



Лавров Святослав Сергеевич

ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

В этом номере мы представляем статью С.С. Лаврова о цепных (непрерывных) дробях. Некоторое время назад казалось, что теория чисел – это внутренняя область математики, далекая от приложений. Многие красивые идеи теории чисел, еще 50 лет назад привлекавшие всеобщее внимание, перестали попадать на страницы научно-популярных изданий. Такая участь постигла и теорию цепных дробей. Но вот, буквально в последние годы, массовый интерес к теории чисел возродился вновь. Произошло это в связи с развитием криптографии. Появились новые термины: «электронная подпись», «электронные деньги». В основе их существования лежат алгоритмы и теоремы теории чисел.

Публикуемая статья не связана напрямую с криптографией, но, как знать, не станут ли изложенные в ней идеи ключом к проблемам криптографии. Первая часть данной статьи представляет собой краткое изложение основ теории цепных дробей, которая относится к числу классических вопросов теории чисел. Вторая часть излагает более специальные и не очень простые результаты, связанные с рациональными представлениями элементарных функций.

Прежде чем приступить к чтению этой статьи мы советуем познакомиться со статьей «Алгоритмы над целыми числами» (В.А. Петров, С.Н. Поздняков, «Алгоритмы над целыми числами», Компьютерные инструменты в образовании, № 1, 1999 г.).

Тема этого этюда отнюдь не нова – ею занимался еще Эйлер, а алгоритм преобразования обычной дроби в цепную ничем по сути не отличается от алгоритма Евклида по поиску НОД двух чисел (многочленов и т.п.). С тематикой журнала она связана: – как нетривиальный пример приложений компьютерной алгебры (хотя на деле за компьютер трудился я сам, кое-что продублировав для контроля на «Паскале»), – как не слишком популярный, но достаточно эффективный метод построения рациональных приближений функций.

Кроме того, решение любой задачи на компьютере начинается не с написания алгоритма или программы, а с уточ-

нения постановки задачи, с поиска достаточно хорошего – правильного и экономного – метода ее решения. При этом используются разнообразные приемы, направляющие и организующие поиск, часто называемые *эвристиками*. У каждого исследователя они свои – то, что помогает одному, может мешать другому и даже раздражать его. Тем не менее, автор попытался на этом примере передать младшим поколениям некоторую часть собственного запаса эвристик в области нечетко поставленных задач.

Символами «NB!» помечены места, где у автора возникали сомнения, наметки на будущее, намеки читателю и т. п.



1. ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ

Цепная дробь (ЦД) может быть конечной (n -членной или n -звенной)

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \dots + \frac{b_n}{a_n}}} = [a_0; \frac{b_1}{a_1 +}, \frac{b_2}{a_2 +}, \dots, \frac{b_n}{a_n}] \quad (1)$$

или бесконечной

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \dots}} = [a_0; \frac{b_1}{a_1 +}, \frac{b_2}{a_2 +}, \dots] \quad (2)$$

Линейная запись ЦД, использованная в правой части (1) и (2), впервые была предложена Роджерсом (см. ссылку в [4]). Если, начиная с некоторого места, например, с $k = 2$, известен общий вид частных числителей b_k и частных знаменателей a_k ЦД, то можно, следуя Принсгейму (там же), прибегнуть к компактному обозначению

$$\left[a_0; \frac{b_1}{a_1 +}, \frac{b_k}{a_k +} \right]_2^\infty,$$

куда этот общий вид включен явно. Если b_k и a_k – это просто символы или выражения, не содержащие дробной черты, то в обозначениях Роджерса-Принсгейма можно прямую дробную черту заменить косой:

$$[a_0; b_1 / a_1 +, b_2 / a_2 +, \dots]$$

Часто считают, что все элементы a_k и b_k ЦД принимают положительные и, как правило, целые значения с b_n не кратным a_n для дроби (1). В общем же случае можно рассматривать ЦД с элементами любой природы.

Отрезок ЦД – это

$$s_k = [a_0; b_1 / a_1 +, \dots, b_k / a_k +],$$

где $0 \leq k$ и для ЦД (1) $k \leq n$.

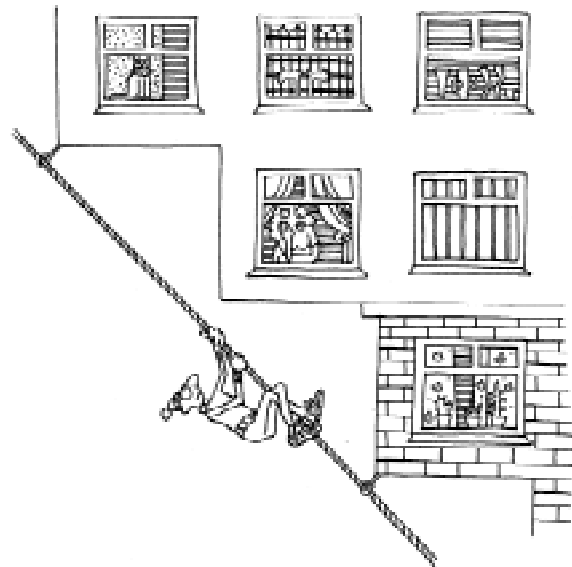
Остаток ЦД – это

$$r_k = [a_k; b_{k+1} / a_{k+1} +, \dots, b_n / a_n]$$

для ЦД (1) или

$$r_k = [a_k; b_{k+1} / a_{k+1} +, \dots]$$

для ЦД (2) с теми же ограничениями на k .



На любой отрезок

$$s_k = [a_0; b_1 / a_1 +, \dots, b_k / a_k +]$$

дроби (1) или (2) можно смотреть как на функцию ее элементов $a_0, b_1, a_1, \dots, b_k, a_k$. Зависимость этой функции от ее аргументов выражается только через арифметические операции. Если избавиться в этом выражении от «многоэтажных» дробей, то получится выражение

$$s_k = \frac{p(a_0, b_1, a_1, \dots, b_k, a_k)}{q(a_0, b_1, a_1, \dots, b_k, a_k)},$$

в котором p и q – это многочлены от $a_0, b_1, a_1, \dots, b_k, a_k$, определяемые, вообще говоря, не однозначно.

