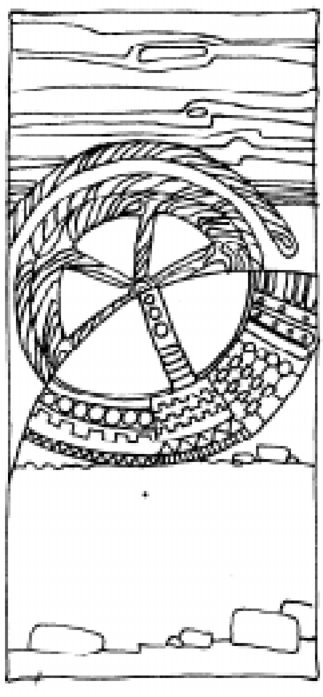
Башмаков Марк Иванович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБУЧЕНИЕ НУЖДАЕТСЯ В ГЛУБОКИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ИДЕЯХ

В 1914 году на конгрессе по вопросам преподавания математики Эмиль Борель выступил с докладом «Как согласовать преподавание математики с прогрессом математической науки».

Действительно, бывают такие переломные моменты, когда обсуждается вопрос: как отражаются на преподавании математики в школе те тенденции, которые есть в самой математической науке. Начало XX века было, несомненно, таким переломным моментом. Достаточно вспомнить знаменитый доклад Гильберта о задачах, проблемах, которые должны оказаться в центре внимания математиков XX века. Сейчас, на пороге XXI века, также делаются попытки обозначить математические проблемы наступающего века, и, с другой стороны, сделать обзор того, что же было достигнуто в математике в XX веке, что происходит в образовании. Любопытно, что в докладе Бореля те тенденции или те достижения самой математики, о которых шла речь в применении к преподаванию, касались не непосредственно достижений конца XIX или рубежа XIX–XX веков, а, скорее, общего хода развития математики, и связывались они с достижениями таких ученых, как Декарт, Ньютон, Лейбниц, Галилей. Может быть, и сейчас было бы неправильно ставить вопрос об отражении в преподавании математики недавних достижений, а в большей степени говорить о некоторых общих тенденциях, которые были в математике в XX веке, может быть, больше останавливаясь на второй его половине.

Первое, что мне хочется отметить, это то, что можно было бы назвать конструктивным подходом к математическим проблемам. Я имею в виду те ценные результаты, которые были получены в самых разных математических областях. Скажем, перечисление тех или иных простых групп, которое делалось на основании сложных и красивых конструкций. Можно назвать результаты математической физики, в чем-то сопоставимые с тем, что я сказал о простых группах. Наконец, это результаты в алгебраической геометрии, связанные с описанием некоторых классов алгебраических многообразий, их поведения, что в конце концов привело к таким замечательным результатам, как доказательство Фалтингсом гипотезы Морделла о конечности числа решений диофантова уравнения, доказательство Уайлсом теоремы Ферма, и к другим известным математическим открытиям XX века.

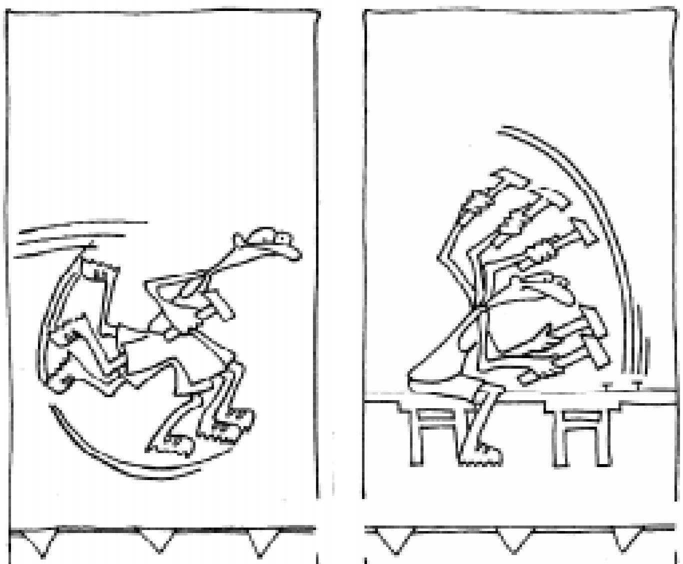


...перечисление ... простых групп, которое делалось на основании сложных и красивых конструкций...

