ПРЕДМЕТНОЕ ОБУЧЕНИЕ

В этом номере мы публикуем статью, посвященную применению компьютера для обучения геометрии. Практика использования компьютерных геометрических инструментов насчитывает более 10 лет, а целесообразность их использования отмечал еще в начале XX века великий математик Анри Пуанкаре:

«Быть может, вас удивит это постоянное применение подвижных инструментов. Это не грубый прием, он более философский, чем это кажется с первого взгляда. Что такое геометрия для философа? Это изучение некоторой группы. Какой именно? Группы движений твердых тел. Каким же образом определить эту группу, не заставляя двигаться некоторые твердые тела.»

Интересно, что именно во Франции появляется инструментальная среда Cabri (затем Cabri 2), которая позволяет выполнять все планиметрические построения, преобразования и измерения, проверять отношения между планиметрическими объектами (равенство углов, параллельность прямых и пр.). В настоящее время среда Cabri встроена в микрокалькуляторы серии TI-92 (и последующие), ее широко используют в странах Европы.

В начале 90-х годов в Беркли (США) появляется среда The Geometer's Sketchpad, которая, сохранив все возможности среды Cabri, имеет более удобный интерфейс, возможность записывать геометрические алгоритмы (в том числе рекурсивные) и, главное, написана под Windows, который стремительно завоевывает популярность в мире.

В России московский Институт новых технологий локализует первую версию The Geometer's Sketchpad под названием «Живая геометрия».

В последнее время существует целое сообщество преподавателей и методистов Европы и Америки, использующих в своей работе эти программы и обменивающихся методическими материалами.

В России количество таких сподвижников существенно меньше, но, тем не менее, имеется ряд материалов, которые поддерживают курс геометрии в отечественной школе. Информация о нескольких таких пособиях находится на вкладке.

Наиболее интересным для российских преподавателей будет среда The Geometer's Sketchpad, ограниченно-рабочую версию которой (без возможности сохранения и печати) до недавнего времени можно было свободно переписать с сервера издателя этой среды Key Curriculumm Press.

Знакомясь с геометрическим инструментарием, профессиональные математики обычно задают вопрос, поддерживает ли система доказательство геометрических утверждений. Ни Cabri, ни The Geometer's Sketchpad делать этого не умеют.

Возможно, скоро мы будем свидетелями нового скачка в развитии программного обеспечения для школьной геометрии. На 9-ом международном конгрессе по преподаванию математики ICME 9 (Япония, 2001 г.) в докладе китайских разработчиков представлена программа, которая, наряду с перечисленными выше возможностями, позволяет экспериментировать с логическим выводом геометрических утверждений (Li Chuan Zhong, Zhang Jing Zhong. «Automated Reasoning and Educational Intelligent Platform»).

Тем более любопытной представляется публикуемая статья, в которой обсуждается использование компьютерного обеспечения для поддержки доказательства в геометрии с использованием минимальных инструментальных возможностей.

Кобельский Виктор Леонидович
Степанова Елена Викторовна

КОМПЬЮТЕРНАЯ ОБУЧАЮЩАЯ СИСТЕМА «ПЛАНИМЕТРИЯ 7–9»

Изучая планиметрию, мы, в основном, имеем дело с геометрическими фигурами (точками, отрезками, прямыми, углами, многоугольниками), изображенными на плоскости тем или иным способом. Мы строим эти фигуры с помощью различных инструментов, доказываем или опровергаем наличие у них определенных геометрических свойств и признаков.

На уроках математики, рисования и труда в начальной школе, а также в 5–6 классах уделяется большое внимание демонстрации объектов реального мира, обсуждению и сравнению их свойств. Таким образом, подготовка к общению на специальном математическом языке и формирование теоретических понятий часто происходят на основе самостоятельного получения учениками некоторых практических навыков. Этап практической работы с объектами (их изготовление, сравнение и сортировка) является очень важным. Использование такой методики позволяет совместить процесс формирования понятий числа, множества и понятий «больше-меньше» с изучением основных геометрических фигур и некоторых их свойств. Тем не менее, приходится все же совершать большой шаг от объектов, которые можно взять в руки, от самостоятельного изготовления таких объектов, от практического измерения их длин (объемов, масс и др.) к строгим логическим рассуждениям об этих объектах и соответствующему их построению (более или менее точному) в тетради или на доске. И первые сложности, с которыми встретятся ученики, – это неподвижность знакомых им объектов относительно листа бумаги или доски, необходимость давать ответы на вопросы по готовым чертежам, а также самостоятельное получение аккуратных рисунков. Именно в это время целесообразно обратиться к использованию в обучении геометрии компьютера и его дидактических возможностей.

