Гейнц Шуман

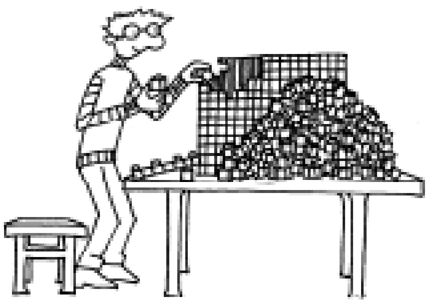
КОНСТРУИРОВАНИЕ ГОЛОВОЛОМОК В ПРЕПОДАВАНИИ СТЕРЕОМЕТРИИ

Части больше, чем целое...

ВВЕДЕНИЕ

Геометрические головоломки являются игровыми формами в преподавании геометрии: факты планиметрии или стереометрии представляются в материальной форме, и ученик должен создать из отдельных частей некий более или менее знакомый ему образ. Задачи решения головоломок, хоть формально и не относятся к геометрии, но благодаря присутствующему в них вызову «создать целое из частей», обладают сильной мотивацией.

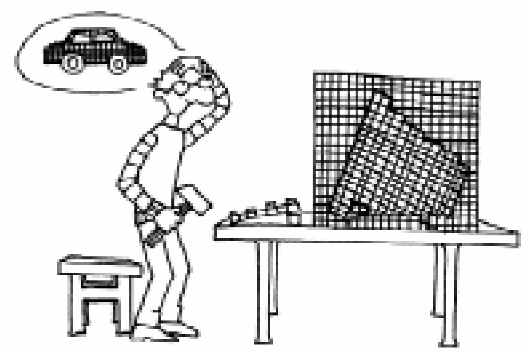
Менее распространены головоломки открытого типа, в которых ученик должен составить несколько различных фигур или даже самостоятельно придумать как можно больше таких фигур из имеющихся частей. Такого рода задачи способствуют развитию мышления и творческой деятельности, или более точно: работа с такими головоломками создает благоприятную почву для решения задач открытого типа в будущем.



Более трудными являются задачи создания новых головоломок: например, ученик должен создать из кубиков такие тела, из которых можно составить новый куб. Примером решения этой задачи являются кубики Сома, из которых можно составить куб размером 3x3x3.

В процессе применения объемных головоломок в преподавании геометрии очень быстро проявляются ограничения, связанные с тем, что выбор базовых «строительных элементов» для создания головоломок очень невелик, кроме того, практическое разложение материальных тел на составные части едва ли реализуемо по чисто техническим причинам.

Однако в настоящее время конструирование таких головоломок возможно с помощью компьютерных инструментов, примененных в преподавании стереометрии (Schumann 1995/1998). Такие инструменты должны предоставлять возможность изображения на экране частей тела, его различных сечений и обеспечивать манипуляции ими. Мы используем две формы представления головоломок: экранное (при котором ученик, пользу-



ясь мышью, собирает фигуру из отдельных частей), и материальную (которая строится из поверхностей, восстанавливаемых по изображению каркаса). Элементы головоломки могут быть попарно конгруэнтными телами или, в простейшем случае, частями, получаемыми с помощью произвольного сечения.

Деятельность ученика после создания такой головоломки заключается в следующем.

Он в паре с товарищем создает на экране из заданного тела головоломку; далее они объясняют на демонстрационном компьютере, как они получили эту головоломку, и описывают ее элементы. Они ставят перед своими партнерами задачу-головоломку, подготавливают ее каркасную форму, описывают и рассчитывают ее составные части и формулируют домашнее задание.

Кроме связанной с разработкой головоломок тренировки оперирования объемными телами, в творчестве развивается пространственное воображение (в данном случае способность визуализировать и изучать пространственные отношения), а также умение описывать и рассчитывать пространственные тела.

Далее, с помощью программы KORPERGEOMETRIE (Bauer и др., 1999) мы покажем на примере правильного тетраэдра, как можно конструировать головоломки.

