Гейнц Шуман

КОМПЬЮТЕРНЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУРАХ

Функциональное мышление как цель математического образования было признано почти 100 лет назад (А. Гутцмер [1]). Оно было также принято в качестве центральной идеи в современной математической дидактике (см., например, Ф. Швайгер [2] – «идея функционального варьирования» или Г. Хейман [3] – «идея функциональных связей»). В своей весьма содержательной диссертации «Воспитание функционального мышления. К истории дидактического принципа» К. Крюгер [4] тщательно проанализировала специфическую связь между развитием математического образования и развитием экономики, технологии и науки в обществе.

В настоящее время использование компьютеров в преподавании и изучении математики способствует функциональному мышлению, благодаря возможности динамического представления и обработки разнообразных графических, числовых или алгебраических данных и объектов. Например, пакет Динамические Геометрические Системы (DGS), разработанный для планиметрии, значительно превосходит по своим возможностям традиционные методы изучения геометрических объектов.

Подобные системы обладают также новыми возможностями и в изучении функциональных зависимостей в геометрических фигурах: мы можем производить измерения в фигурах, построенных определенным образом, проверять на основе этих измерений количественные соотношения (например, между длинами, площадями, углами и т.д.), варьируя фигуры с помощью метода drag-and-drop (Х. Шуман [5–7]).

Графическое представление функциональных зависимостей чрезвычайно полезно для их понимания. Поэтому такое представление является существенным моментом в нашем методе исследования функциональных зависимостей в геометрических фигурах. Однако графическое представление является не целью исследования, а скорее стимулом для дальнейшего математического анализа.

Этот метод создает новую связь между геометрией и школьной алгеброй. Цель метода была удачно сформулирована Х. Мертенсом [9]:

«Цель образования состоит не только в усвоении понятия функции, но, гораздо больше, – в достижении такой готовности к восприятию и анализу, при которой достаточно просто взглянуть на результаты варьирования количественных переменных, чтобы увидеть существующую между ними связь».

ОПИСАНИЕ КОМПЬЮТЕРНОГО МЕТОДА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУРАХ

1. Построение геометрической фигуры, для которой заданная величина (результат измерения или его функция) зависит от варьируемой переменной.

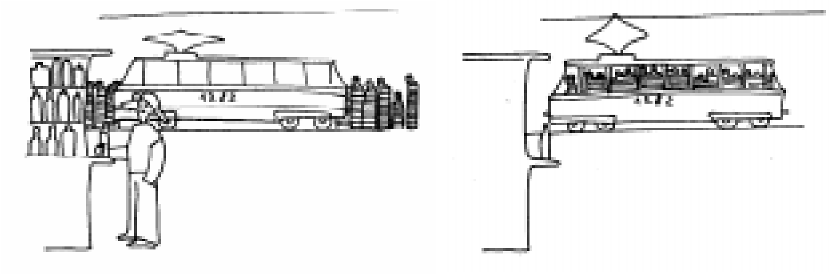
2. Представление функциональной зависимости между зависимой и независимой переменными в виде графика «эмпирической» функции.

3. Интерпретация «эмпирической» функции (также наблюдение над изменением характеристик графика при варьировании параметров фигуры и сравнение с другими графиками).

4. Вывод аналитического выражения, задающего данный «эмпирический» график.

5. Проверка согласия между аналитической и «эмпирической» зависимостями.

6. Обсуждение полученного аналитического выражения (критические точки, точки экстремума и т.д.).



...в качестве независимой переменной выбран внутренний угол параллелограмма...

ЗАМЕЧАНИЯ

• Фигуру нужно строить так, чтобы рассматриваемая величина зависела только от одной переменной, остальные параметры должны оставаться фиксированными.

• Поскольку зависимость описывается функцией одной переменной, перемещаемая точка (например, вершина угла) должна двигаться вдоль некоторой заданной линии так, чтобы изменялся только один параметр.