ПОЧЕМУ ПОЛЕЗНО ИСПОЛЬЗОВАТЬ КОМПЬЮТЕР НА УРОКАХ ГЕОМЕТРИИ

На экране монитора фигуры можно перемещать, поворачивать и накладывать друг на друга. Кроме того, нетрудно создавать копии имеющихся объектов. Дополнительную наглядность изображениям придает возможность работы с цветовой палитрой (перекрашивание объекта в другой цвет, закрашивание замкнутой области, выделение фигуры или ее элемента и т. д.). Компьютерные средства обучения предоставляют богатые возможности контроля проделываемых операций и результатов работы. Прежде всего, речь идет об автоматическом контроле, поскольку компьютер способен выдавать оценку результатов (верных или неверных) непосредственно по завершении этой работы. Ученик может исправить свою ошибку и совершать дальнейшие шаги, основываясь на уже верных результатах предыдущих шагов [2].

Существующие компьютерные геометрические обучающие среды предоставляют широкие возможности для построения геометрических фигур, а также *экспериментального* установления их свойств и признаков на основе возможностей измерения и подвижности некоторых элементов. К таким средам можно отнести, например, систему «The Geometer's SketchPad».

Компьютерная обучающая система «Планиметрия 7–9» снабжена принципиально новыми инструментами поиска доказательства геометрических фактов, позволяющими строить работу на основе сочетания логики и интуиции. Следует отметить, что система не обеспечивает автоматического доказательства теорем, поскольку предполагает активное участие ученика в нахождении решения задачи на доказательство.

Система «Планиметрия 7–9» имеет три основные группы возможностей. Первая группа связана с *построением геометрических фигур*. Вторая предоставляет *инструменты диалога*, позволяющие обратиться к системе с вопросами об отношениях между построенными объектами. Третья группа – это *инструменты помощи поиска достаточных посылок для данного следствия*. Подобный выбор инструментов связан с тем, что для доказательства какого-либо утверждения необходимо построить соответствующий чертеж и затем, опираясь на факты, данные в условии, известные аксиомы и доказанные ранее теоремы, логически вывести заключение утверждения.

Инструменты построения позволяют строить как *базовые* геометрические объекты (точка, отрезок, прямая, окружность), так и объекты, связанные некоторыми отношениями (середина отрезка, окружность данного радиуса, биссектриса угла, касательные к окружности и т. п.).

ИНСТРУМЕНТЫ ДИАЛОГА КОМПЬЮТЕРНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Инструменты диалога предназначены для поиска связей элементов построенного чертежа. Относительно любых двух базовых объектов может быть задан вопрос, находятся ли объекты в указанном отношении. В зависимости от наличия или отсутствия связи выдается ответ «предположение верно» или «предположение неверно». Например, построен треугольник AFB, и две точки G и H – соответственно, середины сторон AF и AB этого треугольника (рисунок 1). Можно задать вопросы о связях объектов чертежа, в частности, и о тех связях, которые не были заданы непосредственно построением (параллельность отрезков BF и GH). Для постановки вопроса предназначается специальное окно (рисунок 2), в котором указываются объекты и предполагаемое отношение между ними.

Все верные предположения заносятся в специальное окно «Результаты». В данном случае результаты могут быть, например, такими, как на рисунке 3.

