Ампилова Наталья Борисовна

МЕТОД НЬЮТОНА: ЗНАКОМЫЙ И НЕОЖИДАННЫЙ

ЛОКАЛЬНЫЙ МЕТОД НЬЮТОНА

Продолжая разговор о фрактальных структурах и приводящих к появлению таких структур процессах, мы обратимся к хорошо известному в математике методу Ньютона.

Этот алгоритм позволяет приближенно находить корни уравнения $f(x)=0$, где в левой части стоит функция вещественной переменной *x*, заданная и непрерывная вместе с производной на некотором отрезке.

Рассмотрим такую функцию $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Пусть корень x^* отделен на этом отрезке, то есть на этом отрезке других корней нет. Найдя какое-нибудь приближение к корню, мы можем задать итерационный процесс, сходящийся к корню, с помощью следующей формулы

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (*)$$

Геометрически метод Ньютона эквивалентен замене небольшой дуги кривой $y=f(x)$ касательной, проведенной в некоторой точке этой дуги. Поэтому метод Ньютона также известен как метод касательных. В [1] приведены условия, при которых (при удачном выборе начального приближения) метод Ньютона сходится к корню исходного уравнения.

Приближенное вычисление корня в случае, когда он отделен от остальных корней, является локальным методом Ньютона. Рассмотрим теперь всю вещественную прямую и находящиеся на ней корни искомого уравнения. Естественно возникает вопрос, как найти начальные приближения к корням и что будет, если они выбраны произвольно. Иначе говоря, где лежат точки, которые могут быть взяты за начальные приближения к корням уравнения.

Давайте обратимся к формуле (*). Это рекуррентная формула, описывающая некоторый итерационный процесс. Мы уже знакомились с такими объектами. Можно рассматривать соотношение (*) как дискретную динамическую систему, для которой пространством состояний является вещественная прямая. Обозначим $Nf(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, то есть *Nf* – функция Ньютона для исходной функции *f*. Поведение такой системы в значительной степени определяется существованием у нее неподвижных и периодических точек. Заметим, что корни уравнения $f(x)=0$ соответствуют неподвижным точкам отображения *Nf*.

Определим множества S_1, S_2, S_3 следующим образом:

$S_1 = Nf^{\,n}(x)$ – это множество, содержащее все точки, итерации которых сходятся к нулям функции $f(x)$.

S_2 – множество точек, для которых m-я итерации на некотором шаге приводят к нулям функции $f'(x)$.

$S_3 = R \setminus (S_1 \cup S_2)$, то есть все остальные точки.

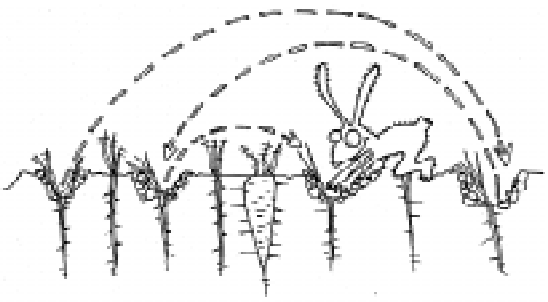
Барна установил следующий результат.

Теорема [2].

Пусть $f(x)$ полином степени *n*, *n*>3, причем все его корни вещественны и различны. Тогда S_3 канторово множество.

Канторово множество часто связано с хаотическим поведением (как мы видели при изучении логистического отображения). Так что метод Ньютона как дискретная динамическая система может проявлять и хаотические свойства.

Барна получил и другие не менее интересные результаты. Например, он по-



строил примеры полиномов с комплексными корнями, для которых множество S_3 является открытым интервалом. Вообще, тематике исследования метода Ньютона посвящено достаточное количество работ. К сожалению, их понимание требует более основательной математической подготовки.Тем не менее, интересно привести примеры функций (см. [3]), для которых их функции Ньютона имеют периодические орбиты (то есть метод Ньютона циклится). Рассмотрим многочлены

$f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 23x$ и

$g(x) = 11x^6 - 34x^4 + 39x^2$.

Для них функции Ньютона имеют периодические орбиты (-1, 1), то есть

$Nf(-1) = 1, Nf(1) = -1$.

Действительно, это нетрудно проверить. Например, для функции $f(x)$ функция Ньютона имеет вид

$$Nf(x) = x - \frac{3x^5 - 10x^3 + 23x}{15x^4 - 30x^2 + 23},$$

и легко проверить, что

$Nf(-1) = 1, Nf(1) = -1$.

ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ К НЕПОДВИЖНЫМ ТОЧКАМ

С методом Ньютона связано много глубоких и интересных проблем. Одна из них – задача Кэли.

Задача Кэли.