Введем обозначения:

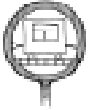
$$p_{-1} = 1, q_{-1} = 0, p_0 = a_0, q_0 = 1. \quad (3)$$

Тогда $s_1 = a_0 + \frac{b_1}{a_1}$, так что справед-

ливы тождества

$$p_1 = a_1 p_0 + b_1 p_{-1} \text{ и } q_1 = a_1 q_0 + b_1 q_{-1}.$$

Покажем, что аналогичные зависимости $p_k = a_k p_{k-1} + b_k p_{k-2}$, $q_k = a_k q_{k-1} + b_k q_{k-2}$ позволяют строить p_k и q_k при любом значении k (для конечной дроби (1) – при $k \leq n$). Будем использовать букву ϕ вместо любой из букв p или q .



NB! Читать ее удобно как «купе». Это позволит обойтись одной формулой

$$\phi_k = a_k \phi_{k-1} + b_k \phi_{k-2} \quad (4)$$

вместо двух предыдущих (ее p - и q -вариантов).

Пусть это утверждение справедливо вплоть до некоторого k . Воспользуемся тем, что при подстановке $a_k + b_{k+1}/a_{k+1}$ вместо a_k в s_k последнее после устранения избыточной этажности переходит в s_{k+1} . Преобразуя выражения (4), получим:

$$\begin{aligned} \phi_{k+1} &= (a_k + b_{k+1}/a_{k+1})\phi_{k-1} + b_k\phi_{k-2} = \\ &= \phi_k + b_{k+1}\phi_{k-1}/a_{k+1}, \end{aligned}$$

откуда

$$s_{k+1} = \frac{a_{k+1}p_k + b_{k+1}p_{k-1}}{a_{k+1}q_k + b_{k+1}q_{k-1}}.$$

Это обосновывает возможность пользоваться выражениями (4) при k , увеличенном на 1, а по индукции – при любом k .

Второе из выражений (4) (его q -вариант) приводит к заключению, что при положительных a_k и b_k все q_k положительны и что при целых a_k последовательность $\{q_k\}$ монотонно возрастает.

Дроби p_k/q_k , построенные таким способом, называются *подходящими дробями* для ЦД (1) или (2), а сам способ – *каноническим представлением* подходящих дробей.

Из тех же выражений (4) следует

$$\begin{aligned} p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1} &= b_k (p_{k-2} q_{k-1} - q_{k-2} p_{k-1}) = \\ &= -b_k (p_{k-1} q_{k-2} - q_{k-1} p_{k-2}), \end{aligned}$$

а поскольку $p_0 q_{-1} - q_0 p_{-1} = -1$, то

$$p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1} = (-1)^{k-1} b_k \dots b_1. \quad (5)$$

Деление обеих частей на $q_k q_{k-1}$ дает важное соотношение между последовательными подходящими дробями:

$$s_k - s_{k-1} = (-1)^{k-1} b_k \dots b_1 / q_k q_{k-1} \quad (6)$$

для всех $k > 0$.

Из (6) вытекает, что при целых и для $k > 0$ положительных элементах b_k и a_k в сумме $s_0 + (s_1 - s_0) + \dots + (s_n - s_{n-1}) = s_n$ знаки членов чередуются, а абсолютные величины – убывают, причем для бесконечной ЦД (2) имеет место $|s_n - s_{n-1}| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому для такой дроби последовательность подходящих дробей схо-

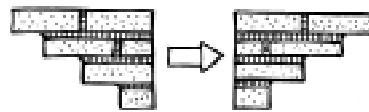
дится к пределу, называемому *значением* этой дроби.

Если не требовать, чтобы a_k были целыми, то они могут быть настолько малы, что знаменатели q_k возрастают медленно (или не возрастают вообще), а разности (6) медленно убывают (или вовсе не убывают), и последовательность $\{s_n\}$ не сходится. Для разностей подходящих дробей через одну имеем:

$$\begin{aligned} s_{k+1} - s_{k-1} &= \frac{a_k p_k + b_k p_{k-1}}{a_k q_k + b_k q_{k-1}} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \\ &= \frac{a_k (p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1})}{q_{k+1} q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1} a_k}{q_{k+1} q_{k-1}}. \end{aligned}$$

Из всего полученного видно, что при указанных условиях последовательности четных и нечетных членов $\{s_n\}$ обе монотонны и первая – возрастающая, вторая – убывающая, движутся навстречу друг другу. Следовательно, каждая из них имеет предел, но эти пределы не обязаны совпадать.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЦЕЛНЫХ ДРОБЕЙ



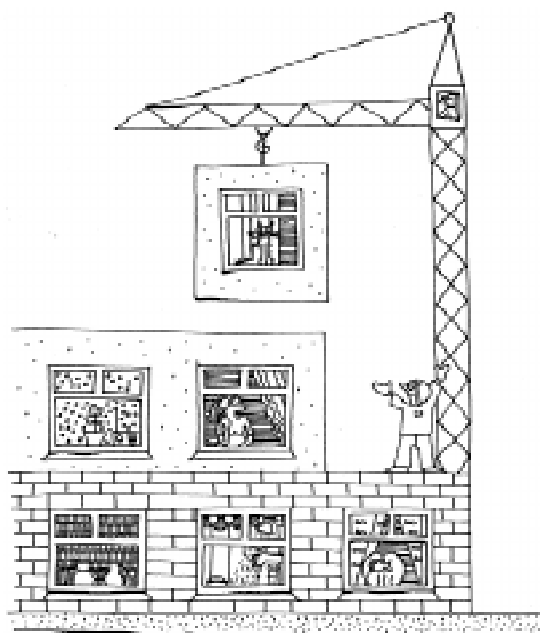
Одно из простейших преобразований цепной дроби – это одновременное умножение трех ее элементов: b_k , a_k и b_{k+1} на отличный от нуля множитель c_k (или просто c). Ясно, что при этом на c умножается весь остаток r_k , а значение дроби b_k/r_k , как и всей ЦД, не изменяется.

Комбинируя такие локальные преобразования (*масштабирования*), можно изменить крупные участки ЦД или даже всю ее целиком. Возьмем, например, в качестве c_1 величину $1/b_1$. Получим:

$$b_1' = 1, a_1' = a_1/b_1, b_2' = b_2/b_1.$$

Далее, $c_2 = b_1/b_2$ даст $b_2'' = 1, a_2' = a_2 b_1/b_2, b_3' = b_3 b_1/b_2$.