КОНСТРУИРОВАНИЕ ГОЛОВОЛОМОК ИЗ ПРАВИЛЬНОГО ТЕТРАЭДРА

Начнем с создания головоломки из правильного тетраэдра с ребром a, например, $a = 10$ см (рисунок 1.1), с помощью

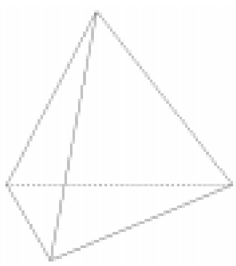


Рисунок 1.1

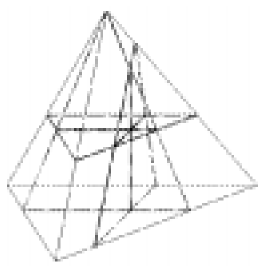


Рисунок 2.1

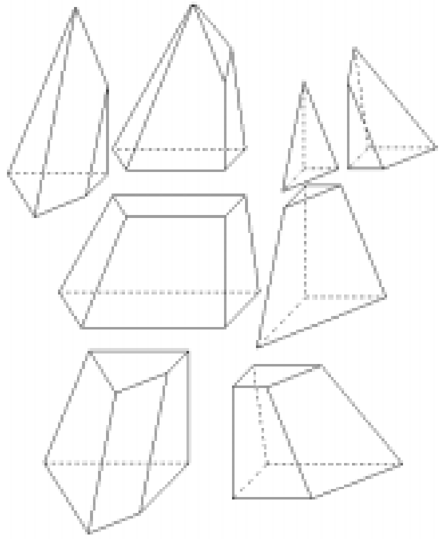


Рисунок 2.2

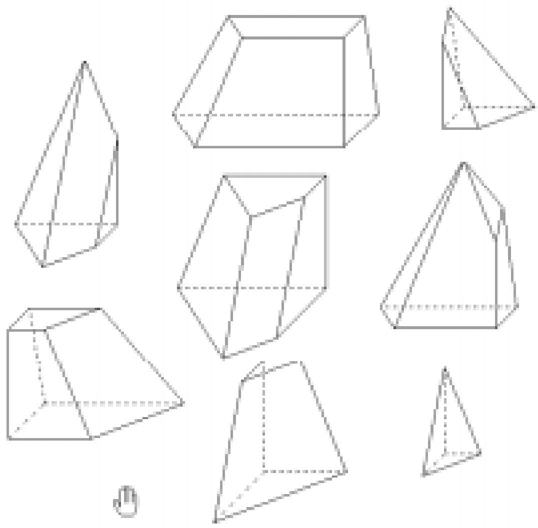


Рисунок 2.3

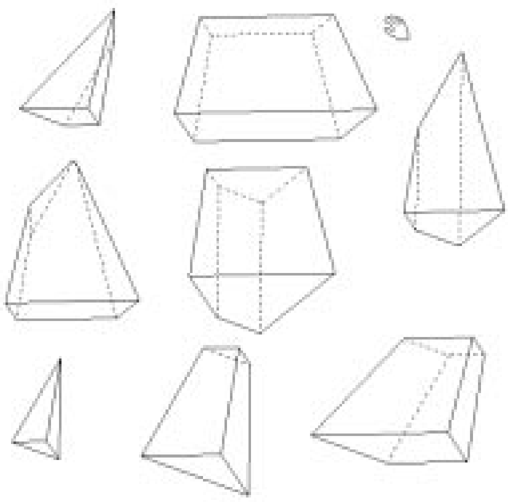


Рисунок 2.4

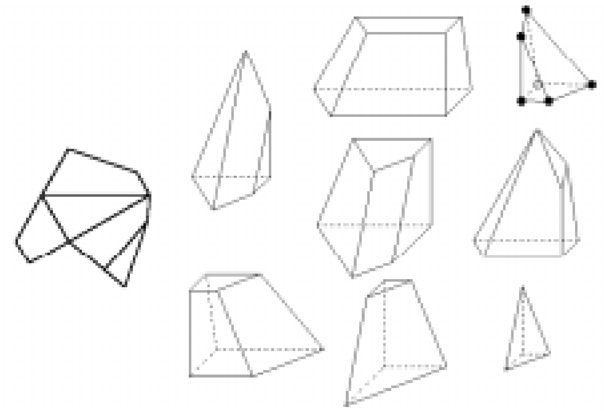


Рисунок 2.5

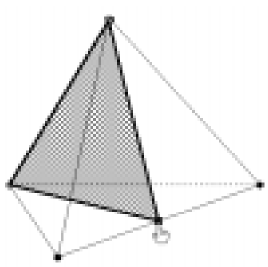


Рисунок 3.1

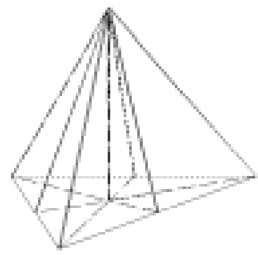


Рисунок 3.2

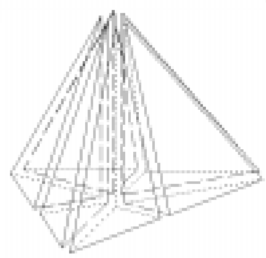


Рисунок 3.3

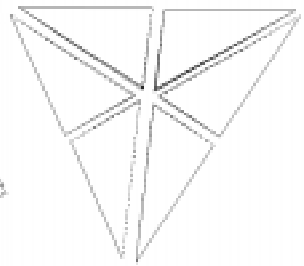


Рисунок 3.4

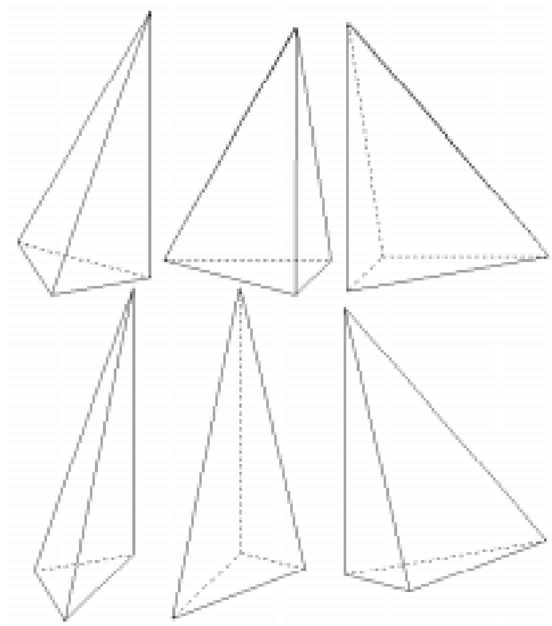


Рисунок 3.5

произвольного горизонтального и двух взаимно перпендикулярных сечений (рисунок 2.1). Составные части головоломки показаны на рисунке 2.2. Переставляя части головоломки в произвольном порядке, получаем ее экранное представление (рисунок 2.3). Чтобы составить правильный тетраэдр, нужно уметь определять, какие грани соответствуют друг другу, при этом весь набор можно поворачивать наподобие театральной сцены, рассматривая его в разных ракурсах (рисунок 2.4). Отсюда автоматически получаются каркасы всех частей головоломки (рисунок 2.5), на основе которых можно было бы создать головоломки из каких-то реальных материалов. Впрочем решение таких головоломок гораздо более трудоемко.