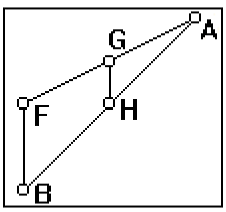


Рисунок 1

Рисунок 2

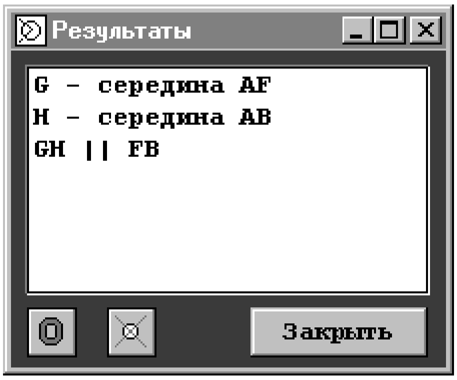


Рисунок 3

Первоначально система предлагала возможность задать вопрос о том, в каких отношениях находятся указанные объекты (выдавались все связи данных объектов). Для получения ответа достаточно было указать только типы и имена двух объектов. Однако опыт работы показал, что ученики в большинстве случаев не задают такого вопроса, отдавая предпочтение вопросу «находятся ли объекты в указанном отношении». Вероятно, это является следствием желания получать минимальное количество информации для обработки на каждом шаге решения задачи. Таким образом, вопрос второго типа был вскоре исключен из набора инструментов системы.

Возможности ведения диалога с системой, помимо вопроса о связях базовых объектов, включают также следующие вопросы:

– является ли треугольник равнобедренным (равносторонним, прямоугольным);
– является ли четырехугольник трапецией (параллелограммом, прямоугольником, ромбом, квадратом);
– равны ли углы (равны ли углы с коэффициентом);
– равна ли сумма двух углов 90 (180) градусам;
– равны (подобны) ли треугольники;
– равны ли дуги окружности (равны ли дуги окружности с коэффициентом);
– равны ли отношения отрезков;
– касаются ли прямая и окружность;
– касаются ли окружности.

ПРОСМОТР СПИСКОВ ТЕОРЕМ

Помимо указанных выше возможностей, система «Планиметрия 7–9» предлагает инструмент помощи поиска достаточных посылок для данного следствия. В случае, когда опытным, интуитивным путем установлено существование отношения между геометрическими объектами, важно выяснить, является ли отношение закономерным, что может быть установлено путем нахождения фактов, из которых по необходимости следует данное утверждение.

Итак, задан вопрос о наличии некоторой связи объектов. **При условии, что сделанное предположение верно, система предоставляет возможность просмотреть список теорем, в каждой из которых следствием является то отношение объектов, о котором был задан вопрос.** Например, обнаружено, что некоторый

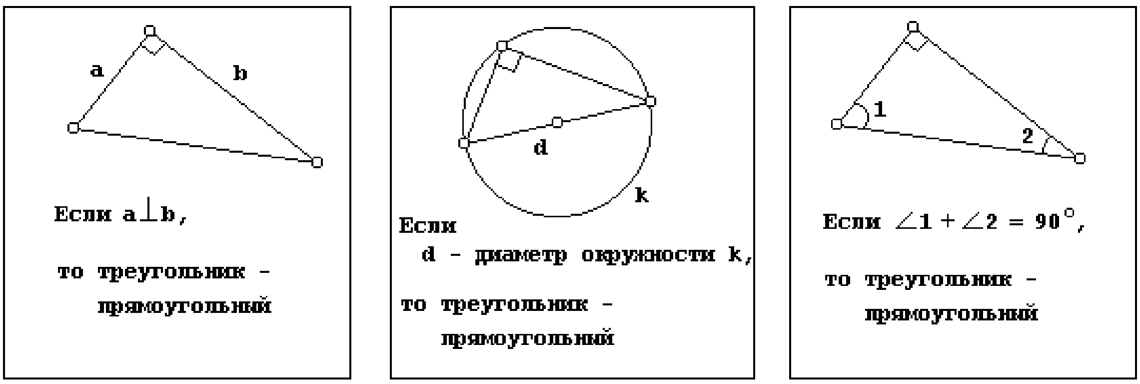


Рисунок 4

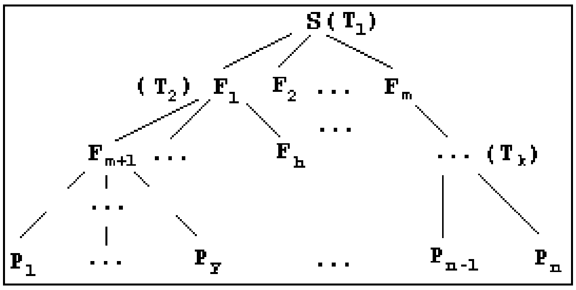


Рисунок 5

треугольник является прямоугольным. Для доказательства воспользуемся списком теорем, сгруппированных по типу следствия «треугольник является прямоугольным» (рисунок 4).