• График называется эмпирическим, так как порождающая его функция неизвестна.

• Подбор подходящей функции требует владения определенными математическими средствами.

• Экспериментальная проверка найденной функции требует только некоторых навыков работы с компьютерными инструментами.

ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА

В этом параграфе на примере параллелограмма мы описываем несколько задач, решаемых описанным выше методом. Задачи решались в среде Cabri Geometre 2 (Ж. Лаборде, Ф. Белмэйн [8]). Для вывода функционального выражения необходимо владеть основами тригонометрии. Приведенный ниже набор задач на исследование функций был рассмотрен У. Уолтом [10].

В следующих пяти задачах в качестве независимой переменной выбран внутренний угол параллелограмма.

Пример 1.

Как зависят площадь и периметр параллелограмма от угла α, если его стороны a и b постоянны?

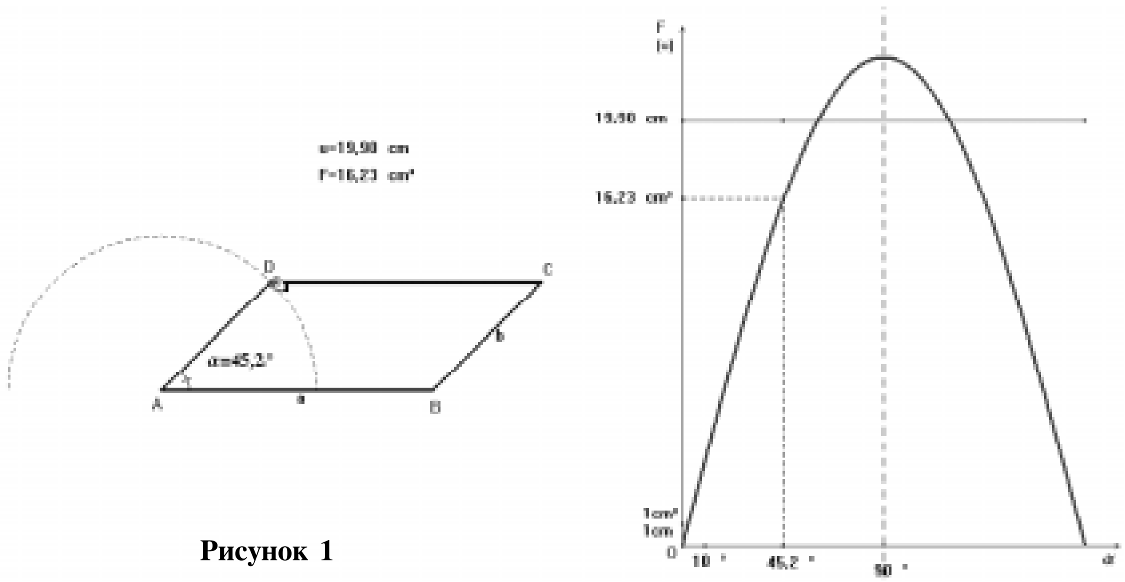
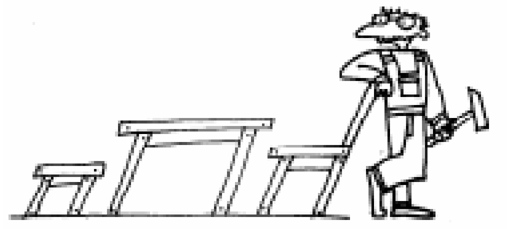


Рисунок 1



Как зависят площадь и периметр параллелограмма от угла а, если его стороны а и в постоянны?

Точка D движется по полуокружности, α изменяется от 0° до 180° (рисунок 1). Эмпирический график показывает постоянство периметра, график площади симметричен относительно $\alpha = 90°$, что подтверждает вид функциональной зависимости:

$F = a_0 \cdot b_0 \cdot \sin(\alpha) \Leftrightarrow y = k \cdot \sin(\alpha)$,

$k > 0$, $\alpha \in [0^o, 180^o]$ и т.д.