Как же эта сторона может найти свое отражение в преподавании математики? Мне представляется, что она замечательным образом связана с другим феноменом, относящимся скорее не к математике и ее преподаванию, а к психологии. Это то направление, которое стало называться продуктивным обучением. То, что так или иначе связано с ориентацией на индивидуальное получение конкретных результатов и решение практических задач, которые стоят перед человеком в его развитии. Для преподавания математики это могло быть реализовано в том, что человек не просто решает математическую задачу. Понятно, что обучение на задачах в течение многих столетий было испытанным методом обучения математике. Речь идет о том, что человеку предлагают не просто задачу, а некоторую сферу деятельности, может быть, внутри математики, где, с одной стороны, достаточно ясно очерчен результат, к которому нужно прийти, а с другой стороны, важен сам путь достижения этого результата. И этот путь может быть различным для различных людей. Он должен учитывать индивидуальные особенности, он должен учитывать то, что психологи стали называть познавательным стилем. Развитие познавательного стиля представляется необычайно важным. И это развитие должно делаться, исходя из этих соображений, не на общем материале условного характера, а на конкретном проникновении в специфику ситуации, в ее подробное описание и, может быть, даже такое, которое не будет человеку нужно впоследствии.

На преподавание математики в последние десятилетия прагматический стиль оказывал очень сильное воздействие. К каждому моменту обучения начинали спрашивать, зачем это человеку нужно, как он это будет использовать впоследствии. Здесь точка зрения несколько другая. Человек, глубоко проникая внутрь той или иной ситуации, учится. В его сознании, в его психике, в его навыках происходят такие глубокие сдвиги, которые затем окажутся первостепенными в этом образовании. Такие вещи происходили раньше, когда, скажем, человеку предлагали заниматься в математике вроде бы совершенно ненужными вещами. Например, геометрическими задачами на построение. Может быть, этот пример наиболее типичен. Задачи на построение были изгнаны из программы школы прежде всего потому, что это, дескать, никому не нужно. Кто же занимается вопросами построения циркулем и линейкой или решает что-то в этой связи? Я не призываю вернуться именно к этой теме, и смысл того нового направления, о котором я сейчас говорю, состоит как раз в тщательном выборе этих ситуаций и выборе ситуаций, связанных с другими дисциплинами. Дело не столько в выборе темы, сколько в глубине проникновения в нее, в построении соответствующего аппарата, в том, чтобы этот аппарат человек строил сам или с чьей-либо помощью. Но главное, чтобы он им учился дальше пользоваться.

Здесь есть известное противоречие с другой точкой зрения, которая тоже очень важна и которая тоже была сфор-



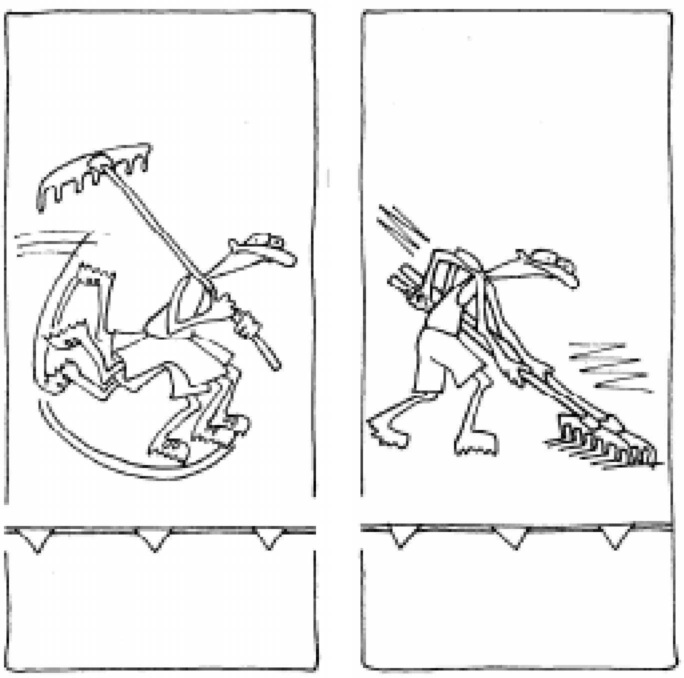
...инженер ... не должен сам делать соответствующий инструмент...