Затем при $c_3 = b_2/b_3 b_1$ получим $b_3'' = 1, a_3' = a_3 b_2/b_3 b_1, b_4' = b_4 b_2/b_3 b_1$. Для конечной ЦД этот процесс *глобальной нормировки* (преобразования частных числителей b_k в $b_k'' = 1$) оборвется на значениях $b_n'' = 1, a_n' = a_n f_n$, где



$$f_n = \frac{1}{b_n f_{n-1}} = \frac{b_{n-1} b_{n-3} \dots}{b_n b_{n-2} \dots}$$

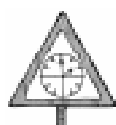
(последний член как в числителе, так и в знаменателе дроби f_n – это b_1 или b_2 с индексом той же четности, что и у первого). Для бесконечной ЦД общий вид f_n – тот же, но процесс нормировки длится неограниченно долго.

Цепные дроби с $b_k = 1$ для всех k называют *обыкновенными*.



В! Для дробей с отличными от 1 значениями элементов верхнего уровня b_k подошло бы название «возвышенные» вместо трудночитаемого «не обыкновенные».

У Хинчина в [1], как и во многих других книгах, рассматриваются только такие Ц.Д. Хованский ([4]) пишет по этому поводу: «Лагранж даже утверждал, что все остальные цепные дроби являются почти что чистым курьезом, так как их легко привести к обыкновенным цепным дробям. Но такое приведение во многих случаях сильно усложняет дробь, и поэтому высказывание Лагранжа нельзя считать правильным».



В! За этим мнением стоит опыт двух веков.

Для обыкновенной цепной дроби зависимости (4) упрощаются:

$$\phi_k = a_k \phi_{k-1} + \phi_{k-2}, \quad (7)$$

хотя и не очень существенно. Соотношения (5) и (6) также принимают чуть более простой вид:

$$p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1} = (-1)^{k-1} \quad (8)$$

и

$$s_k - s_{k-1} = (-1)^{k-1} / q_k q_{k-1}. \quad (9)$$

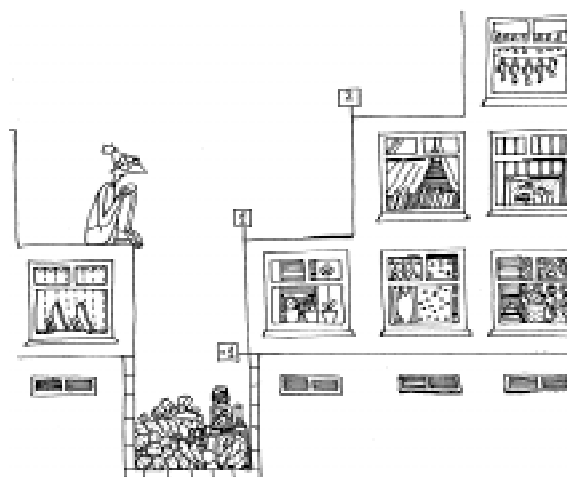
При целых a_k для обыкновенной ЦД из (8) следует также, что общий делитель p_k и q_k (а также ϕ_k и ϕ_{k-1}) должен быть делителем и правой части, то есть может быть равен только 1 – подходящие дроби в их каноническом представлении (как и отношения их соседних числителей или знаменателей) несократимы.

Преобразование *сжатия* ЦД – сокращение совокупности ее звеньев – выполняется следующим образом. Пусть в последовательности $\{s_0, s_1, \dots, s_p, \dots\}$ подходящих дробей мы хотим сохранить только члены $s_{i_0} = s_0, s_{i_1}, \dots, s_{i_k}, \dots$

Зависимости (4) позволяют вычислить ϕ_k по ϕ_{k-1} и ϕ_{k-2} , что мы изобразим универсальной схемой $\phi_{k-2}, \phi_{k-1} \mapsto \phi_k$. Ее частные случаи будут постоянно встречаться ниже. Теперь вместо них мы хотим располагать зависимостями

$$\phi_{i_k} = a'_{i_k} \phi_{i_{k-1}} + b'_{i_k} \phi_{i_{k-2}} \quad (10)$$

(схематически $\phi_{i_{k-2}}, \phi_{i_{k-1}} \mapsto \phi_{i_k}$).



Первый этап. Имеем $\phi_{-1}, \phi_0 \mapsto \phi_1$ (значения (3) стандартны в мире цепных дробей), $\phi_0, \phi_1 \mapsto \phi_2$, что в сочетании с

предыдущей схемой дает $\phi_{-1}, \phi_0 \mapsto \phi_2$. Действуя так, дойдем до зависимости $\phi_{-1}, \phi_0 \mapsto \phi_i$. Каждый раз выражение вида $a\phi_{j_1} + b\phi_{j_2}$ подставлялось в подобное ему вместо одной из переменных, причем другая переменная совпадала с ϕ_{j_1} или ϕ_{j_2} . Поэтому все эти схемы отражают зависимости требуемого вида (10). На этом первый этап сжатия завершен.

Второй и следующий этапы. Величины ϕ_0, ϕ_{j_1} и ϕ_{j_2} (а в общем случае – $\phi_{i_{k-1}}, \phi_{i_k}$ и $\phi_{i_{k+1}}$) занимают место ϕ_{-1}, ϕ_0 и ϕ_i , соответственно. Начинаем с того, что зависимость $\phi_{-1}, \phi_0 \mapsto \phi_i$ разрешаем относительно ϕ_{-1} : $\phi_0, \phi_i \mapsto \phi_{-1}$ и найденное выражение подставляем в $\phi_{-1}, \phi_0 \mapsto \phi_{i-1}$. Это дает еще одну схему вычисления ϕ_{i-1} : $\phi_0, \phi_i \mapsto \phi_{i-1}$.

Исключение ненужных зависимостей происходит так же, как на первом этапе. Подробнее: $\phi_{i-1}, \phi_i \mapsto \phi_{i+1}$ переходит в $\phi_0, \phi_i \mapsto \phi_{i+1}$ (здесь-то и потребовалась альтернативная схема вычисления ϕ_{i-1}), $\phi_{i-1}, \phi_i \mapsto \phi_{i+1}$ – в $\phi_0, \phi_i \mapsto \phi_{i+2}$, и т. д. вплоть до $\phi_0, \phi_i \mapsto \phi_{i_2}$.