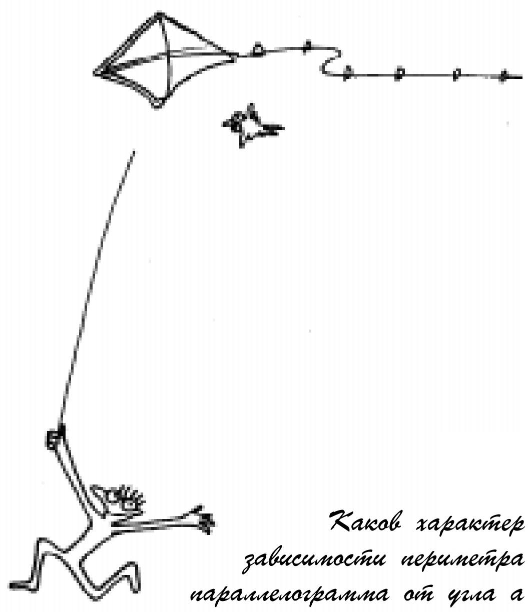
Пример 2.

Каков характер зависимости периметра параллелограмма от угла α при условии, что сторона *а* и соответствующая высота (ширина) остается постоянной?

Эмпирический график симметричен относительно $\alpha = 90°$, имеет минимум при этом значении α. Периметр возрастает до бесконечности, когда α пробегает значения от 0^o до 180^o. Мы получаем функциональную зависимость вида

$$u(\alpha) = 2\left(a_0 + \frac{F_0}{a_0 \sin\alpha}\right),$$

где значение функции минимально, когда $\sin(\alpha)$ максимален, то есть при $\alpha = 90°$.



Каков характер зависимости периметра параллелограмма от угла а при условии, что сторона а и соответствующая высота (ширина) остается постоянной?