мулирована в XX веке. Она связана с именем академика Крылова, который, наоборот, считал, что, например, инженер, который учится математике, не должен сам делать соответствующий инструмент, он должен научиться им хорошо пользоваться, и задача обучения математике – ознакомление с накопленными инструментами.

В известной мере, определенный сдвиг к концу века произошел, и, мне представляется, в отношении преподавания математики он не отвергает ту сторону, о которой говорил Крылов. Этот сдвиг мог бы произойти в том направлении, что человека не заставляют изобретать изобретенное, его помещают в такую дружескую, доброжелательную среду, где инструменты уже есть, но их возможности в известной мере скрыты, и задача обучаемого – открыть эти возможности, может быть, с помощью какого-нибудь эксперимента.

Тем самым, появляется опасность фрагментарности, опасность того, что человек в обучении математике, занимаясь определенным фрагментом теории, учебным модулем, может не воспринять теорию в целом. Поэтому вторая тенденция, которая, как мне кажется, должна найти свое отражение в преподавании математики, – это обеспечение некоторой целостности восприятия в обучении математике. Это трудный вопрос, и здесь сама математика, казалось бы, этому не способствует, потому что внешне она углубляется, распадается на отдельные разделы, ветви, дисциплины, и лишь немногие могут воспринять эти идеи, все то, что накоплено, в целом. Но на самом деле важнейшим достижением является взаимосвязь разных разделов, общность идей.

Поэтому вторая сторона влияния математики на преподавание, на мой взгляд, могла бы состоять в том, чтобы в школьную математику были смелее допущены математические идеи, именно идеи, может быть, в противовес технике, в противовес традиционной задаче овладения каким-то инструментом. Эти идеи на самом деле живут в математике долго, и новые идеи, которые появились в математике, возникли не на пустом месте – они являются развитием неких общих математических идей. Поэтому, может быть, не включая непосредственно идеи, возникшие недавно, можно было из них извлечь идею, которая была бы доступна школьнику. И эту идею в более или менее явном виде, в обрамлении продуктивной деятельности, поместить внутрь школьного образования, опять же не очень заботясь о том, зачем это человеку нужно будет в дальнейшем.



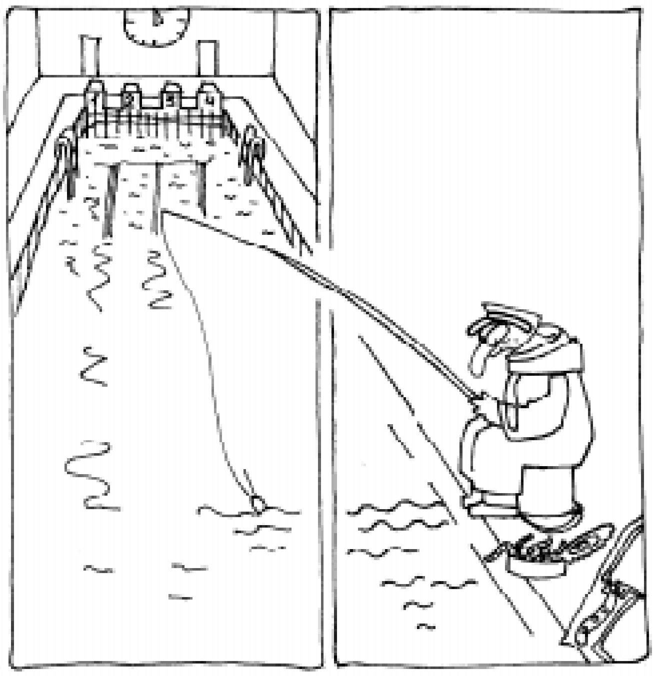
...он должен научиться им хорошо пользоваться...