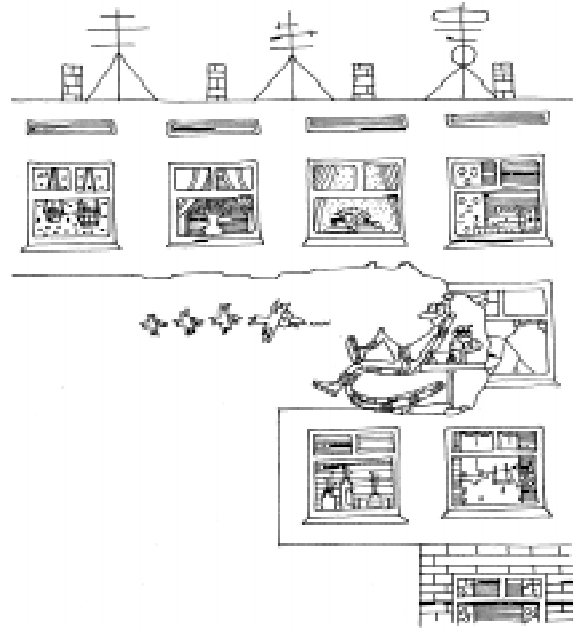


NB! В разделе 6 мы применим этот алгоритм к интересному конкретному случаю.

Если частный числитель b_{k+1} по какой-то причине оказался нулем, то при $a_k \neq 0$ это означает, что ЦД конечна – b_k/a_k становится ее последним звеном. Случай, когда $a_k = 0$ при $b_k \neq 0$ можно назвать дырой в последовательности частных знаменателей. Закрыть эту дыру несложно.

$$\text{Из } r_{k-1} = a_{k-1} + \frac{b_k}{0 + b_{k+1}/r_{k+1}},$$

где $r_{k+1} = a_{k+1} + b_{k+2}/r_{k+2}$, следует:



$$r_{k-1} = (a_{k-1} + b_k a_{k+1} / b_{k+1}) + \frac{b_k b_{k+2} / b_{k+1}}{r_{k+2}},$$

так что можно принять:

$$a'_{k-1} = a_{k-1} + b_k a_{k+1} / b_{k+1},$$

$$b'_k = b_k b_{k+2} / b_{k+1}, r'_k = r_{k+2}.$$

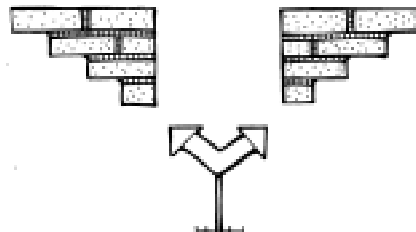
Последнее равенство означает, что после заштопывания дыры нумерация элементов ЦД, начиная с a_k , сдвигается на 2 в сторону уменьшения. Локальное масштабирование позволило бы сделать полученные формулы чуть менее громоздкими. А для обыкновенной ЦД они и сами по себе несложны:

$$a'_{k-1} = a_{k-1} + a_{k+1}, b'_k = 1$$

(как и положено), сдвиг нумерации – тот же.

Как и все предыдущие, это преобразование обратимо – дыры можно не только затыкать, но и пробивать. Иногда это полезно, так как последовательность элементов ЦД становится на вид более регулярной.

3. ПОЙДИ ТУДА – НЕ ЗНАЮ КУДА...



Следующее разложение знаменитого числа $e = 2.718281828\dots$ (основания натуральных логарифмов) в цепную дробь $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, \dots]$ (11) (точнее, его начало) возникает при применении алгоритма Евклида, например, к паре чисел (2718281828, 1000000000).



NB! Пробивание дыры в начальном элементе преобразует дробь в $[1; 0, 1, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, \dots]$. Эта последовательность элементов может показаться более регулярной.

Остаток статьи посвящен поискам разложения, аналогичного (11), для показательной функции $\exp(x) = e^x$, иначе называемой *экспонентой*.



NB! Аналогия – понятие расплывчатое. Она, как мы убедимся, не должна быть поверхностной, как в попытках найти русскую замену: «показательница», «показательша», «показуха», «показанта»... для термина «экспонента».

Будем пользоваться обозначением:

$$S(m)f(k) = \sum_{k=m}^{\infty} (f(k)x^k)$$

для сходящихся (или формальных, если сходимости несущественна) степенных рядов, коэффициенты $f(k)$ которых не зависят от x . Для формальных преобразований рядов применимы следующие правила:

$$S(m)f(k) = x S(m-1)f(k+1)$$

(правило сдвига индексации) и

$$S(m)f(k) = f(m)x^m + S(m+1)f(k)$$

(правило выделения первого члена).

Известное разложение экспоненты в степенной ряд

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x^k / k!)$$

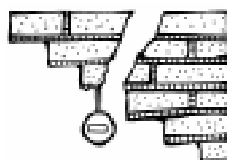
запишется в виде $\exp(x) = S(0)(1/k!)$. Построим несколько первых членов цепной дроби $[a_0; a_1, \dots, a_k, \dots]$, где любой элемент a_k – это либо целое положительное число, либо имеет некоторый иной вид.



NB! Идея, что в задаче о разложении степенного ряда в цепную дробь элементы могут быть целыми числами, не слишком обоснована.

«Некоторый иной вид» – это, например, многочлены от $u=1/x$ с рациональными коэффициентами (неполные частные), возникающие при применении алгоритма Евклида к степенным рядам.

4. НАЛЕВО ПОЙДЕШЬ...



Ближайшая цель – наметить метод и создать базу для установления общего вида членов.

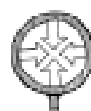


Из исходного ряда $S(0)(1/k!)$ выделяется начальный (нулевой) элемент

$a_0 = x^0/0! = 1$ и остаток $S(1)(1/k!)$. Чтобы подвести эти операции под общую схему действий с ЦД, примем, что мы имели

дело с дробью $\frac{S(0)(1/k!)}{1}$, и приняли за

начальный элемент ее целую часть. Остаток после выделения этой части следует обратить (поменять местами числитель со знаменателем), чтобы получить *очередную* или *текущую* дробь, подвергаемую таким же действиям. Взгляд на выражение (11) и некоторый опыт по разложению в цепные дроби чисел вида $\exp(r)$, где r – рационально, дают основание предположить, что подобные шаги объединяются в серии по три шага в каждой. Так оно и окажется.