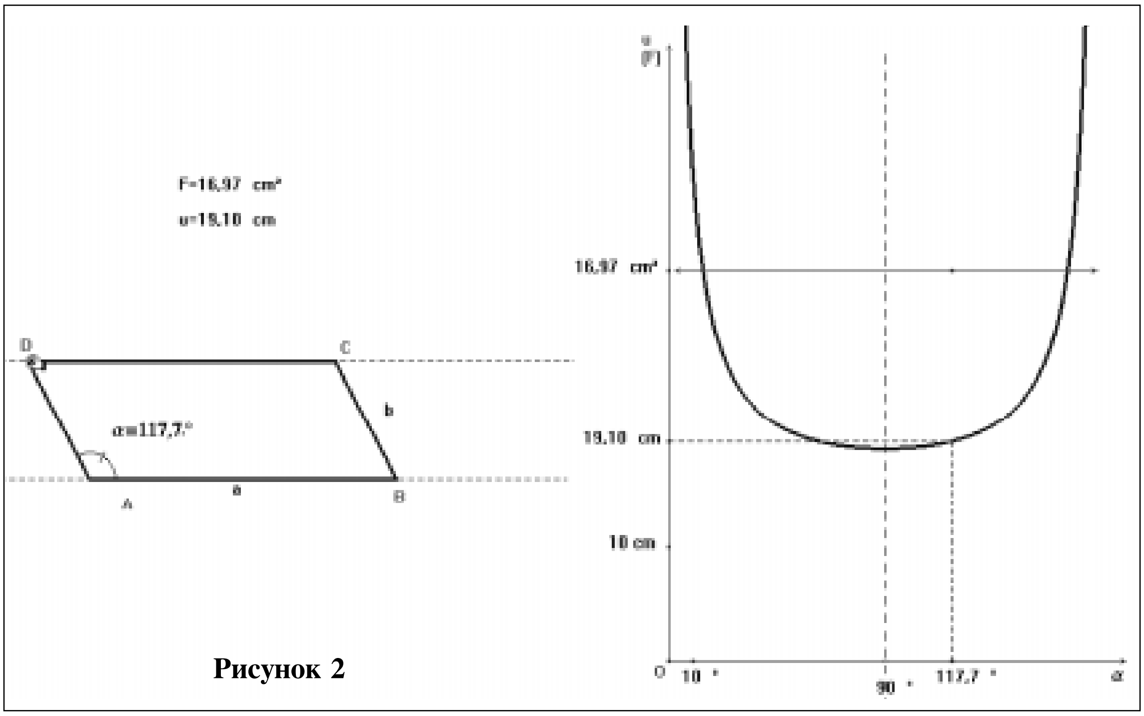


Рисунок 2

Пример 3.

Как изменяются длины диагоналей в зависимости от угла, если стороны a и b остаются постоянными?

Как изменяются длины диагоналей в зависимости от угла, если стороны а и в остаются постоянными?

На рисунке 3 показаны взаимно симметричные графики длин диагоналей e и f, причем $e = f$ тогда и только тогда, когда параллелограмм является прямоугольником. Функция $e(\alpha)$ строго убывающая, а $f(\alpha)$ строго возрастающая. Абсолютные максимумы и минимумы достигаются на границе при $\alpha = 0^{\circ}$ и $\alpha = 180^{\circ}$. Используя теорему косинусов, получаем

$$e(\alpha) = \sqrt{a_0^2 + b_0^2 + 2a_0 b_0 \cos(\alpha)}\,,$$

$$f(\alpha) = \sqrt{a_0^2 + b_0^2 - 2a_0 b_0 \cos(\alpha)}$$

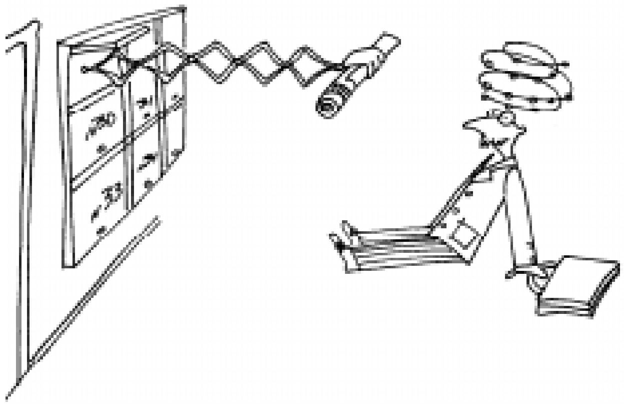
Пример 4.

Как изменяются длины диагоналей в зависимости от угла α, если сторона a и высота постоянны?

На рисунке 4 показаны взаимно симметричные графики длин диагоналей e и f, в которых e или f принимают наименьшее значение, когда AC или, соответственно, BD ортогональны AB. Если α приближается к 0 или 180, то e и f приближаются к бесконечности. Формула для e (аналогично для f) имеет вид

$$e(\alpha) = \sqrt{a_0^2 + \frac{F_0}{a_0 \sin\alpha}\left(\frac{F_0}{a_0 \sin\alpha} - 2a_0 \cos\alpha\right)},$$

e имеет минимум при $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{F_0}{a_0^2}\right)$.



Как изменяются длины диагоналей в зависимости от угла а, если сторона а и высота постоянны?

