Ощепков Андрей Петрович

МНОГОМЕРНОЕ КИНО

Духи имеют четыре измерения
Генри Мор (1614-1687)
(А Шанель даже пять)

Многомерные пространства и многомерные тела, до сих пор окружены ореолом таинственности. Тем, кто далек от геометрии, они представляются заумной абстракцией, которую не увидеть, не пощупать. Однако с подобной задачей каждый уже сталкивался на уроках рисования, черчения и геометрии. Тот, кому нужно куб нарисовать, рисует, тем не менее, шестиугольник (скорее всего, совсем неправильный). Но вполне вероятно, что он постарается изобразить противоположные стороны равными и параллельными. Тем самым, он следует универсальным свойствам проектирования: сохранять равные и параллельные. Именно эти свойства наследуются при проектировании многомерных комплексов. И если построение проекций и сечений многогранников носит подсобный характер – образ очевиден, то в пространствах размерности 4 и выше, оно приобретает характер основного инструмента, позволяющего восстанавливать не вполне ясный образ. Продолжая выяснять универсальные свойства многомерных тел – комплексов, мы обнаруживаем, что в тетраэдре каждая его грань является не только плоской проекцией, но и сечением. И других таких же нет. В кубе, кроме грани, появляется и шестиугольная проекция (сечение), ортогональная любой из главных диагоналей. Пора, видимо, как-нибудь назвать проекции, равные сечениям, например, инвариантами. Бедному октаэдру не досталось внешних инвариантов, но ему вполне хватает и внутреннего квадрата.

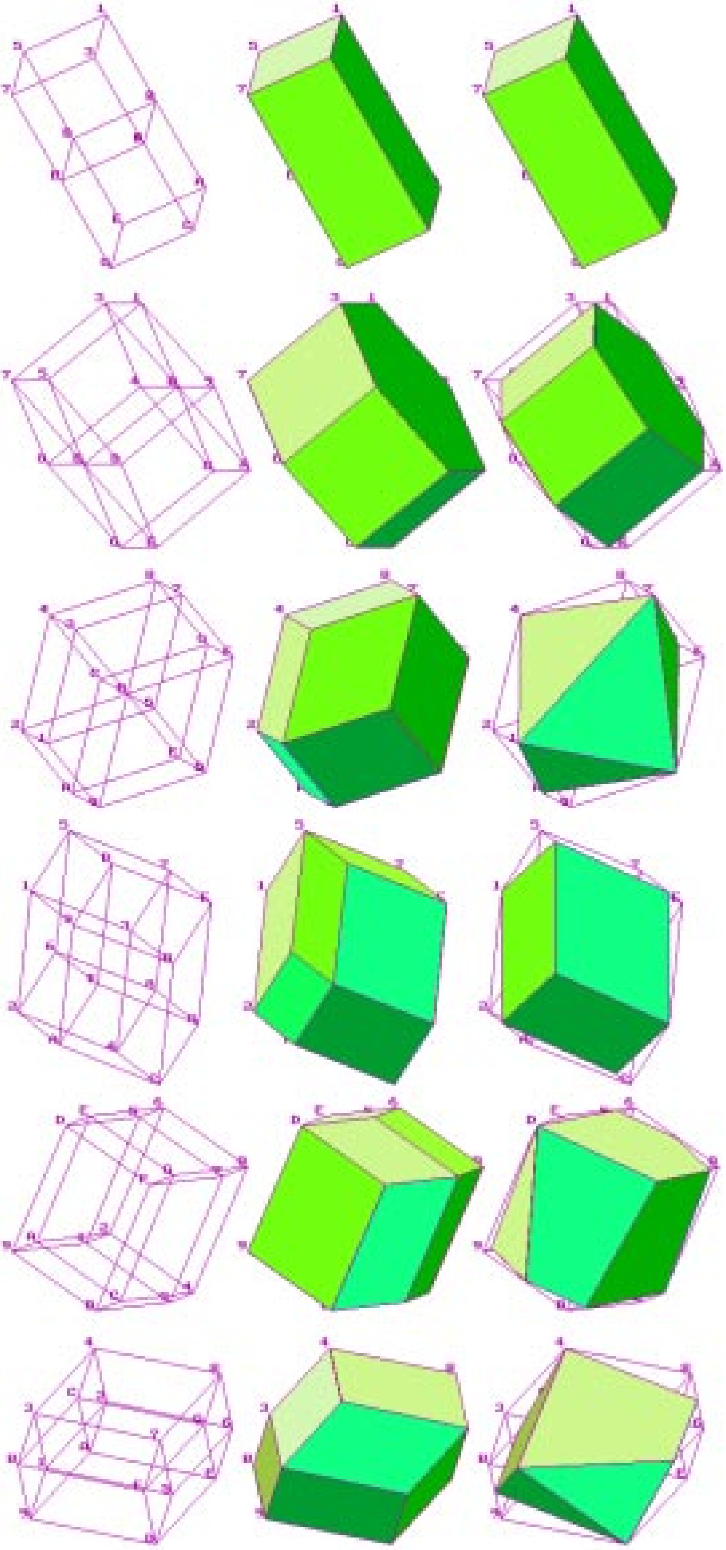
Чтобы рассматривать сечения, необходимо сделать оговорку. Всякое плоское сечение многогранника обладает и соответствующей проекцией на параллельную плоскость. Во избежание путаницы впредь будем рассматривать проекции на те плоскости (пространства и пр.), которыми осуществляются сечения тел.