Далее мы будем конструировать головоломки, систематически используя сечения тетраэдра. Начнем с разрезания его пополам (рисунок 3.1). Комбинируя три таких сечения, перпендикулярных основанию и проходящих через высоту тетраэдра, мы получаем разложение (рисунок 3.2). «Взрывное представление» показано на рисунке 3.3. Рисунок 3.4 показывает вид снизу. Головоломка (рисунок 3.5) состоит из 6 треугольных пирамид, каждые две из которых симметричны относительно плоскости.

Длины ребер пирамид: $\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}a, \frac{\sqrt{3}}{6}a; a, \frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{3}a$ (задание для читателя: каким отрезкам в каркасе соответствуют эти длины). Эту головоломку решить особенно легко. Хотя многие сечения конгруэнтны друг другу, никаких трудностей не возникает. Скомбинируем теперь два сечения, которые проходят через ребра тетраэдра и, в отличие от предыдущего случая, не перпендикулярны основанию. Выберем вариант, когда получаются только конгруэнтные части (рисунки 4.1, 4.2). Развертка одной из четырех пирамид, имеющих по две пары ребер одинаковой длины, показана на рис 4.3; она состоит из двух пар прямоугольных треугольников. Хорошее упражнение для развития геометрического мышления – восстановить мысленно пирамиду из развертки. Длины ребер такой пирамиды: $a, \frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{a}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}a$. Объем одной из четырех пирамид, образующих две симметричные пары, равен четверти объема правильного тетраэдра, то есть $\frac{\sqrt{2}}{48}a^3$. Головоломка эта сама по себе не сложна (рисунок 4.4). Она позволяет построить еще три выпуклых тела.