ИДЕЯ ПОИСКА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

В основу работы с доказательством в данном случае положен метод восходящего анализа – поиск посылок для данных следствий [4]. Идея метода заключается в следующем: предположим, в задаче сформулированы посылки P_1, ..., P_n и следствие S, которое необходимо путем логических умозаключений вывести из посылок. Схема поиска доказательства (рисунок 5) строится следующим образом:

1) Рассмотрим следствие S. Что достаточно доказать для того, чтобы следствие S было доказано? Пусть, по теореме T_1, достаточно доказать факты F_1, ..., F_m.

2) Что достаточно доказать для того, чтобы факты F_1,..., F_m были доказаны?

Так продолжается до тех пор, пока среди достаточных условий не оказываются данные посылки P_1, ..., P_n. После этого, на основании теорем T_1, ..., T_k, проводится доказательство.

Инструменты диалога и систематизации фактов компьютерной системы «Планиметрия 7–9» позволяют осуществить анализ заключения утверждения и построение схемы доказательства, аналогичной схеме, приведенной на рисунке 5. После получения схемы само доказательство может быть легко проведено.

Опишем процессы составления и решения задачи на доказательство более подробно. Задача на доказательство предлагается в виде чертежа и краткой записи условия задачи (в специальном окне «Решение задачи»). В большинстве случаев рисунок и исходные данные готовятся учителем заранее и хранятся в виде файла с расширением .geo (папка ZADACHI). К настоящему моменту система снабжена небольшим набором задач на доказательство (около 40), однако этот набор может быть дополнен любым пользователем системы. Материалом для задачника послужили задачи на доказательство, представленные, в частности, в работах [1, 3, 5, 6], а также учебниках геометрии для средней школы.

СОСТАВЛЕНИЕ УСЛОВИЯ ЗАДАЧИ

Опишем последовательность действий, необходимых для составления следующей задачи: доказать, что четырехугольник – ромб, если он является параллелограммом с парой равных смежных сторон. Прежде всего, нужно построить чертеж (рисунок 6). Затем для создания условия выяснить:

– является ли четырехугольник ABCH параллелограммом;

– равны ли какие-либо смежные стороны этого четырехугольника (например, AB и BC);

– является ли четырехугольник ромбом.

Для этого нужно задать системе соответствующие вопросы. При условии верно выполненных построений, в окне «Результаты» получим три факта (рисунок 7).

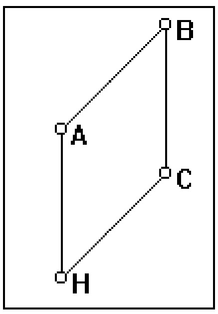


Рисунок 6

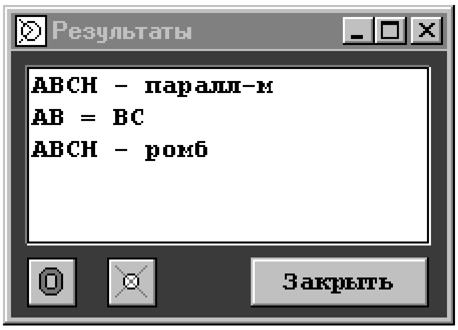


Рисунок 7

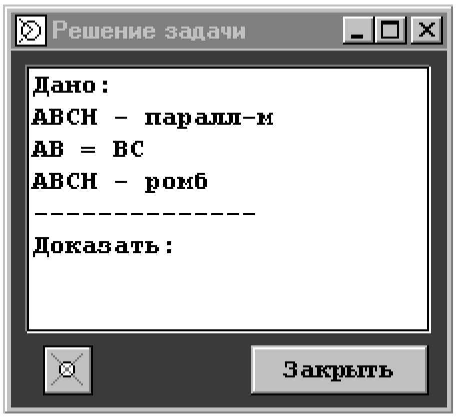


Рисунок 8

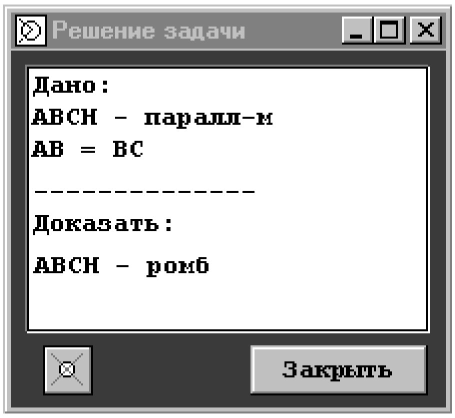


Рисунок 9

Далее эти факты должны быть перенесены в окно «Решение задачи» (раздел «Дано») по кнопке «Очевидно» (рисунок 8). Выбрав факт, который должен быть доказан (ABCH – ромб), переносим его в раздел «Доказать» с помощью двойного щелчка «мыши» (рисунок 9). Условие задачи готово.