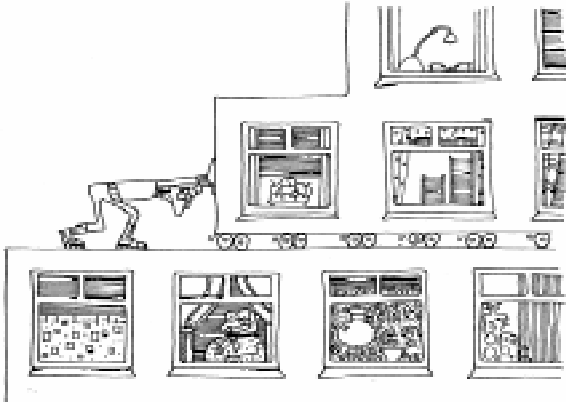
NB! Если очень к этому стремиться.

Числители дробей, обрабатываемых в m -й серии, обозначим p_m , q_m и r_m , а получаемые элементы ЦД – a_m , b_m и c_m .

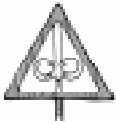
Таким образом, у дроби, из которой предстоит выделить очередной элемент на первом шаге первой серии, числитель p_1 – это 1, а знаменатель q_1 – это $S(1)(1/k!)$.

На каждом шаге, независимо от его номера в серии, будем придерживаться стратегии, которую подробно объясним на примере первой серии.

Старший член числителя p_1 совпадает с самим числителем, а старший член знаменателя q_1 – это x . Отношение $a=1/x$



старших членов становится кандидатом на роль очередного элемента ЦД, а кандидатом на роль остатка r_1 – ряд $p_1 - a q_1 = 1 - (1/x)S(1)(1/k!) = 1 - S(0)(1/(k+1)!) = -S(1)(1/(k+1)!)$ (в вычислениях использовано сначала правило сдвига, а потом правило выделения первого члена). Этот кандидат неприемлем из-за его знака. Можно было бы рассмотреть и такой вариант, но это шло бы вразрез с обычным ограничением на знаки элементов (см. [1]).



NB! Тем не менее, пройдя некоторый отрезок намеченного пути, мы в разделе 7 вернемся на эту развилку.

Поэтому уменьшим элемент на 1, приняв $a_1 = 1/x - 1$. Следующий шаг исполним над дробью с числителем q_1 и со знаменателем $r_1 = p_1 - a_1 q_1$ или (необходимые вычисления уже частично выполнены)

$$\begin{aligned} r_1 &= 1 - (1/x - 1)S(1)(1/k!) = \\ &= 1 - (1/x)(x + S(2)(1/k!)) + S(1)(1/k!) = \\ &= S(1)(1/k! - 1/(k+1)!) = \\ &= S(1)(k/(k+1)!). \end{aligned}$$

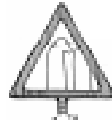
Выбор в качестве следующего элемента отношения старших членов q_1 и r_1 , равного 2, снова привел бы к появлению отрицательного остатка. Поэтому примем $b_1 = 1$ и получим такую следующую дробь:

$$\begin{aligned} p_2 &= q_1 - b_1 r_1 = S(1)(1/k! - k/(k+1)!) = \\ &= S(1)(1/(k+1)!). \end{aligned}$$

Это значение становится знаменателем очередной дроби (для третьего шага серии) при числителе r_1 . Здесь выбор $c_1 = 1$ к осложнениям не приводит, так как значение

$$\begin{aligned} q_2 &= r_1 - c_1 p_2 = \\ &= S(1)(k/(k+1)! - 1/(k+1)!) = \\ &= S(1)((k-1)/(k+1)!) = \\ &= S(2)((k-1)/(k+1)!). \end{aligned}$$

положительно. Появление суммы $S(m)f(k)$ с нулевым первым членом $f(m)$ характерно для последнего шага серии.



NB! А почему только для последнего?

В следующей серии все события повторяются. Не углубляясь в подробности, мы получаем:

$$\begin{aligned} a_2 &= 3/x - 1, \\ r_2 &= p_2 - a_2 q_2 = S(1)((k-1)k/(k+2)!) = \\ &= S(2)((k-1)k/(k+2)!), \\ b_2 &= 1, \quad p_3 = q_2 - b_2 r_2 = \\ &= S(2)(2(k-1)/(k+2)!), \\ c_2 &= 1, \quad q_3 = r_2 - c_2 p_3 = \\ &= S(2)((k-2)(k-1)/(k+2)!). \end{aligned}$$

Пусть для некоторого m установлено, что

$$a_m = (2m-1)/x - 1, \quad b_m = c_m = 1, \quad (12)$$

$$r_m = S(m)(k!/((k-m)!(k+m)!)), \quad (13)$$

$$p_m = S(m)(m(k-1)!/((k-m)!(k+m)!)), \quad (14)$$

$$q_m = S(m+1)((k-1)!/((k-m-1)!(k+m)!)) = xS(m)(k!/((k-m)!(k+m+1)!)). \quad (15)$$

Докажем, что эти выражения сохраняют силу при замене m на $m+1$. Старшие члены p_m и q_m – это

$$m!x^m/(2m)! \quad \text{и} \quad m!x^{m+1}/(2m+1)!,$$

их отношение (кандидат на роль a_{m+1}) равно $(2m+1)/x$. На роль p_{m+1} претендует величина

$$\begin{aligned} p_m - ((2m+1)/x)q_m &= \\ &= S(m)((k-1)!/((k-m)!(k+m+1)!)) * \\ & * ((m(k+m+1) - (2m+1)k)) = \\ &= S(m)((k-1)!/((k-m)!(k+m+1)!)) * \\ & * (m+1)(m-k) < 0. \end{aligned}$$

Претензии необоснованы (знак остатка не тот), поэтому положим

$$a_{m+1} = (2m+1)/x - 1$$

и добавим (спереди) слагаемое q_m к вычисленному значению:

$$\begin{aligned} r_{m+1} &= S(m+1)((k-1)!/ \\ & ((k-m)!(k+m+1)!(k-m) * \\ & * (k+m+1-m-1))) = \\ &= S(m+1)(k!/((k-m-1)!(k+m+1)!)). \end{aligned}$$