Теперь мы рассмотрим сечения, проходящие через середины ребер (рисунок 5.1). Проведя эти сечения и разделив части, получаем конгруэнтные тела в форме клина (рисунок 5.2), которые можно рассматривать, вращая картину (рисунок 5.3). Развертка изображена на рисунке 5.4. Длины выступающих ребер: $\frac{a}{2}, a$. Интересно, что соединение частей головоломки в ее материальной форме порождает собственно геометрическую задачу. Вы непроизвольно получаете невыпуклое тело (рисунок 5.5). Вариант головоломки получается, если разрезать клинья пополам (рисунок 6.1). Каркас из четырех несимметричных клиньев показан на рисунке 6.2 и т.д.. Эта головоломка еще сложнее, чем предыдущая.

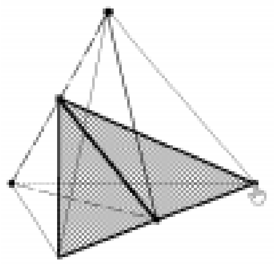


Рисунок 4.1

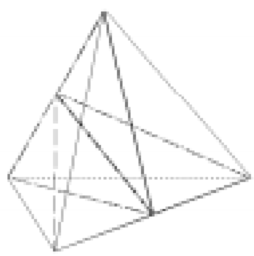


Рисунок 4.2

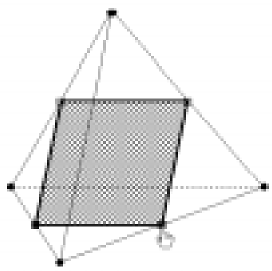


Рисунок 5.1

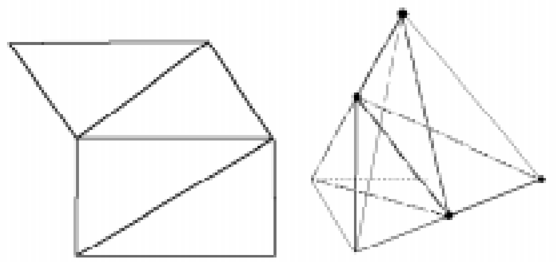


Рисунок 4.3

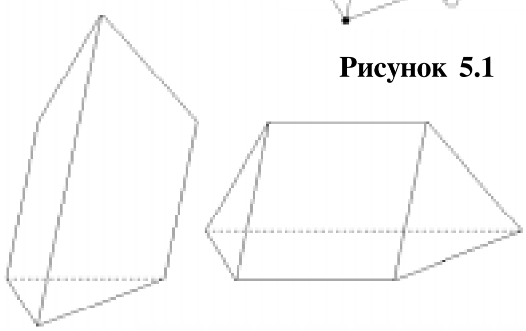


Рисунок 5.2

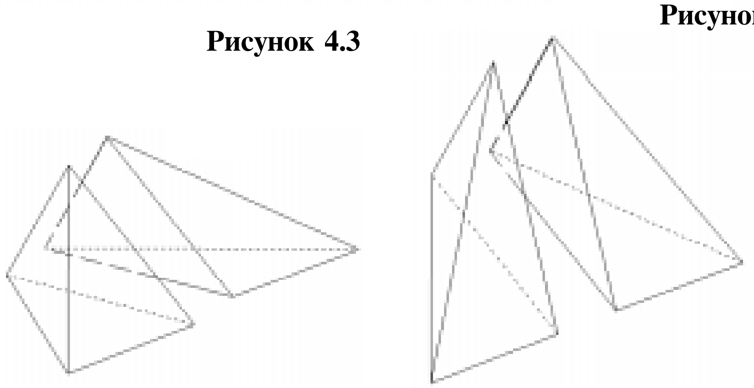


Рисунок 4.4

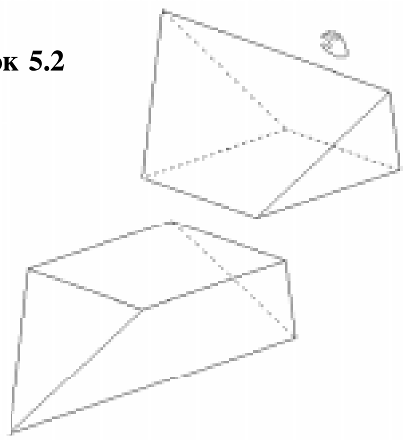


Рисунок 5.3

