

Совертков Петр Игнатьевич  
Шаламов Александр Павлович

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПЛОСКОГО, ШАРНИРНОГО, ЧЕТЫРЕХЗВЕННОГО МЕХАНИЗМА НА ЭКРАНЕ КОМПЬЮТЕРА

Многие учащиеся связывают свою судьбу с техникой. Проектирование механизмов является одним из главных направлений подготовки большинства инженеров.

Кинематика плоского четырехзвенного механизма достаточно подробно изучена в [2–5]. В настоящей статье изучается метод геометрического анализа механизма, что позволяет изображать механизм в движении.

Пусть звено  $AD = d$  является неподвижным (рисунок 1). Оно называется стойкой. Звенья  $AB = a$  и  $CD = c$  могут вращаться вокруг точек  $A$  и  $D$ , соответственно. Пусть звено  $AB$  является ведущим и вращается вокруг точки  $A$ , что вызывает движение остальных звеньев  $BC$  и  $CD$ .

При вращении стержня  $AB$  вокруг точки  $A$  точка  $B$  движется по окружности  $\omega(A, a)$ . Стержень  $BC = b$  постоянной длины приводит в движение точку  $C$  и вызывает вращение звена  $CD$  вокруг неподвижной точки  $D$ . Поэтому точка  $C$  движется по окружности  $\omega(D, c)$ .

Если звено  $AB$  может совершить полный оборот вокруг оси, то оно в механике называется кривошипом. Если наименьшее звено  $a$  является кривошипом,

то его длина в сумме с самым длинным звеном  $d$  будет меньше суммы длин остальных звеньев  $b$  и  $c$  (правило Грасгофа), то есть  $a+d < b+c$ .

Если звено вращается вокруг оси, но не может совершить полный оборот, то оно называется коромыслом.

Для компьютерного моделирования вводим четыре длины звеньев механизма. Основной проблемой при моделировании является наложение условий на длины звеньев и определение типов механизмов, чтобы определить величину угла поворота  $\alpha$  ведущего звена.

а) **Кривошипно-коромысловый механизм** (рисунок 2): ведущее звено  $a$  – кривошип, совершает полнооборотное вращение, звено  $b$  – плоскопараллельное движение, а ведомое звено  $c$  – коромысло, выполняет качательное (возвратно-вращательное движение, неполнооборотное вращение). Этот механизм имеет многочисленные применения. Например, в приводе нефтяной качалки. Такой механизм может применяться также для преобразования качательного движения во вращательное.

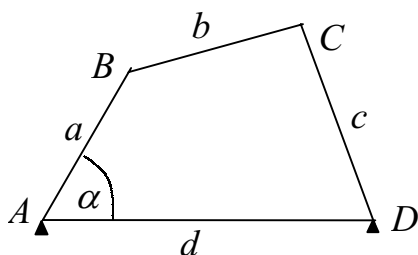


Рисунок 1

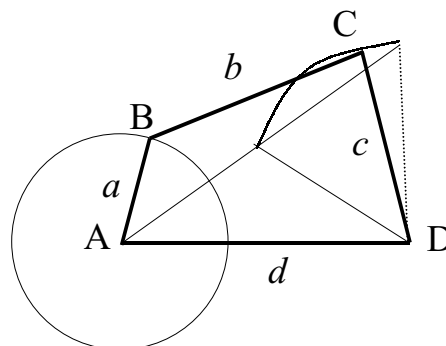
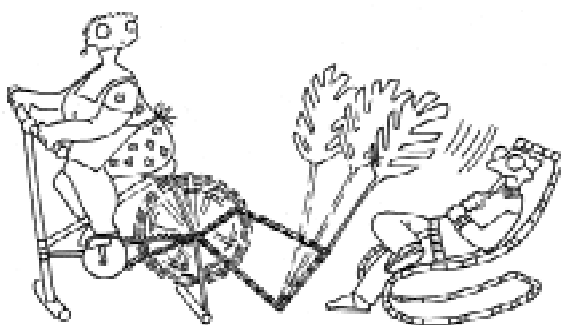


Рисунок 2



*Кривошипно-коромысловый механизм...*

Примером применения этого механизма в обратном направлении, то есть коромыслово-кривошипного механизма является русская прялка, в которой качательное движение ногой педали преобразуется во вращательное движение большого колеса прялки, а затем передается на вращение шпульки для намотки ниток.