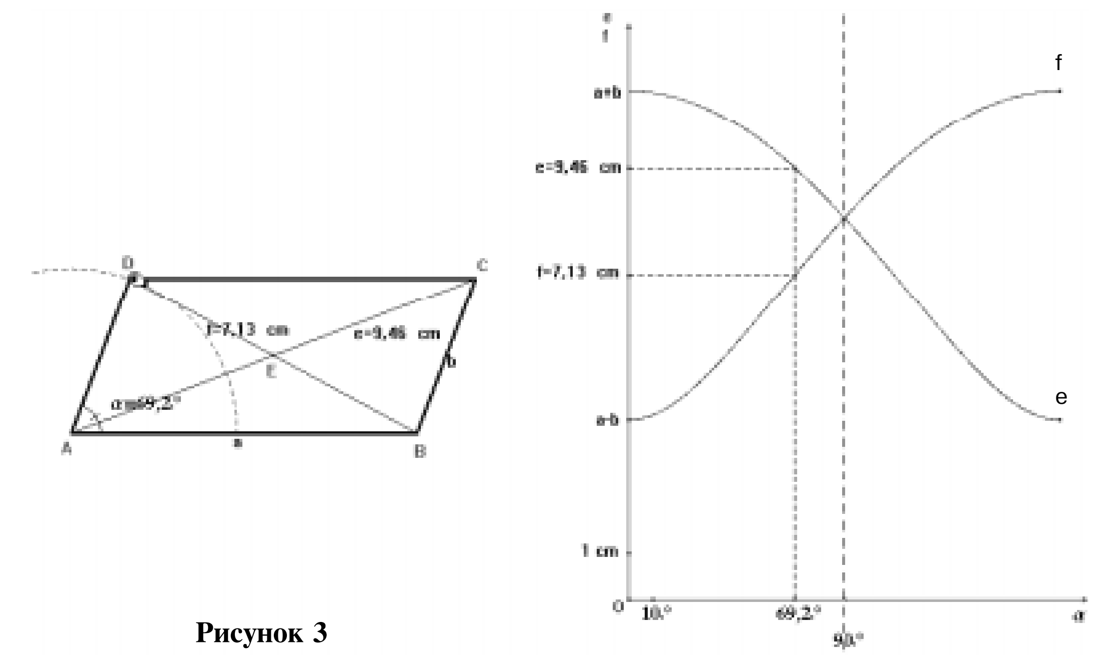


Рисунок 3

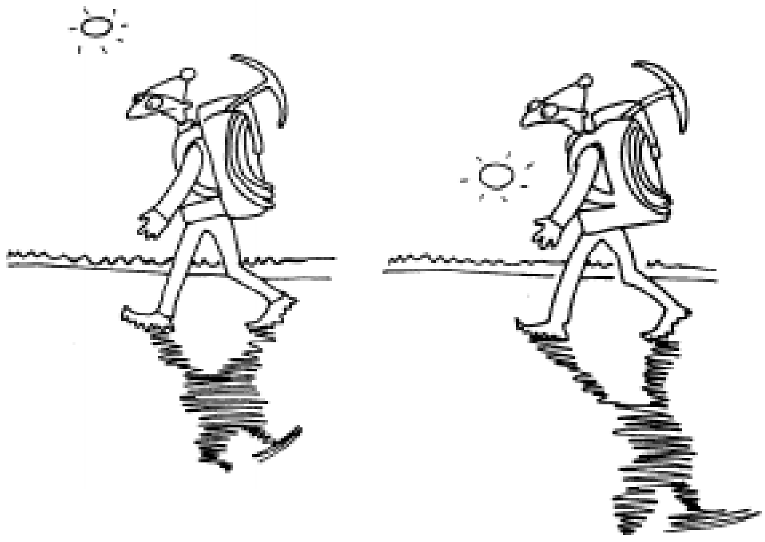
Пример 5.

Как зависит от α угол между диагоналями, если стороны параллелограмма остаются постоянными?

Эмпирический график (рисунок 5) симметричен относительно α=90°, где имеет место минимум. Выражение для функции $\varepsilon(\alpha)$ может быть получено из теоремы косинусов для треугольника ABE. Имеем

$$\varepsilon(\alpha) = \arccos(\frac{e^2 + f^2}{2ef}),$$

где выражения для $e(\alpha)$ и $f(\alpha)$ нужно взять из примера 4.



Как зависит от а угол между диагоналями...

Пример 6.

Как зависит длина отрезка, соединяющего фиксированную точку S внутри параллелограмма с точкой T, дигающейся по сторонам параллелограмма, от угла AST?