Индексы Шлефли	вершины	ребра	грани	3-ячейки	название
333	5	10	10	5	4-тетраэдр
433	16	32	24	8	4-куб (8-ячейка)
334	8	24	32	16	4-октаэдр (16-ячейка)
343	24	96	96	24	(24-ячейка)
533	600	1200	720	120	4-икосаэдр (120-ячейка)
335	120	720	1200	600	4-додекаэдр (600-ячейка)

Таблица 1

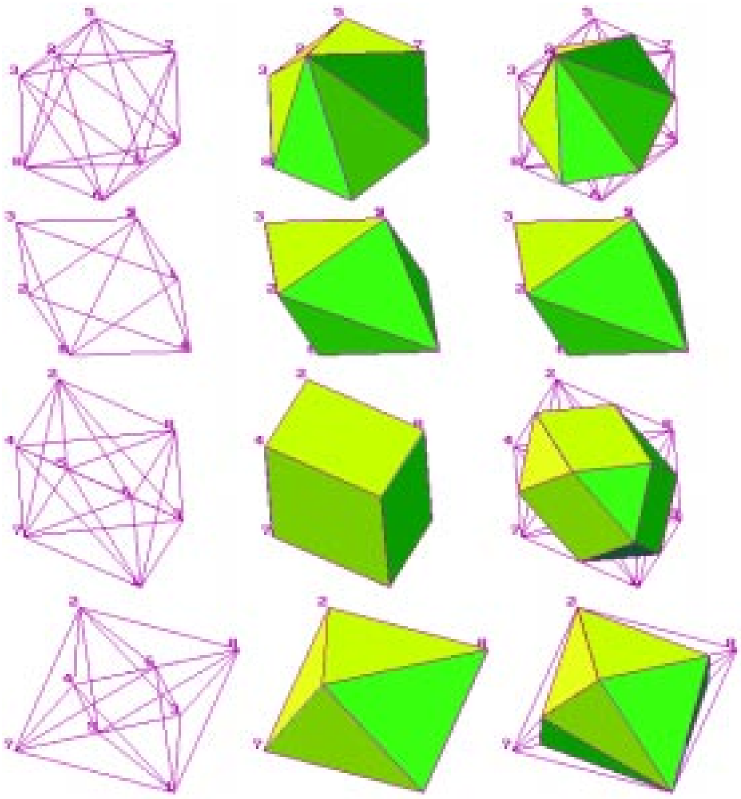
Нормальным «плоским» фотографам иногда долго приходится искать подходящий ракурс. Наша проблема состоит в выборе пространств наблюдения или объемного ракурса.