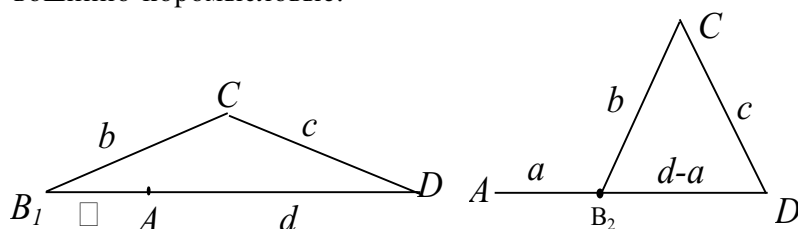
Для предельных положений (рисунок 3), когда точки  $A, B, D$  расположены на одной прямой, условия на стороны треугольника определяются из системы:

$$\begin{cases} |b-c| < a+d < b+c, \\ |b-c| < |d-a| < b+c. \end{cases}$$

При этих условиях звено  $AB$  является кривошипом. Чтобы звено  $DC$  было коромыслом, необходимо, чтобы выполнялись условия  $|d-c| < a+b < d+c$ . Итак, кривошипно-коромысловый четырехзвенный механизм задается условиями

$$\begin{cases} a+d < b+c, \\ |b-c| < |d-a|, \\ |d-c| < a+b < d+c. \end{cases} \quad (1)$$

Угол  $\alpha$  принимает любые значения. Например, механизмы (60, 90, 80, 100), (40, 60, 60, 45) удовлетворяют условиям (1), и эти механизмы работают как кривошипно-коромысловые.



**Рисунок 3**

В [1] приведен пример кривошипно-коромыслового механизма с условиями

$$\begin{cases} a < c < b < d, \\ a+b < d+c. \end{cases} \quad (2)$$

Механизм (40, 60, 50, 90) удовлетворяет условиям (2), но звено  $AB$  не может совершить полный оборот, так как нарушено условие  $a+d < b+c$ . Наверно, для механизма с условиями (2) предполагается автоматическое выполнение правила Грасгофа, что не отражено в [1].

б) **Двухкривошипный механизм** (рисунок 4) является другой разновидностью шарнирного четырехзвенного механизма: у него сумма длин самого короткого звена  $d$  и самого длинного  $a$  меньше суммы двух остальных звеньев  $b+c$ . Такие механизмы преобразуют равномерное вращение ведущего звена  $a$  в неравномерное вращение ведомого звена  $c$ . Если длины противолежащих звеньев одинаковые (то есть на рисунке 4 имеем параллелограмм), то выходное звено также будет вращаться равномерно.

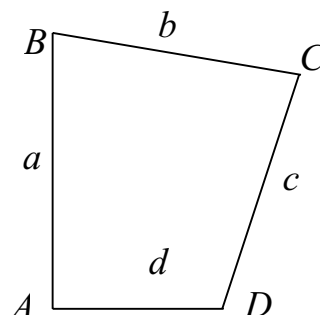
Звено  $AB$  является кривошипом при условии

$$\begin{cases} a+d \leq b+c, \\ |d-a| \geq |b-c|. \end{cases}$$

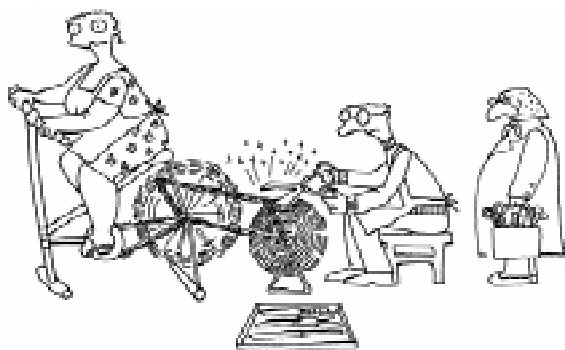
Аналогично, звено  $DC$  является кривошипом при выполнении условия

$$\begin{cases} c+d \leq a+b, \\ |d-c| \geq |b-a|. \end{cases}$$

Оба звена являются кривошипами, если выполняется условие



**Рисунок 4**



Двухкривошипный механизм...

$$\begin{cases} a+d \leq b+c, \\ c+d \leq a+b, \\ |d-a| \geq |b-c|, \\ |d-c| \geq |b-a|. \end{cases} \quad (3)$$

Пример такого механизма (40, 60, 60, 40).