Эмпирический график (рисунок 6а, б) содержит 4 ветви (горизонтальная линия возникла при возврате от 360° к 0°). В углах дифференцируемость функции нарушается. Какие из экстремальных значений инвариантны относительно положения точки S и формы параллелограмма? Если положение точки S определено углом SAB, можно вычислить ST с помощью теоремы синусов и теоремы косинусов.

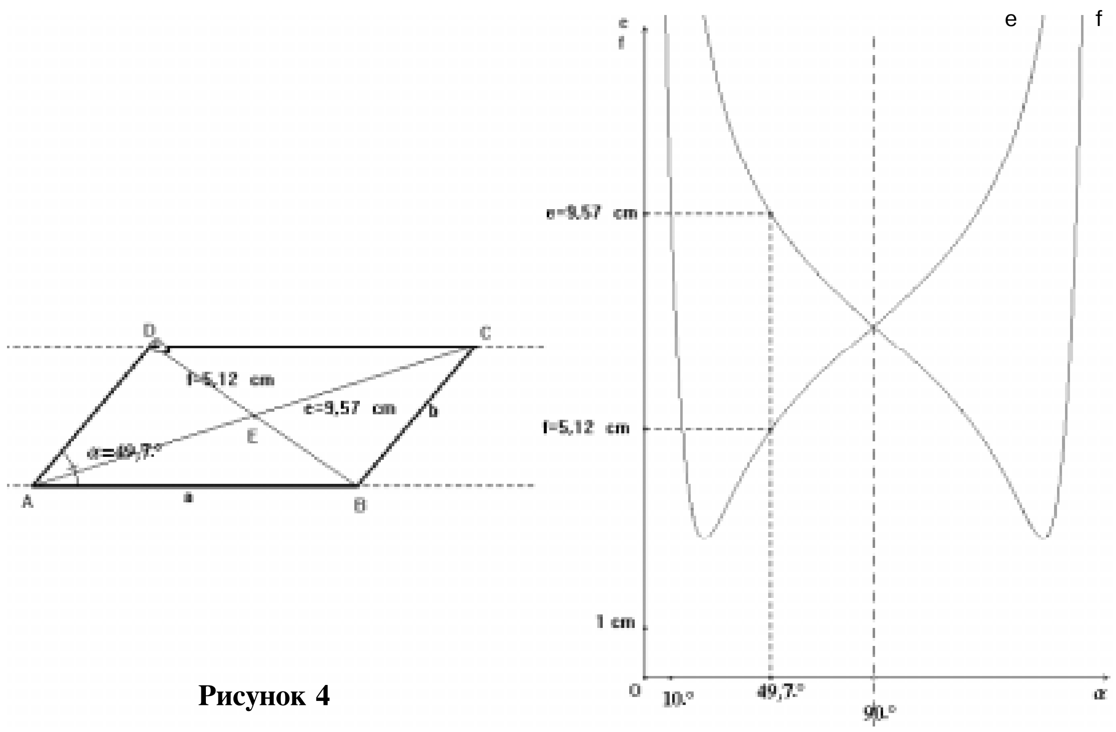


Рисунок 4

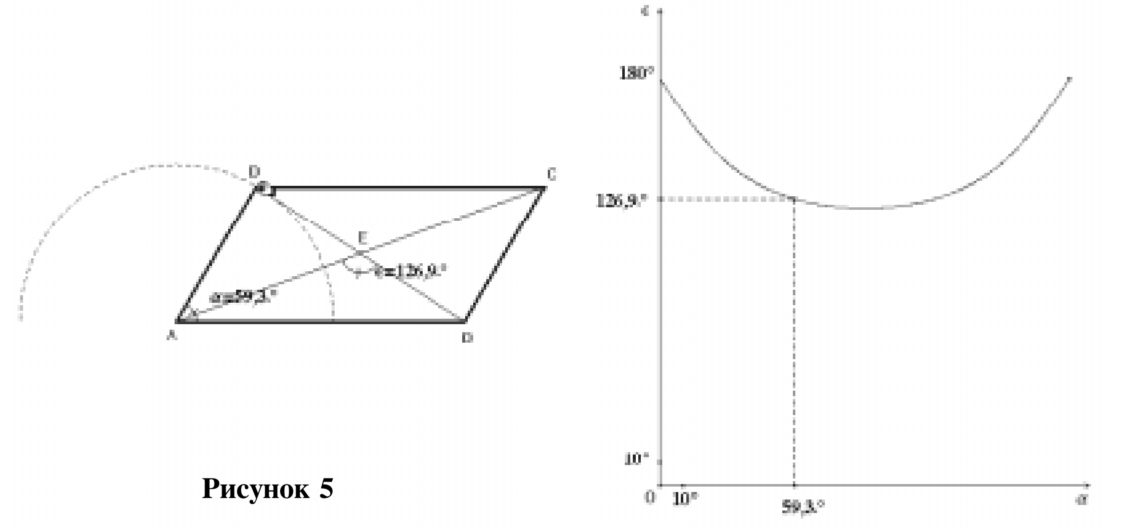
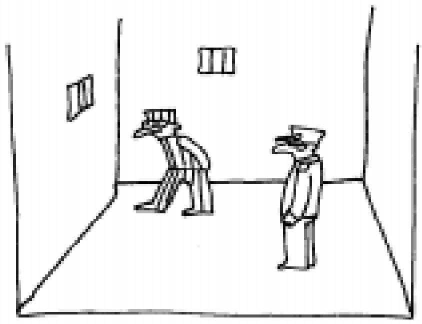


Рисунок 5

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Аналогичным способом могут быть исследованы многочисленные функциональные зависимости в параллелограмме или любой другой фигуре. Мы приобретаем широкое поле для исследований, на котором соединяются геометрия и школьная алгебра в духе метода «свободного исследования» (open-ended approach, Becker & Shimada, 1997).



Как зависит длина отрезка, соединяющего фиксированную точку S параллелограмма с точкой M, двигающейся по сторонам параллелограмма, от угла?

Литература.

1. Gutzmer A. Доклад о преподавании математики в школах-девятилетках. Zeitschrift fur den Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Unterricht (36), 1905, p.543–553.