Итак, для создания компьютерной версии задачи на доказательство прежде всего строится чертеж. Затем по чертежу задаются вопросы, отражающие условие задачи, и полученные факты разделяются на посылки и заключения.

ПОИСК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

При решении задачи прежде всего задается вопрос об истинности заключения утверждения. При получении ответа «предположение верно» можно просмотреть список теорем, для каждой из которых следствием является заключение задачи, и выбрать одну из перечисленных теорем. Так осуществляется построение первого шага схемы доказательства. Затем продолжается аналогичная работа. Все установленные экспериментальным путем отношения заносятся в окно «Результаты». Если в какой-то момент понятно, почему из условия задачи следует какой-либо обнаруженный истинный факт, следует по кнопке «Очевидно» занести этот факт в средний раздел окна «Решение задачи» (уже доказанные факты). Если в процессе поиска решения задачи было выполнено дополнительное построение, то те отношения, которые это построение непосредственно обеспечивает, могут быть также занесены в средний раздел по кнопке «Очевидно». В итоге в окне «Результаты» оказывается план поиска решения задачи, а в окне «Решение задачи» примерный план доказательства.

Рассмотрим пример, демонстрирующий поиск доказательства геометрического утверждения.

Высоты треугольника продолжены до встречи с описанной окружностью. Докажите, что отрезки этих линий от ортоцентра до окружности делятся соответствующими сторонами пополам (рисунок 10).

Проверяем, верно ли, что отрезки KG и GJ равны. Узнав, что предположе-

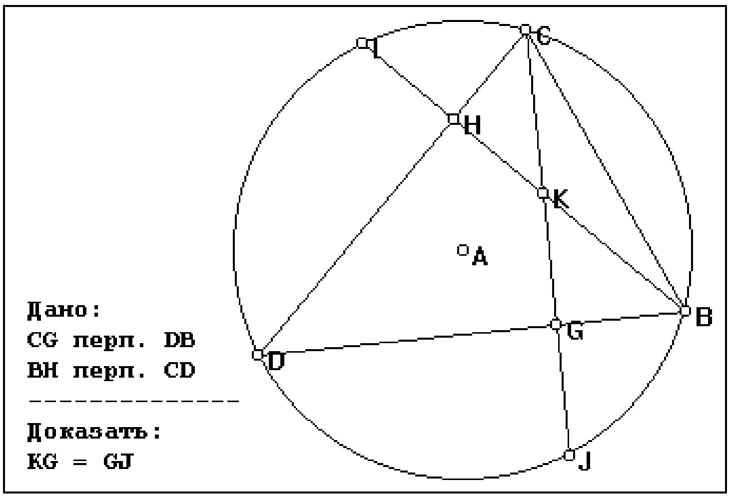
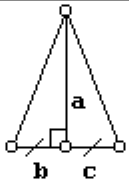
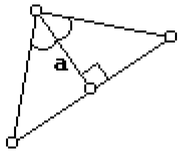


Рисунок 10




```
Если треугольник -
     равнобедренный,
     а - высота,
то   b = c
```

Рисунок 11




```
Если а - высота и бис-
сектриса треугольника,

то треугольник -
   равнобедренный
```

Рисунок 12

ние верно, просматриваем список теорем, в каждой из которых следствием является «отрезки равны». Наиболее подходящей для данного случая является следующая теорема (рисунок 11): если треугольник является равнобедренным, то высота, проведенная к основанию этого треугольника, является также его медианой (то есть основание треугольника делится на два равных отрезка). В этом случае нам необходимо достроить треугольник, в котором отрезок KJ будет одной из сторон, и доказать, что этот треугольник является равнобедренным (с основанием KJ).