Параллелограмм  $a = c, b = d$  является частным случаем двухкривошипного механизма. Пример работающего механизма – параллелограмма (40, 60, 40, 60).

При  $a = d, b = c$  механизм в [1] назван ромбодом. В геометрии такая фигура часто называется дельтоидом. Дельтоид (40, 60, 60, 40) является двухкривошипным механизмом, а дельтоид (40, 40, 60, 60) является кривошипно-коромысловым механизмом.

Пример работающего двухкривошипного механизма (60, 90, 90, 60). Если левое звено  $a$  этого механизма совершает два оборота, то правое звено  $c$  совершает один оборот.

В [1] приведен пример двухкоромыслового механизма с условием

$$\begin{cases} a > c > b > d, \\ a+d < b+c. \end{cases} \quad (4)$$

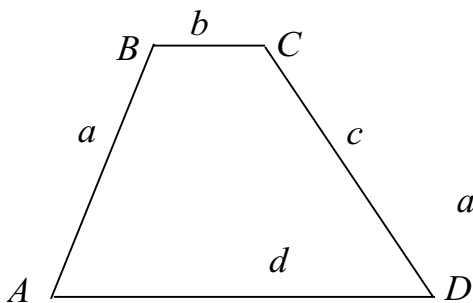


Рисунок 5

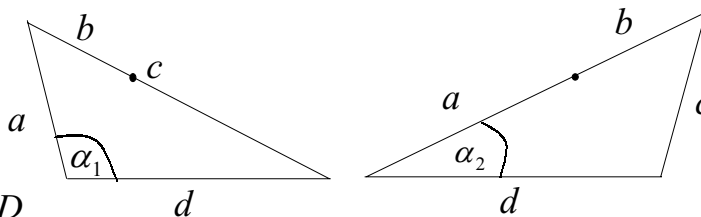


Рисунок 6

Пример механизма (100, 80, 90, 60), удовлетворяющего условиям (4).

Из неравенств (4) следует выполнение условий (3).

В самом деле:

$$\begin{cases} a > c \\ b > d \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \Rightarrow a+b > c+d, \\ a-d > c-d > c-b, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a-d > c-d, \\ b+c > a+d, \\ b+c-(b+d) > a+d-(b+d), \\ c-d > a-b. \end{aligned}$$

Условия (3) являются более общими, чем условия (4).

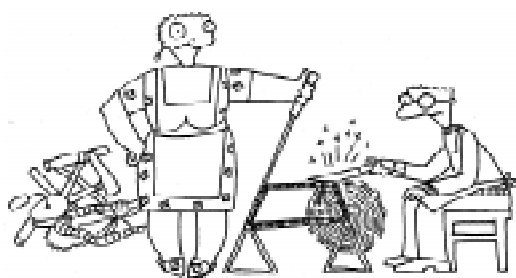
в) **Двухкоромысловый механизм** является третьей разновидностью четырехзвенного механизма (рисунок 5), у которого размеры звеньев не удовлетворяют правилу Грасгофа или самое короткое звено не является кривошипом. Такие механизмы используются для передачи на необходимое расстояние качательного движения.

В двухкоромысловом механизме имеются две мертвые зоны (рисунок 6). Возможны различные случаи.

в<sub>1</sub>) Угол  $\alpha$  изменяется в пределах  $[\alpha_2, \alpha_1]$ :

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 &= \frac{a^2 + d^2 - (b+c)^2}{2ad}, \\ \cos \alpha_2 &= \frac{(a+b)^2 + d^2 - c^2}{2d(a+b)} \end{aligned}$$

Условие существования двухкоромыслового механизма типа в<sub>1</sub>:



Двухкоромысловый механизм...

$$\begin{cases} |a-d| < b+c < a+d, \\ |c-d| < a+b < d+c. \end{cases}$$

в<sub>2</sub>) Рассмотрим случай, когда стержень  $a$  совершает колебания с углом  $\alpha$ , где  $\alpha \in [\alpha_0, 2\pi - \alpha_0]$  (рисунки 7, 8).

В двухкорымысловом механизме возможна остановка механизма по причине  $BD < |CD - BC|$  (рисунок 8) даже после прохождения мертвой зоны. Например, для механизма (40, 20, 50, 30).