В 1855 году Шлефли обнаружил, что в четырехмерном пространстве существует 6 комплексов, у которых все граничные многогранники (аналоги граней для трехмерных многогранников) одинаковы. Поэтому их естественно назвать, как и в трехмерном пространстве, – правильными. В отличие от многогранников, кроме вершин, ребер и граней, комплекс характеризуют и пространственные ячейки, соответствующей размерности (многомерные грани). Так, каждая вершина четырехмерной пирамиды принадлежит не только 4-м ребрам, 6-ти граням, но и 3-м разным пирамидам. Тем самым, каждое ребро четырехмерной пирамиды одновременно принадлежит 3-м разным ячейкам-пирамидам. Так же, как каждый правильный многогранник имеет два индекса: количество ребер и граней, примыкающих к каждой вершине, так и четырехмерный комплекс, кроме них, имеет и еще один индекс: количество ячеек, которым принадлежит каждое ребро. Статистика параметров комплексов Шлефли показана в таблице 1.



На рисунках к статье для этих комплексов представлены плоские каркасы, «объемные халаты» – проекции и «объемные панталоны» – сечения.

Не трудно убедиться, что построение вписанного в куб усеченного октаэдра сводится сначала к расширению куба до 4-октаэдра, так что сам куб оказывается некоторым «объемным халатом». Тогда «объемными панталонами» как раз и оказывается обрезанный октаэдр. Кроме того, выясняется, что инвариантом 4-октаэдра является 3-октаэдр, так же как инвариантом 4-куба является 3-куб. А вот 24-ячейка обладает двумя не очевидными инва-

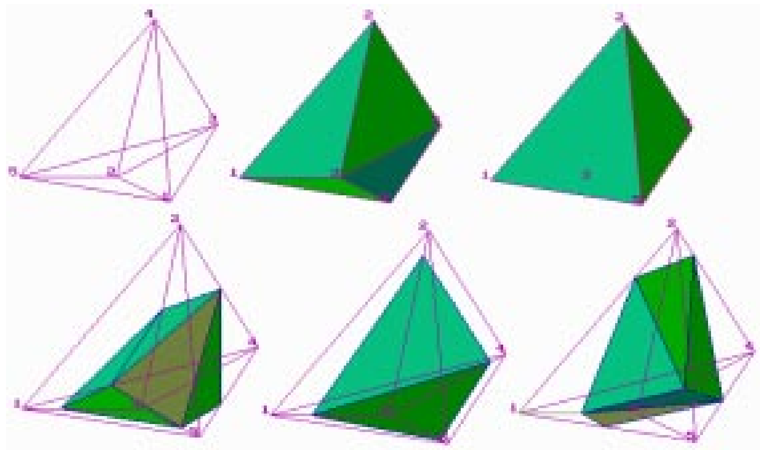


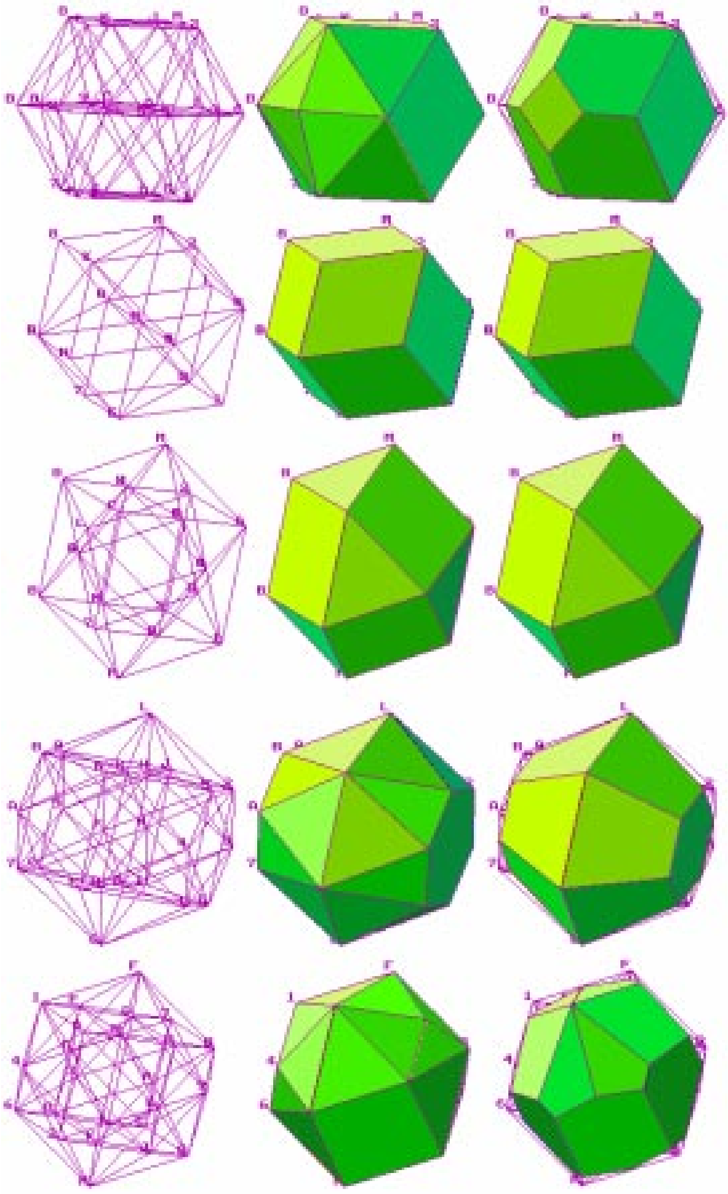
риантами: ромбическим додекаэдром и усеченным октаэдром. Объемные изображения проекций и сечений на первый взгляд допускают некоторую вольность в построении многогранников и их раскраске. Однако стоит только покрутить их, как становится наглядно очевидным, что вся вольность заканчивается после выбора первой видимой грани. Поэтому, вместо изображенных многогранников, можно нарисовать только их зеркальные двойники.