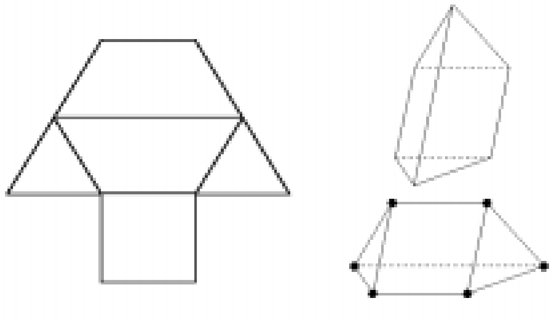


Рисунок 5.4

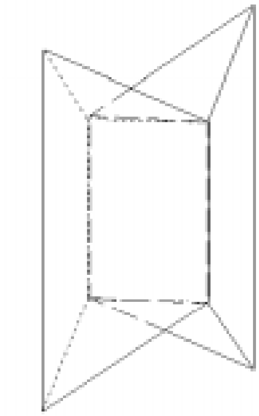


Рисунок 5.5

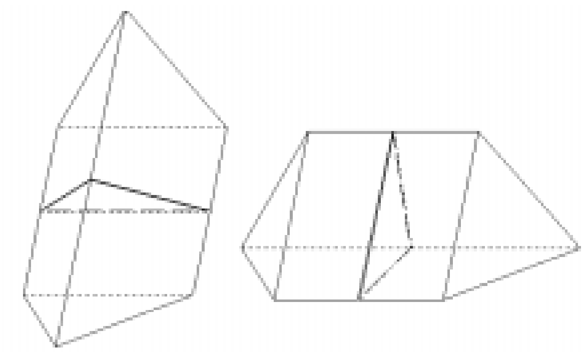


Рисунок 6.1

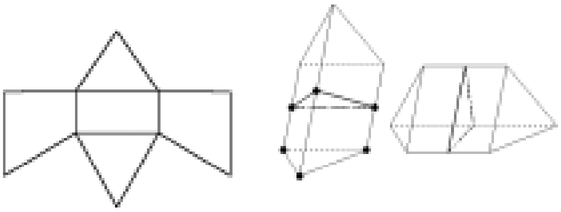


Рисунок 6.2

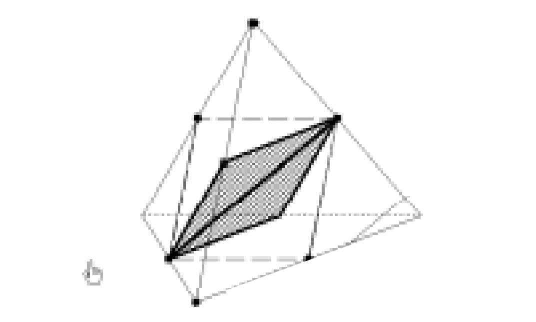


Рисунок 7.1

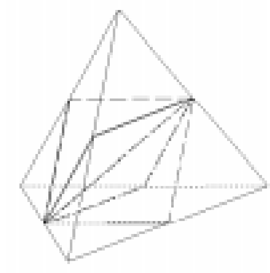


Рисунок 7.2

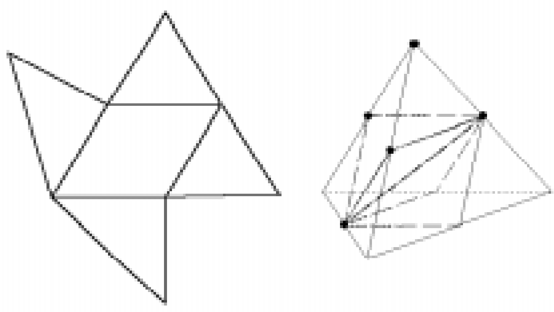


Рисунок 7.3

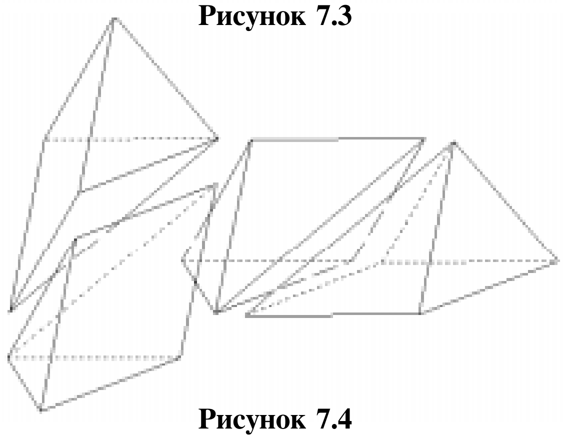


Рисунок 7.4

Комбинация двух сечений, проходящих через середины ребер (рисунок 7.1), дает четыре конгруэнтные четырехугольные пирамиды, у которых основание – это параллелограмм с углом 60°, а боковые грани – две пары треугольников (два равносторонних и два прямоугольных) (рисунок 7.2). Симметричный каркас частей показан на рисунке 7.3. Составить тетраэдр из отдельных частей (рисунок 7.4) достаточно сложно.

Если провести три сечения через середины ребер (рисунок 8.1), то получим головоломку, состоящую из четырех неправильных тетраэдров и четырех конгруэнтных шестигранников с треугольными гранями (рисунок 8.2). Каждый из тетраэдров имеет в основании правильный треугольник (см. каркас на рисунке 8.3) с ребром $\frac{a}{2}$, а боковые грани – конгруэнтные прямоугольные равнобедренные треугольники с катетами $\frac{\sqrt{2}}{4}a$. Каждый из шестигранников (рисунок 8.4) можно разложить на правильный тетраэдр с ребром $\frac{a}{2}$ и описанный выше тетраэдр, каркас которого является частью каркаса шестигранника.

Комбинируя сечения через ребро с сечением через середину ребра (рисунок 9.1), получаем головоломку, состоящую из двух пар клинообразных частей объемом в четверть объема тетраэдра (рисунок 9.2). Части головоломки можно было получить, разрезав пополам части тетраэдра на рисунке 5.2. Элемент головоломки имеет новую форму; его каркас показан на рисунок 9.3 и т.д.. В заключение приведем головоломку, которая получается из правильного тетраэдра с ребром a (рисунок 10.1). В результате получаем восьмигранник с ребром $\frac{a}{2}$, который в свою очередь разрезается на две четырехугольные пирамиды. «Взрывное» изображение представлено на рисунках 10.2 и 10.3.