Итак, первый шаг схемы доказательства: для доказательства равенства отрезков KG и GJ достаточно доказать, что треугольник KBJ является равнобедренным и отрезок BJ является его высотой. Отрезок BJ является высотой треугольника KBJ, если отрезки BG и KJ перпендикулярны, а это следует из условия задачи (ведь отрезок CG является высотой треугольника CBD). Осталось доказать, что треугольник KBJ – равнобедренный. Задаем вопрос и подбираем соответствующую теорему (рисунок 12). Тот факт, что BG является высотой треугольника KBJ, мы уже выяснили. Достаточно теперь доказать, что отрезок BG также является и биссектрисой треугольника KBJ, то есть углы KBJ и GBJ равны. Мы знаем, что углы, вписанные в окружность, равны, если равны дуги, на которые они опираются, значит, достаточно доказать, что равны дуги DI и DJ окружности AB. Дуги окружности равны, если равны вписанные в ту же окружность углы, опирающиеся на эти дуги. Чтобы не попасть в «порочный круг» и не воспользоваться при доказательстве фактом, который необходимо доказать, рассмотрим другую пару углов, вписанных в окружность AB и опирающихся на дуги DI и DJ соответственно, например, углы IBD и DCJ. Как доказать, что эти углы равны? Рассмотрим треугольники DCG и HBD. Они оба прямоугольные (поскольку отрезки BH и CD, CG и BD перпендикулярны), они имеют общий угол CDB, а в качестве третьего угла они имеют соответственно углы DCJ и IBD. Как в этой ситуации доказать равенство углов DCJ и IBD? Известно, что в прямоугольном треугольнике сумма ост-

```
Результаты

KG = GJ
тр. KBJ - равнобедр.
BG перп. KJ
уг(KBG) = уг(GBJ)
дуга(ID) = дуге(DJ)
уг(DCJ) = уг(IBD)
уг(DCJ)+уг(CDG)=90 град.
уг(IBD)+уг(CDG)=90 град.
тр. DCG - прямоуг.
тр. HBD - прямоуг.
CG перп. DG
BH перп. DH
```

Рисунок 13

```
Решение задачи

Дано:
CG перп. DB
BH перп. CD
--------------
тр. DCG - прямоуг.
тр. HBD - прямоуг.
уг(DCJ)+уг(CDG)=90 град.
уг(IBD)+уг(CDG)=90 град.
уг(DCJ) = уг(IBD)
дуга(ID) = дуге(DJ)
уг(KBG) = уг(GBJ)
BG перп. KJ
тр. KBJ - равнобедр.
KG = GJ
--------------
Доказать:
KG = GJ
```

Рисунок 14

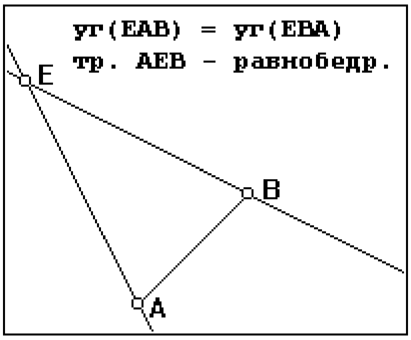


Рисунок 15

рых углов равна 90°, значит, оба угла DCJ и IBD составляют с углом CDB в сумме 90°, а, значит, они равны между собой. Все перечисленные факты постепенно заносятся в окно «Результаты», отражающее идею построения схемы доказательства (рисунок 13).

Схема доказательства теперь может быть легко построена, а факты из окна «Результаты» в соответствующем порядке перенесены в окно «Решение задачи» (рисунок 14) для последующей записи доказательства.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

Для подготовки к работе с доказательством мы предлагаем серию задач и упражнений, направленных не только на освоение инструментов компьютерной системы, но также и на получение учениками геометрических сведений.

Так, например, для закрепления знаний теоретического материала и соответствующих навыков геометрических построений может быть предложено следующее задание. Нужно построить равнобедренный треугольник, исходя из его определения, то есть построить любой треугольник, имеющий две равные стороны. Обсудив способ такого построения в среде системы, ученики выполняют его. Если построенный треугольник является равнобедренным, открывается возможность получения списка фактов (теорем), в которых следствием является «треугольник равнобедренный». Теперь, уже используя эти факты, ученики снова строят равнобедренные треугольники. Например, треугольник является равнобедренным, если два его угла равны. Значит, нужно построить треугольник с двумя равными углами. В среде системы это можно выполнить с помощью инструмента «Отложить угол, равный данному» (рисунок 15).

