Волкова Наталия Александровна
Верозубов Антон Павлович
Замилов Антон Валерьевич

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ФРАКТАЛОВ

ПОНЯТИЕ О ФРАКТАЛАХ

Фрактал (в буквальном переводе «дробняк») – термин, введенный Бенуа Мандельбротом в 1975 году – *самоподобный* объект, то есть объект, состоящий из частей, каждая из которых подобна целому или его части.

Можно дать и другое определение фракталов как объектов, обладающих *дробной размерностью*, не совпадающей с топологической размерностью (размерность линии – 1, квадрата – 2, куба – 3; это число независимых координат для задания этих объектов). Фракталы занимают промежуточное положение между кривыми и плоскими фигурами, между плоскими фигурами и пространственными телами, что-то вроде бесконечно густых сеток или губок. Примеры таких объектов известны в математике с 19-го века.

1. Кривая (снежинка) Кох.

На рисунке 1 приведены первые 5 шагов построения для отрезка и общий вид кривой для исходного треугольника в пределе при $n \to \infty$.

2. Кривая Пеано.

На рисунке 2 приведены первые 6 шагов построения.

3. Ковры Серпинского.

На рисунке 3 приведены первые три шага построения.

ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ

Все эти геометрические объекты получаются с помощью бесконечного итерационного процесса.

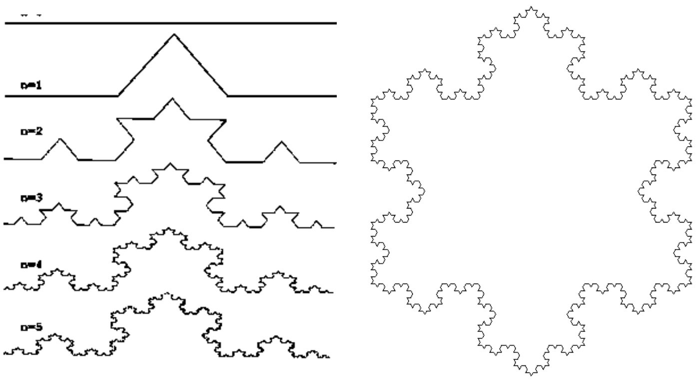

Рисунок 1

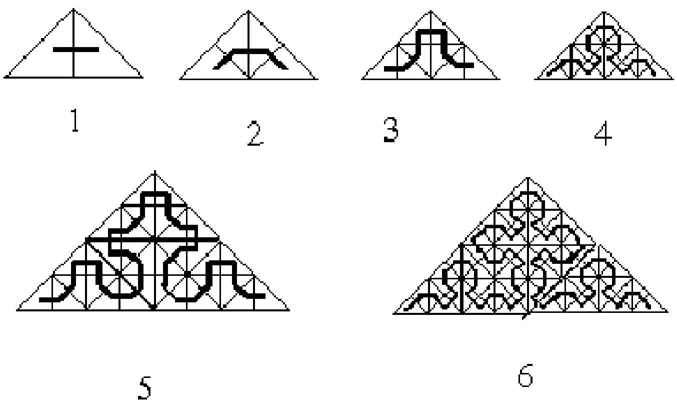

Рисунок 2

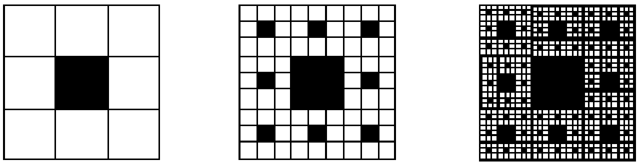

Рисунок 3

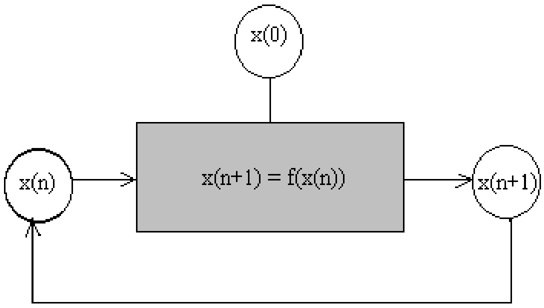

Схема 1

Итерационные процессы, или *процессы с обратной связью*, в которых одна и та же операция f повторяется раз за разом и результат предыдущей является начальным значением для последующей, могут быть проиллюстрированы схемой 1.

Примером итерационного процесса в математике может служить метод последовательных приближений для вычисления корней уравнения.