Мне кажется, что эта вторая тенденция, а именно усиление идейной стороны обучения математике, совершенно необходима. Если посмотреть учебники, которые сейчас выходят, как российские, так и западные, то бедность математическими идеями, скрывание идей за математическим языком, за задачами технического характера очень заметна. Общая тенденция, которая появилась почти во всех странах, – тенденция сокращения объема программы за счет выкидывания содержательных вещей – представляется мне крайне опасной.

Преподавание математики, к сожалению, пришло к тому, что если что-то делаешь, то нужно делать до конца. Нужно добиться того, чтобы человек окончательно, полностью все это понимал, и, следовательно, надо ограничиться очень жалкими, слабыми идеями, надо ограничиться очень слабым инструментальным багажом, зато довести это до совершенства. Эта тенденция, которая стала превалирующей, представляется опасной, если говорить о математике как о предмете, задача которого прежде всего – общая культура, общее развитие. Определенная поверхностность вместе с глубиной идей, которые содержатся в обучении, мне кажется, будет отвечать определенным тенденциям в самой математике.

Я снова вернусь к тем крупным результатам, которые были получены, скажем, в конце XX века. По-видимому, нет популярного научного журнала, который не писал бы о доказательстве Уайлсом теоремы Ферма. Мне как человеку, который занимался профессионально алгебраической геометрией, ясно, что даже среди профессиональных математиков очень мало людей, которые могут понять и разобрать все детали этого доказательства. Ведь оно не является прямым, оно упирается в доказательства некоторых общих фактов, которые были сформулированы гораздо раньше. Идет речь о некоторых гипотезах общего характера, не относящихся непосредственно к теореме Ферма. Тем не менее, в журналах правильно описывается ситуация с доказательством, объясняются предшествующие результаты, начиная с результатов Вейля, Серра, других ученых, о том, как развитие этих идей в конце концов привело к доказательству теоремы.

Что-то аналогичное должно делаться и в школе, то есть надо найти в обучении такие элементы, которые отражали бы важные, серьезные идеи. Здесь можно было бы вернуться к каким-то вещам, которые были известны раньше, а затем были отброшены. Я приведу такой пример. Мне было интересно проанализировать российские учебники алгебры для 7–8 класса по теме «Многочлены и алгебраические дроби». Я проверил почти все учебники, которые сейчас в ходу. И общее ощущение, которое возникло в связи с чтением этих учебников: они все малосодержательные. У них есть свои преимущества, свои недостатки, может быть, неплохо учат ребят этому вопросу. Но я посмотрел на задачи, которые предлагаются там: какие-то вычурные многочлены с ужасными коэффициентами, все это очень некрасиво, все это должно отвлекать человека от существа дела. И я открыл старый французский задачник Абера и Капелье, который был выпущен еще в начале века и переведен на



...опасность того, что человек..., занимаясь определенным фрагментом теории, учебным модулем, может не воспринять теорию в целом...

русский язык в 1940 году. Я посмотрел на задачи, которые предлагались в этом задачнике по этой же теме. Эти задачи гораздо понятнее, они связаны с настоящей математикой. Написано «доказать тождество», но я как математик вижу, что это не просто тождество, а описание поведения дискриминанта квадратного трехчлена при замене переменной. И симметрия, которая видна в этих тождествах, возникает не случайно.

