначим искомую погрешность приближения числа $\sqrt{3}$ дробью $\frac{97}{56}$:

$$\Delta = \left|\sqrt{3} - \frac{97}{56}\right|$$

Тогда ясно, что погрешность

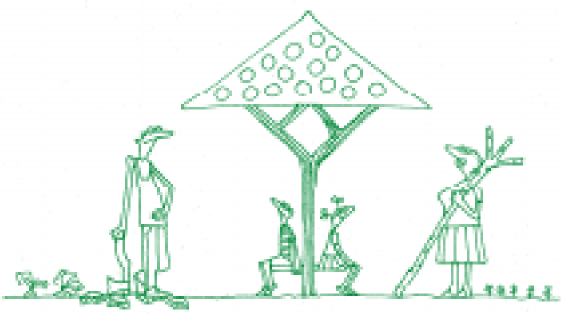
$$\Delta < \frac{\frac{97}{56} - \frac{71}{41}}{2} = \frac{\frac{1}{56*41}}{2} = \frac{1}{4592} \approx$$

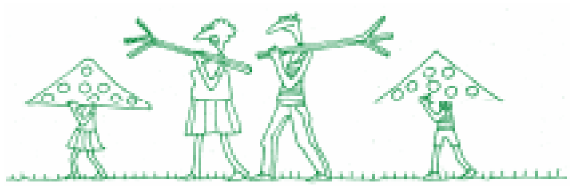
$\approx 0{,}00021777$

(Разность подходящих дробей вычислять очень легко: в числителе всегда 1, а знаменатель равен произведению знаменателей этих дробей.)

То есть $\frac{97}{56}$ отличается от $\sqrt{3}$ не более чем на 22 стотысячных.

Оценку погрешности можно улучшить, если взять следующую подходящую дробь (девятую): $\frac{265}{153}$.





$$\Delta < \frac{97}{56} - \frac{265}{153} = \frac{1}{56*153} = \frac{1}{8568} \approx$$
$$\approx 0{,}00011671$$

То есть $\frac{97}{56}$ отличается от $\sqrt{3}$ не более чем на 12 стотысячных.

Любопытно узнать и градусную меру угла α, который лежит против катета 97, построенного на палеточной сетке треугольника:

$$\operatorname{arctg} \alpha = \frac{97}{56} \approx 60.0013185°$$

Видно, что построенный таким способом угол α отличается от 60 градусов не более чем на 132 стотысячных доли градуса.

Никаких инструментов, кроме листа бумаги и карандаша, это вычисление не потребовало.

Удачное построение для дачной постройки!

Пискарев Алексей Валерьевич,
студент-дипломник кафедры автоматизированных систем обработки информации и управления факультета компьютерных технологий и информатики СПбГЭТУ.