В приведенных выше примерах операция f представляет собой деление на n частей (для кривых Кох и ковров Серпинского $n = 3$, для кривой Пеано $n = 2$) и стандартное геометрическое построение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗМЕРНОСТИ ФРАКТАЛА

Существует несколько способов вычисления размерности фракталов. Самый простой, легко иллюстрируемый на вышеприведенных примерах, такой: размерность фрактала равна отношению логарифмов коэффициента изменения меры объекта (длины, площади, объема) и изме[нения] масштаба измерения:

$$k = \frac{\log \mu(N)}{\log N},$$ например,

для квадрата $\frac{\log N^2}{\log N} = 2$;

для куба $\frac{\log N^3}{\log N} = 3$,

где N – коэффициент уменьшения масштаба, $\mu(N)$ – коэффициент изменения меры объекта (длины, площади, объема) в новых масштабных единицах. Для кривой Кох размерность равна $\frac{log\,4}{log\,3} = 1{,}261...$

ПРИРОДНЫЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ

Природа дает массу примеров подобных объектов: облака, купы деревьев, сосульки и их каменные собратья–сталактиты, береговая линия, коралловые рифы, снежинки, листья папоротника, морозные рисунки зимой на стекле и многое другое (рисунок 4).

Все они – результаты *природных итерационных процессов*. Лист дерева разворачивается из концевой почки на ветке, выросшей из предшествующей и т.д. При росте сосульки от таяния снега очередная капля воды, попадающая на сосульку, намерзает на нее, лишь едва заметно изменяя ее форму. Подобно этому происходит рост коралловых рифов, послойный рост кристаллов из растворов и т.д. и т.п. На каждом шаге процесса ветка, сосулька, коралл, кристалл изменяются, оставаясь подобными себе. Если присмотреться, то примеры развития так[их] [про]цессов можно продолжать бес[конечно] ... [п]рода конструирует свои ... [с помо]щью небольшого ч[исла] ... [...]тов и

Рисунок 4

простого итерационного принципа. Именно это сумел разглядеть Б.Мандельброт, который так и назвал свою книгу «Фрактальная геометрия природы» (1982).

СРАВНЕНИЕ ПРИРОДНЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ С МАТЕМАТИЧЕСКИМИ

Отличие самоподобных природных объектов от математических объектов – фракталов, состоит в том, что все природные объекты состоят из *конечного числа частей*, и условие бесконечности числа самоподобий нарушается, в то время как понятие фрактала подразумевает, что процесс деления на подобные части бесконечен. Здесь мы имеем дело с проявлением *принципа математической абстракции*, которая достраивает свойства реального объекта до свойств идеального объекта. Никто не видел плоскость как «бесконечную протяженность, не имеющую толщины», но это не мешает использовать понятие плоскости при решении различных задач. Говорить о том, что фракталов в природе не существует, потому что нет бесконечного самоподобия, также неправомерно. Можно говорить о том, что природные объекты обладают фрактальной структурой, то есть некоторой совокупностью свойств, присущей фракталам.

Объекты, в которых нарушено условие бесконечности ряда самоподобий иногда называют предфракталами. Если мы оборвем построение кривых Кох, Пеано и т.д. на каком-либо шаге, мы получим предфракталы. Все природные объекты в этом смысле являются предфракталами.

В качестве примера предфракталов можно рассмотреть несколько поколений кривой, которая в пределе называется *«драконом» Хартера-Хейтуэя* (рисунок 5).

Пусть образующим элементом будут два равных отрезка, соединенных под прямым углом. В нулевом поколении заменим единичный отрезок на этот образующий элемент так, чтобы угол был сверху. При построении следующих поколений выполняется правило: каждое звено прогибается в противоположную сторону, нежели предыдущее. Самое первое слева звено заменяется на образующий элемент так, чтобы середина звена смещалась влево от направления движения, и смещения середин отрезков должны чередоваться. На рисунке 5 представлены первые 5 поколений и 11-е.

Рисунок 6 иллюстрирует метод построения сложных изображений с помощью фракталов, который носит название *фрактального морфинга*. Это способ построения графических объектов, при котором они не хранятся в памяти компью-