Отношение старших членов q_m и r_{m+1} равно 2, но величина $q_m - 2r_{m+1}$ вновь отрицательна, что заставляет взять $b_{m+1} = 1$, а это приводит к результату

$$\begin{aligned} p_{m+1} &= q_m - r_{m+1} = \\ &= S(m+1)((k-1)! / ((k-m-1)!(k+m)! - k! / \\ &((k-m-1)!(k+m+1)!)) = \\ &= S(m+1)((k-1)! / ((k-m-1)!(k+m+1)!)). \end{aligned}$$

Наконец, положив $c_{m+1} = 1$, придем к формуле:

$$\begin{aligned} q_{m+1} &= r_{m+1} - p_{m+1} = S(m+1)((k-m-1) * \\ &* (k-1)! / ((k-m-1)!(k+m+1)!)) = \\ &= S(m+2)((k-1)! / ((k-m-2)!(k+m+1)!)) \end{aligned}$$

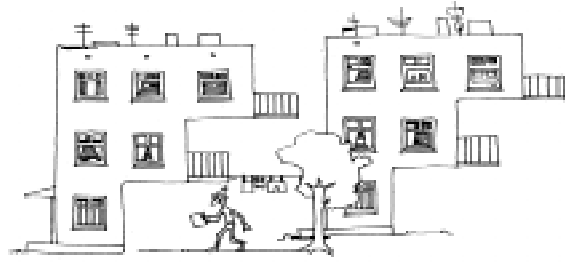
(мы сначала отбросили нулевой начальный член, а в членах для $k > m + 1$ сократили дробь на $k-m-1$).

Материал для базы индукции у нас был накоплен с избытком, и формулы (12), (13), (14) и (15) можно считать справедливыми для любого m .

5. ПОДХОДЯЩИЕ ДРОБИ (РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ)



В этом разделе вернемся к обозначениям a_i для элементов ЦД, а p_i и q_i будут обозначать числители и знаменатели *подходящих дробей*. Поскольку элементы ЦД – это линей-



ные многочлены от $u=1/x$ с целыми коэффициентами (в нашем примере две трети этих многочленов сводится к константам 1), то и p_i и q_i будут многочленами, степень которых увеличивается на 1 через каждые три шага по i .

В таблице 1 подходящих дробей эти многочлены представлены списками своих коэффициентов, так что, например, $a_1 = q_1 = u - 1$, $p_1 = u$.

Наибольший интерес представляют подходящие дроби с номерами, кратными трем. Они предшествуют тем, где степень числителя и знаменателя дроби возрастает, поэтому именно для них относительная погрешность аппроксимации при уже достигнутой степени должна быть особенно мала.

NB! Кроме того, симметрия обычно не только приятна, но и полезна. В данном случае тем, что $q_m(x) = p_m(-x)$, где $m = [(i+2)/3]$, так что с точностью до знака мы имеем дело лишь с одним набором коэффициентов.



i	a_i	p_i	q_i
0	1	1	1
1	1, -1	1, 0	1, -1
2	1	1, 1	1, 0
3	1	2, 1	2, -1
4	3, -1	6, 2, 0	6, -4, 1
5	1	6, 4, 1	6, -2, 0
6	1	12, 6, 1	12, -6, 1
7	5, -1	60, 24, 3, 0	60, -36, 9, -1
8	1	60, 36, 9, 1	60, -24, 3, 0
9	1	120, 60, 12, 1	120, -60, 12, -1
10	7, -1	840, 360, 60, 4, 0	840, -480, 120, -16, 1
11	1	840, 480, 120, 16, 1	840, -360, 60, -4, 0
12	1	1680, 840, 180, 20, 1	1680, -840, 180, -20, 1
13	9, -1	15120, 6720, 1260, 120, 5, 0	15120, -8400, 2100, -300, 25, -1
14	1	15120, 8400, 2100, 300, 25, 1	15120, -6720, 1260, -120, 5, 0
15	1	30240, 15120, 3360, 420, 30, 1	30240, -15120, 3360, -420, 30, -1

Таблица 1

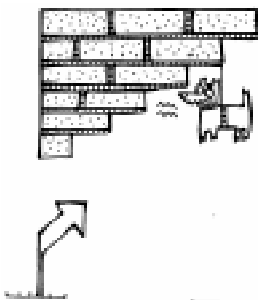
Таблица 2 содержит результаты некоторых вычислений.



NB! Значение 1.6487212707 совпадает с $\exp(0.5)$ вплоть до последнего знака. Однако, значения при $x = 0.5$ нормированных делением на коэффициент $2^m(2m-1)!!$ при старшем члене многочленов p_m (5-й столбец) приближаются к $\exp(x/2)$ довольно медленно.

Для иллюстрации того, что подходящие дроби оправдывают свое название: результат деления полинома p_3 на q_3 – это отрезок степенного ряда с коэффициентами: 1, 1, 1/2, 1/6, 1/24, 1/120, 1/720 и 1/4800 (вместо 1/5040, что дает ошибку в старшем члене $x^7/100800$, близкую к полной фактической ошибке при $x = 1$). Таким образом, набор из четырех коэффициентов (из них лишь три независимы) обеспечивает существенно более высокую точность приближения, чем набор из семи коэффициентов степенного ряда.

6. НАПРАВО ПОЙДЕШЬ ...



Накопленный материал подсказывает общий вид коэффициентов многочленов p_m и q_m для выделенных выше особо строк с номерами $i = 3m$:

$$p_m(u) = \sum_{j=0}^m \frac{(2m-j)!}{j!(m-j)!} u^{m-j}$$

(в выражении для q_m те же коэффициенты стоят при $(-u)^{m-j}$). Таблица 1 изобилует примерами, а несложное доказательство оставляем читателю.