Аналогичную работу можно проводить при изучении темы «Четырехугольники».

Существенная помощь может быть оказана при решении задач на построение, в частности, на этапе анализа, предполагающем, что искомая конструкция уже построена. Учитель в данном случае заранее может подготовить чертеж. Обращаясь к системе с различными вопросами, ученики получают связи элементов этого чертежа, которые могут быть полезными при дальнейшем построении. Например, нужно построить касательную к окружности, проходящую через данную точку, не лежащую на этой окружности. Для проведения анализа приготовлен чертеж: прямая CE касается окружности AE (рисунок 16). Определим связи, которые могли бы помочь построению. Если соединить точки A и E, то полученный отрезок AE будет перпендикулярен прямой CE (рисунок 17), и, следовательно, треугольник ACE получится прямоугольным. Таким образом, нужно построить прямоу-

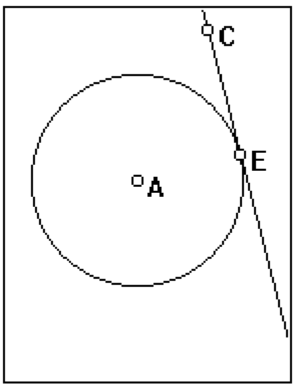


Рисунок 16

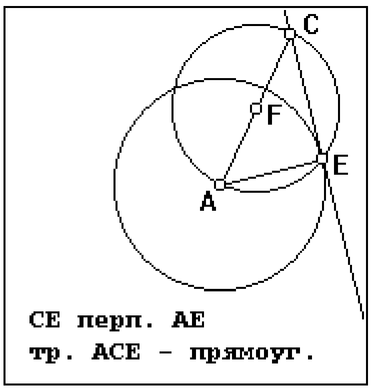


Рисунок 17

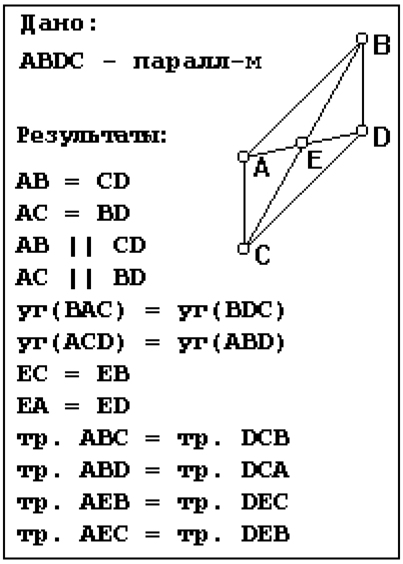


Рисунок 18

гольный треугольник, вершинами которого будут центр окружности, данная точка и точка, лежащая на данной окружности. Известно, что треугольник прямоугольный, если одна из его сторон является диаметром окружности. Значит, достаточно построить окружность, диаметром которой является отрезок, соединяющий центр данной окружности и данную точку (отрезок AC), и найти точку ее пересечения с данной окружностью (точку E). Для построения такой окружности достаточно найти ее центр – точку F (середина отрезка AC) и радиус (отрезок AF).

Для подготовки к проведению анализа может быть предложено следующее задание: дана геометрическая ситуация; получите все возможные следствия из того, что в этой ситуации известно. В качестве примера рассмотрим следующее задание. Дан параллелограмм ABDC (рисунок 18).

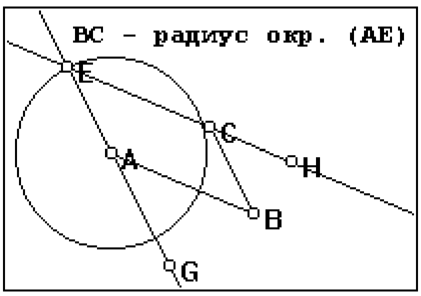


Рисунок 19

Проведены диагонали параллелограмма – AD и BC, E – точка их пересечения. Какие следствия можно получить из этого условия? Объясните ответ.