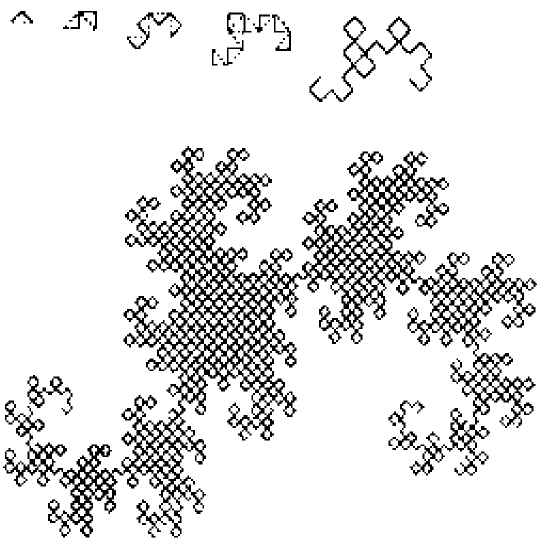

Рисунок 5

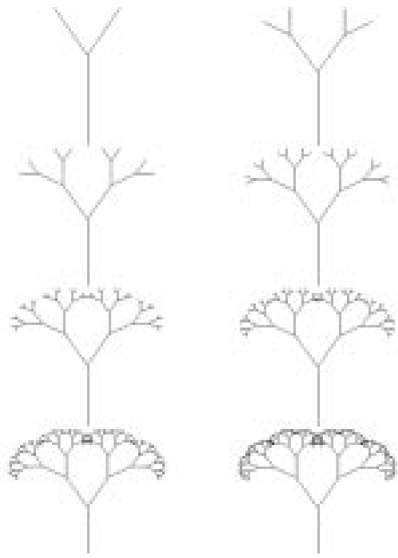

Рисунок 6

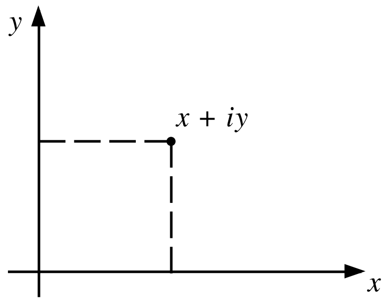

Рисунок 7

тера, а строятся с помощью итерационных соотношений. Это не только экономит ресурсы, но и позволяет добиваться необычных художественных эффектов.

Еще одна отличительная особенность природных фракталов – незначительные, часто случайные вариации параметров повторяющейся операции: если в алгоритме построения кривой Кох отрезок всегда делится строго на 3 части, то в природе капли, падающие на сосульку, могут варьироваться по весу, температуре, частоте падения т.п. Математическими аналогами подобных конструкций являются *статистические фракталы*, получаемые в результате итерационного процесса со случайно изменяемыми параметрами.

ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Как математически описать эти процессы и структуры? Этим вопросом заинтересовался профессор Гарвардского университета Бенуа Б. Мандельброт. Обратившись к трудам своих предшественников французских математиков Гастона Жюлиа (1893–1978) и Пьера Фату (1878–1929), которые в начале 20-го века исследовали вопрос о сходимости итерационных процессов на действительной оси, он сделал то же, что сделал в 19-м веке Б. Риман: чтобы получить ответы на сложные вопросы о свойствах функций действительного переменного, он перешел на комплексную плоскость. Мандельброт сделал и следующий шаг – упростил до предела правило итерационного перехода. Те удивительно красивые картинки, с которыми часто ассоциируются фракталы и которые вызывают «белую зависть» дизайнеров к математикам, появились как «побочные продукты» в процессе решения следующей простой задачи.

Рассмотрим комплексную плоскость – множество чисел вида:

$z = x + iy$, где i – мнимая единица (рисунок 7).

Зададим движение некоторой фиксированной точки z_0 с помощью простейшего итерационного процесса, именно:

$z_{n+1} = z_n^2 + c$, где

n – номер положения точки,

c – комплекснозначный параметр процесса,

z_0 – начальное положение точки.

При $c = 0$ наблюдается примерно следующая картина (рисунки 8, 9).