Рассмотрим комплексный полином $p(z)$. Требуется разделить плоскость на области притяжения к корням полинома, то есть на такие части, что, взяв произвольную точку в такой области, мы с помощью итераций по методу Ньютона пришли бы к точке A, такой, что $p(A)=0$.

Ответ известен только для полинома второй степени. Заметим, что полином вида $az^2 + bz + d$ с помощью простой замены переменной приводится к виду $z^2 - c$, так что можно считать, что мы сразу имеем дело с уже приведенным многочленом. Итак, корни полинома $p(z) = z^2 - c$ равны $\pm\sqrt{c}$. Соединим эти корни отрезком и проведем перпендикуляр через его середину. Тогда все точки, лежащие слева от перпендикуляра, при действии функции Ньютона притягиваются к корню $-\sqrt{c}$, все точки, лежащие справа, стремятся к корню $\sqrt{c}$.

Однако уже для полинома третьей степени такое красивое решение получить не удается. Тем не менее, можно промоделировать эту задачу и построить с помощью компьютера искомые области.

Рассмотрим полином $f(z) = z^3 - 1$. Его корни легко определяются и равны $1, \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, соответственно. Так как $f'(z) = 3z^2$, итерационный процесс по методу Ньютона принимает вид $z_{n+1} = z_n - \dfrac{z_n^3 - 1}{3z_n^2} = \dfrac{2z_n}{3} + \dfrac{1}{3z_n^2}$. Полагая $z = x + iy$ и разделяя вещественную и мнимую части, получаем систему уравнений двух вещественных переменных x_n, y_n следующего вида

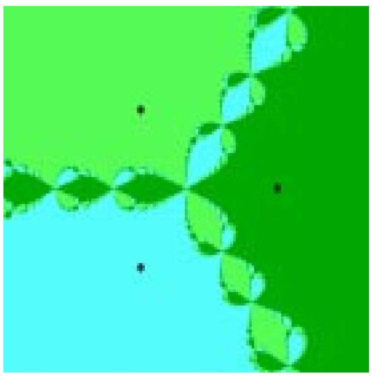


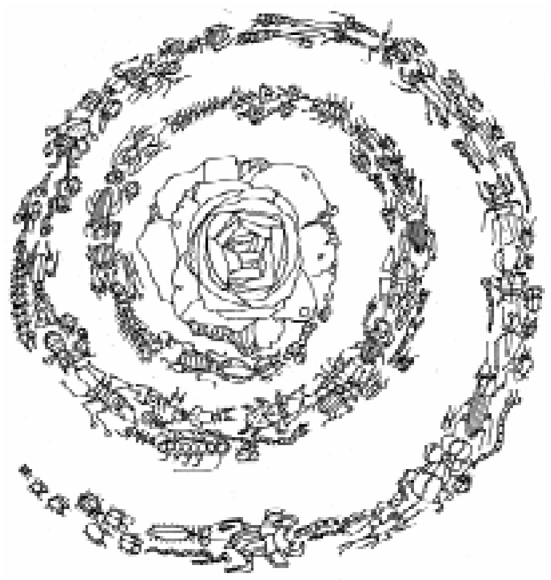
Рисунок 1

$$x_{n+1} = \frac{2x_n}{3} + \frac{1}{3}\frac{x_n^2 - y_n^2}{(x_n^2 + y_n^2)^2},$$

$$y_{n+1} = \frac{2y_n}{3}\left(1 - \frac{x_n}{(x_n^2 + y_n^2)^2}\right).$$

Теперь возьмем на плоскости область, содержащую единичную окружность, и построим на ней достаточно мелкую сетку (то есть разобьем ее на маленькие квадратики или прямоугольники с длиной стороны $\le h$, где h – заданное число).

Для каждой вершины полученной сетки построим ее итерации по методу Ньютона. Если через определенное число шагов расстояние между очередной итерацией выбранной точки и каким-либо корнем исходного уравнения становится достаточно малым, значит, выбранная точка лежит в области притяжения этого корня. Проделаем эту процедуру для каждой точки сетки. Поскольку наше уравнение имеет 3 корня, выбранная область разобьется на области притяжения к этим корням. На рисунке 1 показано полученное разбиение. Хорошо видно, как сложно расположены эти области. По такому же способу решается задача для n корней.



...разделить плоскость на области притяжения к корням полинома...

Литература.

1. Б.П.Демидович, И.А.Марон. Основы вычислительной математики. М., 1966г.

2. D.Saari, J.Urenko. Newton’s method, circle maps and chaotic motion. Amer.Math.Monthly 91(1984), 3-17.

3. M.Hurley and C.Martin. Newtom’s algorithm and chaotic dynamical systems. SIAM J.Math.Anal. 15(1984), 238-252.

Ампилова Наталья Борисовна,
доцент кафедры дифференциальных уравнений мат.-мех. факультета СПбГУ.