2. Schweiger F. Фундаментальные идеи – эссе об истории дидактических идей в преподавании математики. Journal fur Mathematikdidaktik (13), 1992, p.199–214.
3. Heymann H.-W. Общее образование и математика. Weinheim:Beltz, 1996.
4. Kruger K. Воспитание функционального мышления. К истории одного дидактического принципа. Диссертация. Университет Гете, Франкфурт-на-Майне, 1999.
5. Schumann H.Построения с помощью компьютера в курсе школьной геометрии, Штутгарт. Teubner, 1991.
6. Schumann H. Представление и исследование функциональных свойств фигур в курсе школьной геометрии с помощью Cabri 2 в TI-92.
7. Schumann H. Изучение функциональных соотношений в геометрических фигурах с помощью компьютера. Mathematik in der Schule, (38) 2000, 2, p. 109–119.
8. Laborde J.-M., Bellemain F. Cabri Geometre 2. Университет Ж.Фурье, Гренобль.
9. Mehrtens H. Современный язык математики. Франкфурт, Suhrkamp, 1990, p.359.
10. Walsch W. «Семейства задач». Примеры и Дидактические замечания, части 1,2. Mathematik in der Schule (33) , 1995, 3, p.78–82, 142–152.
11. Becker J.P. & Shimada S. «The Open-ended approach» – новый подход в обучении математике. Reston VA: NTCM, 1997.