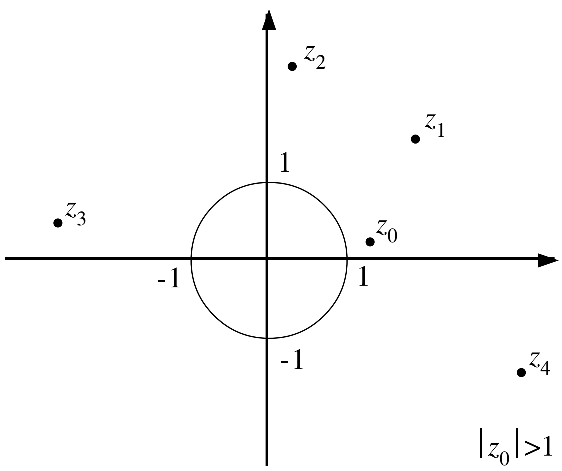

Рисунок 8

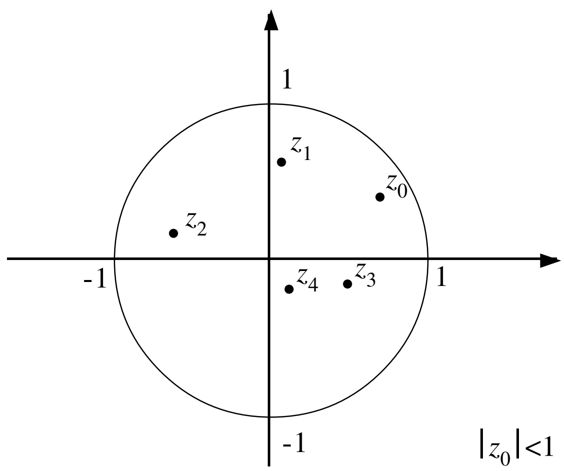

Рисунок 9

Где будет «точка-путешественница» z_0 после достаточно большого числа шагов n? Аналитически ответ можно получить только в одном, самом простом, случае: при $c = 0$ все точки z_0, лежащие внутри единичного круга, «сжимаются» в точку 0, вне круга «убегают» на бесконечность, а лежащие на единичной окружности – крутятся по ней в хаотическом порядке.

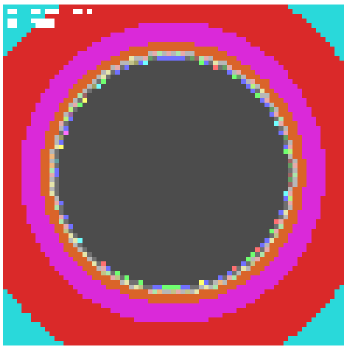

Рисунок 10

ПОНЯТИЕ ОБ АТТРАКТОРАХ

Черным цветом на рисунке 10 изображены точки, «забившиеся» после достаточно большого числа шагов в 0, а другими цветами – «убежавшие» в бесконечность.

Точки, в данном простом случае – 0 и ∞, которые являются целью путешествия для наших точек, «притягивают» наши точки, называются *аттракторами*. Точку ∞ мы представляем в виде окружности бесконечного радиуса с центром в точке 0.

МНОЖЕСТВА ЖЮЛИА И ПЫЛЬ ФАТУ

Мандельброт попросил своего знакомого программиста для учебных целей сделать несколько компьютерных программ, которые бы показали процесс притягивания точек для произвольных значений c. Тогда-то они и увидели на экране своего «допотопного» компьютера (дело было в далеком 1980 году, когда только-только появились первые персональные компьютеры) красивые картинки – *множества Жюлиа*, представляющие из себя границу раздела точек, убегавших на бесконечность, и точек, притягивающихся к конечным точкам-аттракторам.

Множества Жюлиа, как видно на рисунке 11, в зависимости от значения c могут быть как связными, то есть каждую пару точек можно соединить непрерывной линией, целиком лежащей в данном множестве, так и не связными, превращаясь в отдельные скопления точек – пыль Фату. Различными цветами выделены области, откуда точки z_0 убегают за определенное число шагов в бесконечность (в вычислительной практике бесконечность – это внешность круга некоторого радиуса). Множества Жюлиа являются типичными фракталами.

МНОЖЕСТВО МАНДЕЛЬБРОТА

Следующий вопрос, который задал себе Мандельброт: определить на плоскости множество значений параметра c – множество M', для которых множество Жюлиа *связно*. Основываясь на результатах Жюлиа и Фату о том, что множества Жюлиа для фиксированного значения c связны тогда и только тогда, когда точка $z_0 = 0$ «не убегает» в бесконечность, он проделал серию вычислительных экспериментов, исследуя поведение уже упомянутой последовательности $z_{n+1} = z_n^2 + c$ при начальном значении $z_0 = 0$ в зависимости от c.