Можно обнаружить следующую связь между тремя последовательными многочленами p_m :

$$\phi_m(u) = (4m-2)u\phi_{m-1}(u) + \phi_{m-2}(u).$$

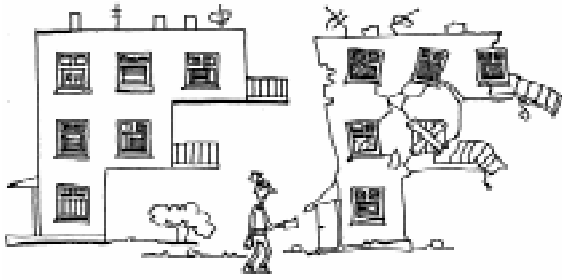
Она позволяет, начиная со значений $p_0 = q_0 = 1, p_1(u) = 2u + 1, q_1(u) = 2u - 1$, заимствованных из таблицы 1, получить значения всех остальных многочленов p_m и q_m для $m > 1$ с помощью зависимостей (7) при $a_m = (4m - 2)u$.

NB! Огорчает одно: невозможно применить эти же зависимости для $m = 1$ при стандартных значениях p_{-1} и q_{-1} – последнее надо заменить на $q_{-1} = -1$. Соответствующие изменения потребуются внести и в инвариантные соотношения (5) и (6). Как ни незначительны эти изменения, они мешают признать дроби p_m/q_m подходящими в строгом смысле определения (а «нестрогий смысл» – это то же, что «горький сахар»).

Но выход есть – можно сохранить из таблицы 1 только строки $i_0 = 0, i_1 = 3, \dots, i_5 = 15$, в которых мы заинтересованы, не утрачивая соответствия подходящих дробей их определению. Для этого следует провести сжатие ЦД так, как это было

m	$p_m(1)$	$q_m(1)$	$p_m(1)/q_m(1)$	$p'_m(1)$	$q'_m(1)$	$p_m(0.5)/q_m(0.5)$
0	1	1	1.0	1.0	1.0	1
1	3	1	3.0	1.5	0.5	1.67
2	19	7	2.7142857143	1.58	0.58	1.6486
3	193	71	2.7183098592	1.608	0.592	1.6487214
4	2721	1001	2.7182817183	1.620	0.596	1.648721271
5	49171	8089	2.7182818287	1.6260	0.5982	1.6487212707

Таблица 2



описано в разделе 2. Построим необходимые зависимости, руководствуясь данными там схемами.

$$\begin{aligned} \phi_1 &= a_1 \phi_0 + \phi_{-1}, \\ \phi_2 &= \phi_1 + \phi_0 = (a_1 + 1) \phi_0 + \phi_{-1}, \\ \phi_3 &= \phi_2 + \phi_1 = (2a_1 + 1) \phi_0 + 2\phi_{-1}, \\ \phi_{-1} &= 1/2 \phi_3 - (a_1 + 1/2) \phi_0, \\ \phi_2 &= 1/2 \phi_3 + 1/2 \phi_0, \\ \phi_4 &= a_4 \phi_3 + \phi_2 = (a_4 + 1/2) \phi_3 + 1/2 \phi_0, \\ \phi_5 &= \phi_4 + \phi_3 = (a_4 + 3/2) \phi_3 + 1/2 \phi_0, \\ \phi_6 &= \phi_5 + \phi_4 = 2(a_4 + 1) \phi_3 + \phi_0. \end{aligned}$$

Все последующие группы шагов исполняются по одной общей схеме:

$$\begin{aligned} \phi_{3i-6} &= \phi_{3i} - 2(a_{3i-2} + 1) \phi_{3i-3}, \\ \phi_{3i-1} &= 1/2 \phi_{3i} + 1/2 \phi_{3i-3}, \\ \phi_{3i+1} &= a_{3i+1} \phi_{3i} + \phi_{3i-1} = \\ &= (a_{3i+1} + 1/2) \phi_{3i} + 1/2 \phi_{3i-3}, \\ \phi_{3i+2} &= \phi_{3i+1} + \phi_{3i} = \\ &= (a_{3i+1} + 3/2) \phi_{3i} + 1/2 \phi_{3i-3}, \\ \phi_{3i+3} &= \phi_{3i+2} + \phi_{3i+1} = 2(a_{3i+1} + 1) \phi_{3i} + \phi_{3i-3}, \end{aligned}$$

справедливость которой устанавливается по индукции.

Сохранить из всех этих формул необходимо только следующие:

$$\begin{aligned} \phi_3 &= (2a_1 + 1) \phi_0 + 2\phi_{-1}, \\ \text{или, с учетом значения } a_1 \text{ (см. таблицу 1),} \\ \phi_3 &= (2u - 1) \phi_0 + 2\phi_{-1}, \end{aligned} \quad (16)$$

и для произвольного $i > 1$:

$$\phi_{3i} = 2(a_{3i-2} + 1) \phi_{3i-1} + \phi_{3i-2},$$

которая с учетом общего выражения:

$$a_{3i-2} = (2i - 1)u - 1$$

для величины, входящей в коэффициент при ϕ_{3i} , принимает вид:

$$\phi_{3i} = (4i - 2)u \phi_{3i-3} + \phi_{3i-6}, \quad i > 1.$$

В формуле (16) коэффициент при последнем члене отличен от 1, тогда как в (17) он равен 1. Таким образом ЦД для $\exp(x)$ в целом оказывается «возвышенной», пусть из-за одного единственного звена. На емкой записи это отразится так:

$$\exp(x) = \left[1; \frac{2}{(2/x - 1)_+}, \frac{1}{(4k - 2)/x +} \right]_2^\infty. \quad (18)$$

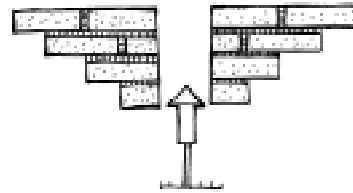
Но из нее можно выделить обыкновенную часть

$$(\exp(x) - 1)/2 = [0; 2/x - 1, (4k - 2)/x]_2^\infty. \quad (19)$$

Полезно убедиться (выборочно), что многочлены с коэффициентами из таблицы 1 вычисляются именно по этим формулам, например,

$$\begin{aligned} q_3 &= 2u - 1 = \\ &= (2(u - 1) + 1) \cdot 1 + 0 = (2a_1 + 1)q_0 + q_{-1}, \\ q_{12} &= 1680u^4 - 840u^3 + 180u^2 - 20u + 1 = \\ &= 14u(120u^3 - 60u^2 + 12u - 1) + (12u^2 - 6u + 1) \\ &= 2(2 \cdot 3 + 1)q_9 + q_6. \end{aligned}$$

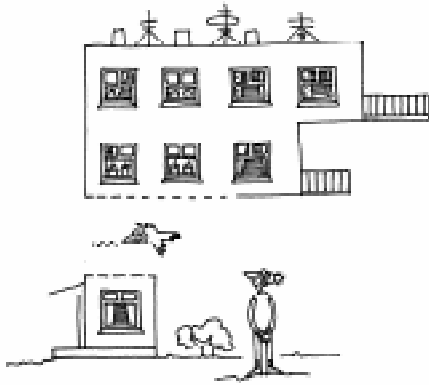
7. ПРЯМО ПОЙДЕШЬ...