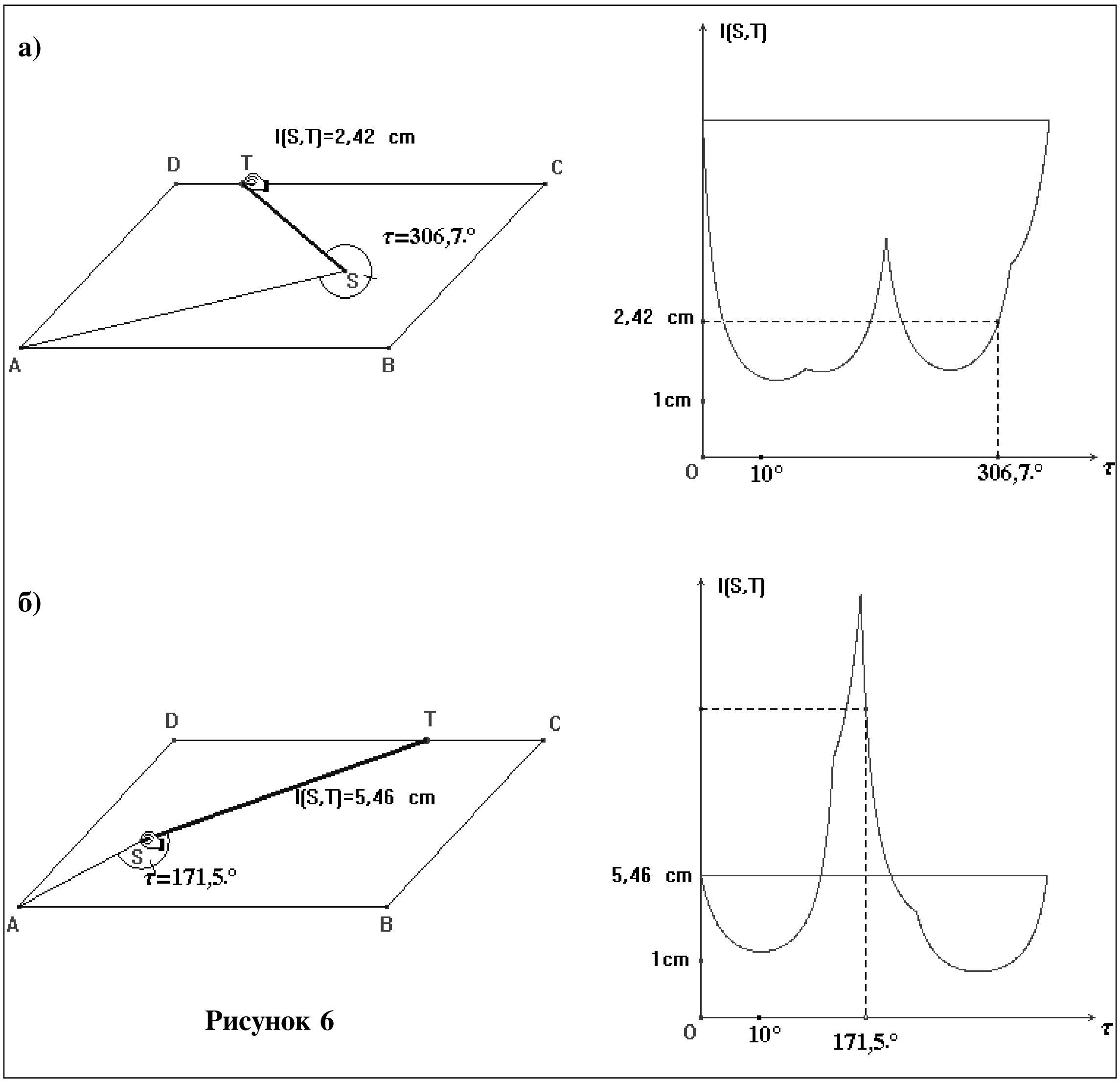


Рисунок 6

Гейнц Шуман,
профессор факультета
математики и информатики,
педагогический университет,
Германия.