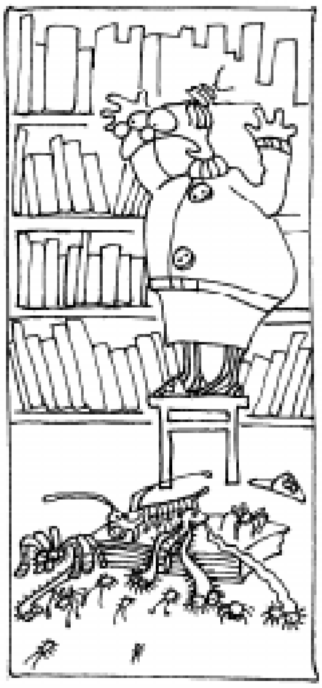
Человек может, обучаясь многочленам, прийти на разный уровень. Он не просто научится умножать два многочлена, но научится, может быть, делать это разумно, рационально, видя, к чему надо прийти, а не просто тупо перемножать, чтобы не пропустить ни одного слагаемого. Когда была так сужена задача: «научить умножать многочлены», тогда и появились задачи, достаточно бессмысленные. В конце концов, не так часто в жизни придется умножать многочлены. В этом есть некоторый математический язык, но за языком стоят определенные идеи. И эти идеи оказались абсолютно исключены из обучения. И такой базы, математического фундамента, не стало. Теперь уже можно сказать, что это никому не нужно, и это совершенно будет оправдано. Этот пример я мог бы развивать дальше, у меня есть определенные конструктивные предложения, которые я сейчас пытаюсь реализовать. А что же надо? Чем надо заменить такое умножение многочленов? Что здесь надо сделать? Я думаю, что здесь вполне возможны конкретные идеи для реализации.

И мне кажется, что опять наступил момент, который наступал в разные годы. Я уже упомянул начало XX века. Можно было упомянуть 60-е годы XX века, когда крупные математики обратились к вопросам преподавания математики в школе. Мне кажется, сейчас снова наступает такой момент, когда математики, занимающиеся серьезной наукой, должны прийти к вопросам преподавания математики в школе и предложить свежие идеи в преподавании, которые и соответствовали бы тем изменениям, которые произошли в самой математике в последние десятилетия.

В отношении связи информатики и математики в последнее время очень много говорят о дискретной математике. Что бы Вы могли предложить по поводу изменения содержания преподавания математики?

Я много думал над этим вопросом. Как связано преподавание математики в техническом вузе, преподавание для гуманитариев, преподавание в общем школьном курсе математики? Несомненно, изменения в дискретной математике, ее приложения, ее роль должны отразиться в школьном

...тенденция сокращения объема программы за счет выкидывания содержательных вещей — представляется мне крайне опасной...



...я посмотрел на задачи, которые предлагаются там: какие-то вычурные многочлены с ужасными коэффициентами, все это очень некрасиво...

преподавании. Однако эта роль часто понимается неверно. Пытаться вести содержательную дискретную математику сразу в серьезном объеме сейчас было бы неправильно. Общий корпус математических знаний должен быть гораздо более устойчивым. Сейчас не идет речь о том, как именно изменить содержание. Но подход – это гораздо важнее. В 60-е года произошли важнейшие изменения в содержании обучения с точки зрения подхода. Появился подход с позиции теории функций, появился анализ. Это было очень важное изменение, потому что до этого, если вы посмотрите старые учебники, эта важнейшая сторона самой математики в школе практически не была представлена. Но сейчас получается, что превалирование функционального подхода мешает проникновению дискретного подхода. Это могло бы совершенно безболезненно быть учтено и взято на вооружение в школе.

Что я имею при этом в виду? Это прежде всего усиление алгебры в классическом понимании, алгебры, которая приводила бы к изучению не столько самих объектов, сколько операций над ними. Это не столько содержание, сколько линия идеологии.

НАШИ АВТОРЫ

Башмаков Марк Иванович,
доктор физ.-мат. наук, профессор,
действительный член Российской
академии образования.