Координаты вершин комплекса вполне его определяют. И, принципиально, по ним можно вычислить все пограничные комплексы, вплоть до ребер и пограничных вершин, однако алгоритмически эта процедура далеко не очевидна. Для многогранников эту задачу решает динамическая процедура вращения комплекса. Если некоторая плоская грань находится в центре плоской проекции, где на эту грань накладываются другие, то, очевидно, ее не так просто выделить. Однако, выбрав подходящее вращение, нетрудно поймать момент, когда эта грань станет пограничной.

Резюме: Выше со всей наглядностью предлагалось уяснить, что многомерная образность состоит вовсе не в конструировании фантастических химер, но в способности различать в некоторых вложенных парах многогранников проекции и сечения одного и того же (комплекса). Различные объемные ипостаси являются только скромными «трехмерными халатами», и, разрезая то, что сидит в таких «халатах», можно обнаружить совершенно неожиданные (на первый взгляд) образы, причем все это может проделать и сам компьютер. Такой премудростью владели, видимо, былинные герои, воевавшие с драконами. Они-то умели рубить головы так, что появлялись новые, доселе невиданные...

На дискете, приложенной к журналу, находится программа PLATON, позволяющая увидеть на экране, как в кино, динамику изменения проекций при вращении многомерных тел. Среди этих тел вы найдете как обычные трехмерные тела (октаэдр, куб, тетраэдр), четырехмерные тела (четырехмерные куб, октаэдр, 24-ячейка), так и 5-мерный и 6-мерный куб.





шенную в зеленый цвет (точнее, ее проекцию на экран).

Посмотрите все «фильмы» и попробуйте представить по ним исходные многомерные тела.

Попробуйте написать программу, которая бы показывала динамику изменения сечения параллельно перемещающейся плоскостью обычного куба. Если это удастся, то можно попробовать сделать программу, демонстрирующую проекцию куба на вращающуюся плоскость (или, наоборот, проекцию вращающегося куба на неподвижную плоскость).

Наконец, если это покажется Вам не трудным, сделайте программу, генерирующую иллюстрации к статье, то есть показывающие динамику изменения сечений и проекций многомерных тел при их параллельном переносе или вращении.

Ну, а если вы преодолеете и это препятствие, попробуйте подтвердить или опровергнуть следующую гипотезу, возникшую при изучении кристаллографии.

Все существующие виды кристаллов в природе являются многомерными проекциями или многомерными сечениями одного единственного, но многомерного тела. Какова минимальная размерность этого тела? Для тех, кто заинтересовался этой проблемой, рекомендуем познакомиться с геометрией кристаллов, например, по книге: Кокстер Г.С.М. Введение в геометрию. М.: Наука, 1966.

Что же вы увидите, если запустите вращение одного из этих тел?

Например, при вращении четырехмерного куба вы увидите вращающийся каркас четырехмерного куба (точнее, его проекцию на экран) и одну из трехмерных граней четырехмерного куба, раскра-

Ощепков Андрей Петрович,
математик-программист.