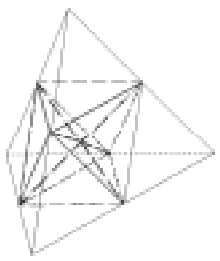


Рисунок 8.1

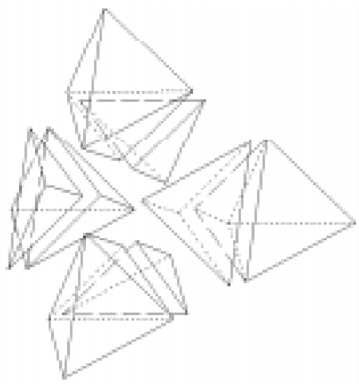


Рисунок 8.2

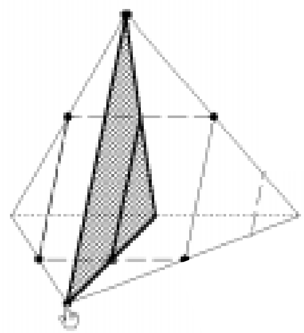


Рисунок 9.1

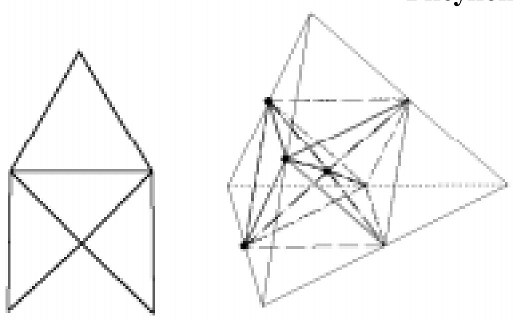


Рисунок 8.3

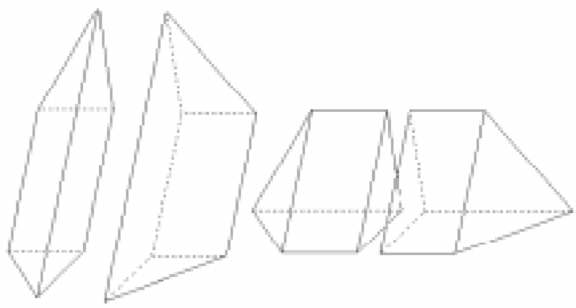


Рисунок 9.2

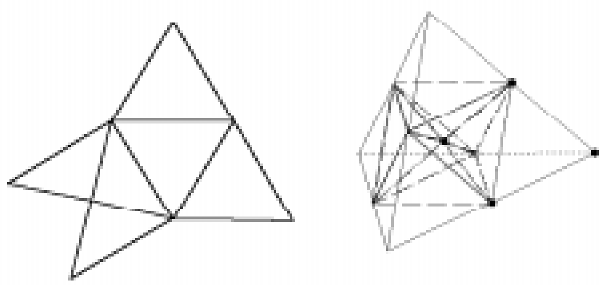


Рисунок 8.4

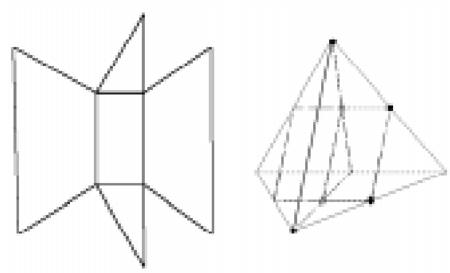


Рисунок 9.3

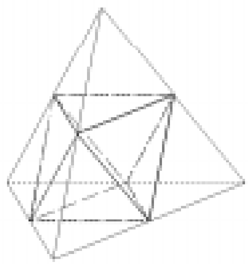


Рисунок 10.1

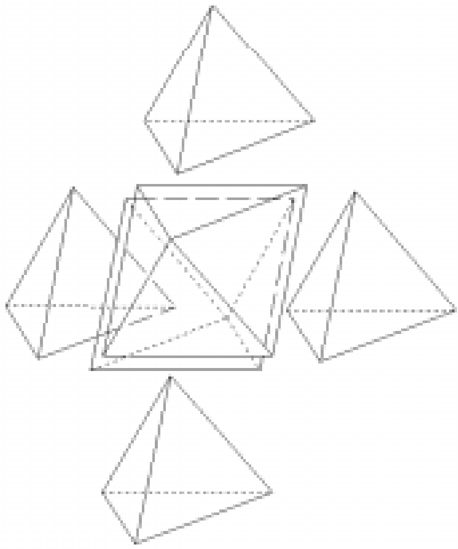


Рисунок 10.2

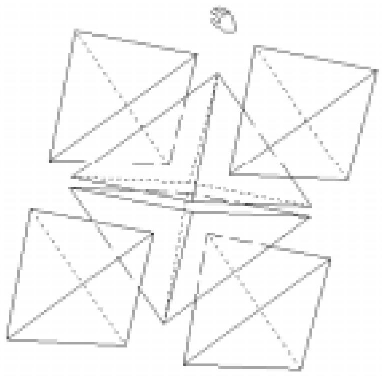


Рисунок 10.3

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Так же, как из тетраэдра, интересные головоломки можно создать из других тел, используя компьютерные инструменты. Хотя в печатной статье невозможно передать всю динамику создания головоломок, тем не менее, очевидно, что новая среда является перспективным инструментом для преподавания стереометрии.

От редакции. Демонстрационные версии на немецком языке продуктов, которые позволяют выполнить описанные в статье построения, можно найти по адресу: http://www.mathe-schumann.de.

Литература.

1. Bauer, H.: Freiberger, U.; Kuhlewind, G.; Schumann, H. KORPERGEOMETRIE (Software mit Manual). Berlin: Cornelsen, 1999.
2. Doorman, M.; Schumann, H. SCHNITTE (Software). Bonn: Dummlers, 1995.
3. Schumann, H. Korperschnitte – Raumgeometrie interaktiv mit dem Computer. Bonn: Dummlers, 1995.
4. Schumann, H. Raumgeometrie – Computerwerkzeuge fur den Raumgeometrie – Unterricht in der Sekundarstufe I. In: LOG IN (Informatische Bildung und Computer in der Schule), Jahrg. 18, 1998, Heft 6, S. 44–48, 2000 by H.Schumann.

Heinz Schumann,
Prof. Dr. habil, Fakultat III,
Mathematik/Informatik,
Institur fur Bildungsinformatik
University of Education (PH),
Weingarten, Germany.

Перевод М.И. Юдовина.