Наложим условия:

$$\begin{aligned} |b-c| < t, \\ b^2 + c^2 - 2bc < a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha. \end{aligned}$$

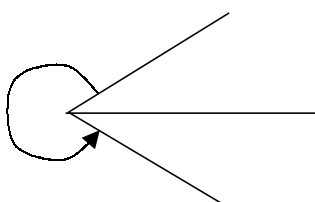


Рисунок 7

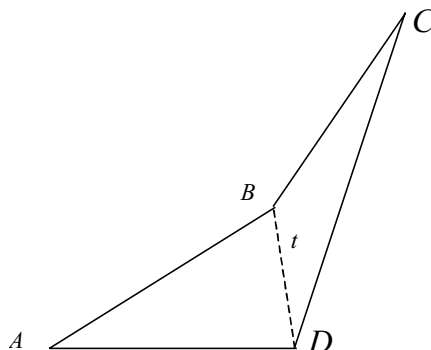


Рисунок 8

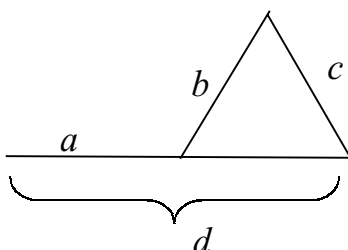
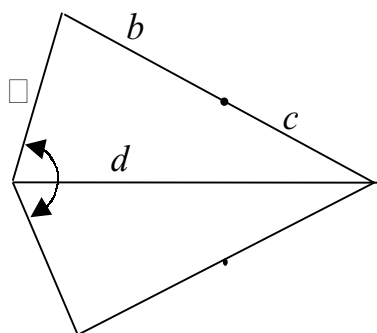


Рисунок 9

Откуда получаем, что при

$$|a-d| < |b-c|$$

двухкорымысловый механизм совершает колебания, причем,

$$\alpha \in [\alpha_0; 2\pi - \alpha_0], \text{ где}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{\sqrt{4a^2d^2 - (a^2 + d^2 - (b-c)^2)^2}}{a^2 + d^2 - (b-c)^2}$$

Пример работающего механизма (90, 70, 100, 80).

в<sub>3</sub>) Пусть механизм совершает колебания с углом  $\alpha$ , где  $\alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0]$  (рисунок 9).

Выполняются условия

$$\begin{cases} |a-d| < b+c < a+d, \\ |b-c| < |d-a| < b+c. \end{cases}$$

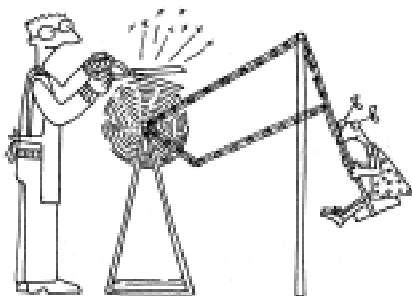
$$\cos \alpha_0 = \frac{a^2 + d^2 - (b+c)^2}{2ad}.$$

Пример работающего механизма (40, 40, 40, 80) с острым углом  $\alpha_0$ , (40, 40, 70, 80) – с тупым углом и (80, 50, 50, 60) – с прямым углом.

г) **Корымыслово-кривошипный механизм:** ведущее звено  $a$  совершает качение, а ведомое звено является кривошипом и совершает полный оборот.

Заменяя звенья  $a \leftrightarrow c$ , получаем кривошипно-корымысловый механизм. При программировании следует поменять переменные  $a$  и  $c$  и вывести сообщение на экран компьютера об этой замене. Пример работающего механизма (80, 90, 60, 100).

На диске можно познакомиться с анализом движения четырехзвенного механизма в общем виде и программой построения этого движения.



*Кориолисово-кривошипный механизм...*

#### **Литература.**

1. Артоболевский И.И. Механизмы в современной технике. М.: Наука, 1979, т.1.
2. Вульфсон И.И. и др. Механика машин. М.: Высшая школа, 1996.
3. Иосилевич Г.Б., Строганов Г.Б., Маслов Г.С. Прикладная механика. М.: Высшая школа, 1989.
4. Попов С.А., Тимофеев Г.А. Курсовое проектирование по теории механизмов и механике машин. М.: Высшая школа, 1999.
5. Юкало П.А. Аналитический синтез четырехзвенного механизма. М., Машиностроение, 1981.



Наши авторы, 2001.

Our authors, 2001.

*Совертков Петр Игнатьевич,  
канд. физ.-матем наук,  
доцент Нижневартковского  
государственного педагогического  
института (НГПИ).*

*Шаламов Александр Павлович,  
студент факультета информатики  
и математики НГПИ.*