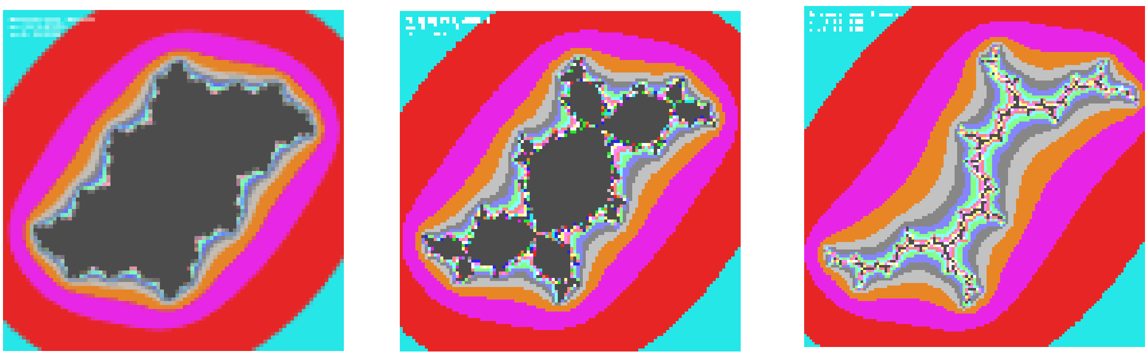

Рисунок 11

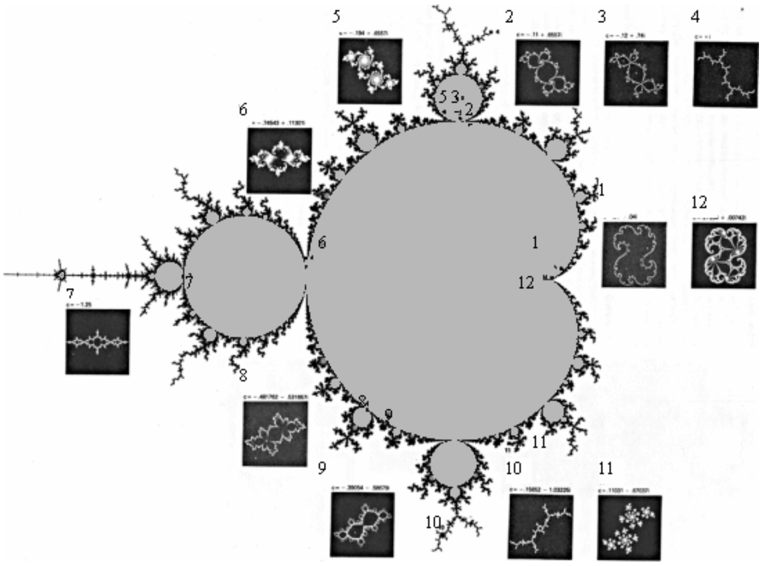

Рисунок 10

стоящей из уменьшенных копий множества Жюлиа, которые получаются при соответствующем значении параметра *c*, взятого в соответствующей области множества Мандельброта. Кроме того, сама эта граница является аттрактором, только необычного вида. Точки при каждом шаге итерации перемещаются, но не покидают границы. Но самое поразительное открытие – это множество универсально, оно не зависит от правила итерационного процесса.

Наконец, как позднее вспоминал Мандельброт, 1 марта 1980 года из еще несовершенного матричного принтера появился листок с пока еще неясным изображением множества, которое впоследствии было названо его именем.

Потребовалось еще два года вычислительных экспериментов и упорных математических исследований, чтобы окончательно разобраться с загадочным множеством Мандельброта. Оно оказалось связным, а его граница – фрактал – со-

На дискете к журналу находится программа, позволяющая «рассматривать» множества Мандельброта и Жюлиа. Используя эту программу, Вы сможете наблюдать все описанные выше эффекты самостоятельно. Перейдя на закладку «Множество Мандельброта» и указав курсором значение *c*, получите на малом экране сначала схематическое черно-белое изображение множества Жюлиа, а затем после цикла итераций и само множество Жюлиа. Цветовой спектр характеризует скорость разбегания точек.

Литература.

1. Mandelbrot B.B. The Fractal Geometry of Nature. Freeman, San-Francisco, 1982.
2. Х.-О. Пайтген, П.Х. Рихтер. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем: пер. с англ. – М.: Мир, 1993.
3. Г. Николис, И. Пригожин. Познание сложно: пер. с англ. – М.: Мир, 1990.

Полезные ссылки.

1. http://www.chat.ru/~fractals/index.htm – «Вселенная фракталов».
2. http://www.iph.ras.ru/~vtar/stszd.htm – «Особенности введения понятия фрактала».
3. http://fractal.mta.ca/sci.fractals-faq/toc.html – «Часто задаваемые вопросы».
4. http://asu.pstu.ac.ru/osp/cw/1996/06/30.html – «Фрактальное сжатие изображений».
5. http://tqd.advanced.org/3120/ – «The Chaos Experience».
6. http://www.fractal.com/ – «Meta Creations – Home Page».

Волкова Наталия Александровна,
доцент кафедры высшей математики ГМА им адм. С.О. Макарова.

Верозубов Антон Павлович,
Замилов Антон Валерьевич,
курсанты ГМА им адм. С.О. Макарова.