В качестве подтипа задач на построение можно предложить следующее задание: предположим, что один из инструментов системы перестал действовать; смоделируйте его работу с помощью оставшихся инструментов построения. Например, запрещено пользоваться инструментом «Построение окружности данного радиуса». Даны отрезок BC и точка A (рисунок 19). Нужно построить окружность радиуса BC с центром в точке A. Мы знаем, что противоположные стороны параллелограмма равны. Значит, построив параллелограмм, вершинами которого являются точки A, B и C, мы построим отрезок, равный отрезку BC. Для построения параллелограмма два раза применим инструмент «Построения прямой, параллельной данной прямой (отрезку)», то есть построим прямые AG и CH, соответственно параллельные отрезкам BC и AB, затем найдем точку их пересечения – точку E. Построим окружность AE и проверим, равен ли отрезок BC радиусу этой окружности.

ОПЫТ РАБОТЫ В ШКОЛАХ

Компьютерные уроки геометрии с включением системы «Планиметрия 7–9» проводятся в классах с различными уровнями подготовки к использованию средств информационных технологий. Ученики быстро осваивают инструменты системы, применяют своеобразные подходы к их использованию. Среди инструментов, которые хотелось бы добавить, называют линейку, различные подсказки, изображение готовых фигур (треугольников, четырехугольников). Повышенный интерес учеников к компьютерным технологиям делает для них подобные уроки занимательными. На вопрос «интересно (полезно) ли изучать геометрию с помощью компьютера» мы получаем ответы:

– удобнее располагать данные и результаты в компьютере, чем записывать в тетради;

– хорошо, что много действий и мало слов;
– мы стали лучше понимать геометрию, работа с компьютерными инструментами развивает гибкость ума;
– удобно, что для помощи дан ряд нужных теорем;
– изучая компьютерную геометрию, мы развиваем также и навыки работы с компьютером;
– компьютерная геометрия все-таки *компьютерная*, и это интересует.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подготовке к анализу условий и заключений геометрических утверждений, к поиску решений задач на доказательство необходимо уделять особое внимание. Инструменты построения, диалога и просмотра сгруппированных фактов компьютерной обучающей системы «Планиметрия 7–9» позволяют осуществлять подобную работу на уроках планиметрии. К настоящему времени в состав пакета входят около 40 задач на доказательство различных уровней сложности. Учителю предоставляются многочисленные возможности создания новых задач и упражнений в среде системы для проведения компьютерно-ориентированных занятий по геометрии.

В настоящее время система «Планиметрия 7–9» дополняется новыми возможностями. В частности, рассматривается вопрос о создании инструментов помощи для решения задач на построение и движение.

Авторы статьи выражают благодарность Евгении Васильевне Барановой, доценту кафедры информатики и вычислительной техники РГПУ им. А.И. Герцена, за помощь, оказанную при создании системы.

На дискете, прилагаемой к журналу, содержится *первая версия* системы «Планиметрия 7–9».

Для установки системы необходимо:
1) создать рабочую папку для размещения файлов системы;
2) скопировать саморазархивирующийся файл pl.exe с дискеты в созданную папку;
3) запустить файл pl.exe на исполнение.

Для работы в среде системы «Планиметрия 7–9» запустите на исполнение файл «planim.exe».

Литература.

1. Абугова Х.Б., Щукина М.А. Сборник устных упражнений по геометрии для 6–11 классов. М.: Учпедгиз, 1960, 110 с.
2. Баранова Е.В., Степанова Е.В. Компьютерное обучение геометрии в школе. М.: Наука и школа, № 4, 1999, с. 46–50.
3. Гуль И.М. Сборник геометрических задач. Планиметрия. М.: Учпедгиз, 1940, 32 с.
4. Данилова Е.Ф. Как помочь учащимся находить путь к решению геометрических задач. М.: Учпедгиз, 1961, 143 с.
5. Зив Б.Г. Задачи к урокам геометрии. 7–11 класс. СПб: Мир и семья – 95, 1995, 624 с.
6. Немытов П.А. Сборник задач на доказательство по геометрии для 6–7 классов. М.: Учпедгиз, 1956, 112 с.

Кобельский Виктор Леонидович,
кандидат физико - математических наук, доцент кафедры геометрии РГПУ им. А.И. Герцена.

Степанова Елена Викторовна,
кандидат педагогических наук, ассистент кафедры информатики и вычислительной техники РГПУ им. А.И. Герцена.