Строки таблицы 1 с номерами $3m - 1$ и $3m$ показывают, что эти два шага в каждой серии уходят на борьбу с опрометчивым решением по аналогии, принятым на шаге $3m - 2$.

Мы намекнули в разделе 3, что при разложении в ЦД степенных рядов, а точнее – дробей, у которых в числителе и знаменателе стоят такие ряды, следовало бы пользоваться алгоритмом Евклида для многочленов (годящимся и для степенных рядов), а не маловразумительной комбинацией этого алгоритма с алгоритмом для целых чисел. Определяемый элемент ЦД – это неполное частное от деления числителя очередной дроби на ее знаменатель. Прогресс определяется не знаками коэффициентов, а степенью этих членов. В числителе следует учесть столько начальных членов (обычно два), сколько требуется для получения остатка со степенью, на единицу меньше степени делителя.

Процесс часто сам по себе регулируется – в последовательности остатков нечетные ряды начинают чередоваться с



четными. Тогда из-за обнуления коэффициента второй член элемента ЦД становится «невидимым». Кроме того, желательно, чтобы подобная дробь возникала в задаче более естественно, чем в разделе 4, где за начальную была взята дробь со знаменателем единица.

Все это можно наблюдать на примере разложения в ЦД функции $\exp(x)$, представленной в виде отношения r_0/r_1 , где

$$r_0(x) = \exp(x/2) = \sum_{k=0}^{\infty} (x/2)^k / k!$$

$$r_1(x) = \exp(-x/2) = \sum_{k=0}^{\infty} (-x/2)^k / k!$$

Возникает ЦД:

$$\exp(x) = [1; u-1/2, 12u, 5u, 28u, 9u, \dots]$$

$$\dots a_{2j} = 4(4j-1)u, a_{2j+1} = (4j+1)u \dots], \quad (20)$$

не столь изящная, ($a_{2k} = (4k-2)u$ для $k > 1$), как ожидалось в конце раздела 5. Но она порождает ту последовательность подходящих дробей, к которой мы там стремились (лишь с чуть иной нормировкой числителя и знаменателя дробей с нечетными номерами), и избавляет от всех упомянутых неприятностей. Можно попытаться нормировать эту дробь, прежде всего «возвсив» ее запись:

$$\exp(x) = \left[1; \frac{1}{u-1/2}, \frac{1}{12u}, \frac{1}{5u}, \frac{1}{28u}, \frac{1}{9u}, \dots \right],$$

а затем вернуться к переменной x и сделать более регулярной последовательность коэффициентов.



NB! Программисту не всегда противопоказано гнаться сразу за двумя зайцами, но и осторожность тоже не бывает излишней.

Для этого надо применить такую последовательность множителей: $c_1=2x$ (к b_1, a_1 и b_2), $c_2=x/2$ (к новому b_2, a_2 и b_3), $c_3=2x, c_4=x/2, \dots$

Получим:

$$\exp(x) = \left[1; \frac{2x}{-x+2}, \frac{x^2}{6}, \frac{x^2}{10}, \frac{x^2}{14}, \frac{x^2}{18}, \dots \right].$$

Это разложение порождает следующую последовательность подходящих дробей

$$1, \frac{x+2}{-x+2}, \frac{x^2+6x+12}{x^2-6x+12}, \frac{x^3+12x^2+60x+120}{-x^3+12x^2-60x+120}, \dots$$

Она знакома нам по выборке из таблицы 1, хотя и с обратным, что естественно, порядком коэффициентов.

Почти такое же, но недонормированное, разложение (18) экспоненты в ЦД нашлось в результате трудов, не вполне праведных, лишь в конце раздела 6.

Его можно было получить из (20) в результате глобальной нормировки (см. раздел 2) с $c_{2i-1}=2, c_{2i}=1/2$. Впрочем, здесь термин «нормировка» не вполне уместен. Он больше подходит к варианту с $c_{2i-1}=1/2, c_{2i}=2$, когда ЦД (18) преобразуется в (20).

ЭПИЛОГ

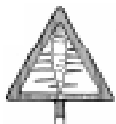
В [3, статья «Цепная дробь»] сказано, что еще Л. Эйлеру в 1737 г. было известно разложение (в обозначениях из [1]):

$$\frac{e-1}{2} = [0; 1, 6, 10, 14, \dots] = [0; 1, 4k-2]_2^{\infty}$$

(как, по-видимому, и разложение (19), частным случаем которого оно является).

Спустя два века этот результат стал в числе многих прочих достоянием широкого круга математиков, о чем свидетельствует превосходная книга А.Н. Хованского [4].

Но в оба эти источника автор удосужился заглянуть уже после того, как все описанное в разделе 4 было проделано и таблица 1 построена. Выход из огорчительного положения, изложенный во второй части раздела 6, и весь раздел 7 только тогда и возникли.



В! Программист! Никогда не верь тому, что твоя программа, после того как она «заработала правильно» – это верх совершен-

ства. Следуй завету Козьмы Пруtkова («Зри в корень» – кто позабыл), и ты убедишься, что корень, из которого она выросла, может оказаться весьма хилым.

Литература.

1. А.Я. Хинчин. Цепные дроби / 2-е изд. М.–Л.: ГТТИ, 1949.
2. Э. Мендельсон. Введение в математическую логику / Пер. с англ., 3-е изд. М.: Наука, 1984.
3. Математическая энциклопедия, т. 5. М.: «Советская энциклопедия», 1984, 1284 стб.
4. А.Н. Хованский. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М.: ГТТИ, 1956.



Наши авторы, 2001.
Our authors, 2001.

*Лавров Святослав Сергеевич,
доктор технических наук,
профессор.*