

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ И ИДЕМПОТЕНТНАЯ МАТЕМАТИКА

По всей видимости, в связи с бурным развитием как современной прикладной математики, так и современных методов информатики, все существующие учебники по численным методам уже сильно устарели. Одна из причин состоит в том, что современные компьютеры работают очень быстро. Не имеет большого значения, если какой-то алгоритм удастся улучшить по скорости процентов на двадцать.

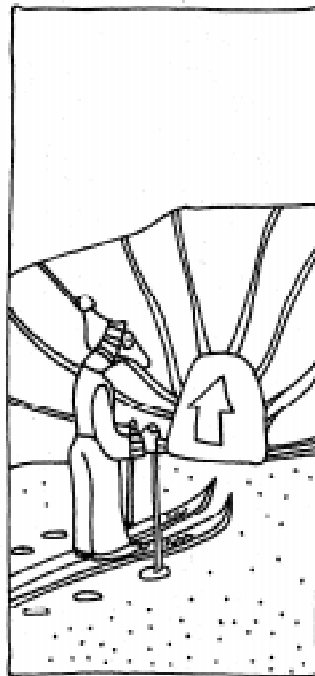
На первом этапе развития численных методов, когда машинное время было очень дорогим, а человеческий труд очень дешевым, основное внимание уделялось оптимизации алгоритмов в отношении скорости. Сейчас из-за того, что компьютеры стали работать гораздо быстрее, на первый план выходят другие требования к алгоритмам и программам. Основное требование состоит в том, чтобы программы были надежными и давали достоверный результат. По-английски это обычно формулируется как *reliable computing*. Главное, чтобы в программе не было ошибок и чтобы алгоритм давал требуемую точность.

Обычно, когда реализуется численный алгоритм и используется арифметика с плавающей запятой, возникают ошибки округления – например, такие ошибки очень существенны при вычитании близких чисел, при суммировании рядов. Следует позаботиться о том, чтобы ошибки промежуточных вычислений не сказались на окончательном результате и чтобы мы получили результат с заданной точностью.

Здесь важно оценить погрешность. Этому посвящена обширная новая наука, которая называется интервальным анализом. В этом случае, грубо говоря, ответ пишется в виде x плюс-минус ошибка, все исходные данные записываются в таком виде, и окончательный результат записывается в таком же виде. К сожалению, методы интервального анализа часто дают ответ типа: 10 в минус десятой степени плюс-минус 100 миллионов. Такая оценка точности не является особенно практичной. Поэтому следует использовать методы, которые позволяют не только оценивать точность результата, но и обеспечивать требуемую точность.

Специалисты по программированию давно разработали специальную методику, которая называется «*generic programming*». По-русски ее часто переводят как «обобщенное программирование». В этом случае программа не зависит от конкретных типов данных. Берется вычисление по некоторой формуле – например, вычисляется скалярное произведение. Ясно, что сама формула не зависит от точности представления чисел. Неважно, являются ли числа вещественными с обычной точностью или вещественными с расширенной точностью. Таким программам должны соответствовать достаточно универсальные алгоритмы.

Первый уровень универсальности означает, что алгоритм не зависит от конкретного машинного представления чисел, то есть от



Здесь важно оценить погрешность...

конкретной машинной арифметики. Более высокий уровень универсальности состоит в том, что алгоритмы также не зависят от алгебраической природы типа данных. Например, алгоритмы линейной алгебры могут быть использованы над полем вещественных чисел, над полем комплексных чисел или, может быть, объектов более общей алгебры. Например, в качестве нового сложения берется максимум или минимум, в качестве нового умножения используется обычное сложение. Такие универсальные алгоритмы реализуются с помощью обобщенного программирования, их удобно реализовать с помощью программных языков, которые содержат технику абстрактных типов данных. Такие языки были изобретены в конце 60-х годов. Сейчас из языков данного типа наиболее популярны языки C++ и Java.

Абстрактный тип данных – это такой тип данных, который может быть создан пользователем по своему усмотрению. Это означает, что имеются программные средства, которые позволяют легко строить в машине данные любого типа.

С помощью этой техники очень удобно реализовать универсальные алгоритмы. Сейчас имеет смысл создать новую классификацию численных алгоритмов, расклассифицировав их по степени универсальности. Ясно, что универсальный алгоритм будет весьма надежен, поскольку уменьшается вероятность ошибки. Один и тот же алгоритм, реализованный обобщенной программой, которую можно написать тщательно и аккуратно, может быть использован для работы с самыми разными системами и с данными, которые задаются с произвольной точностью. Мы можем решать задачу с различной точностью промежуточных вычислений и понять, насколько задача устойчива по отношению к промежуточ-

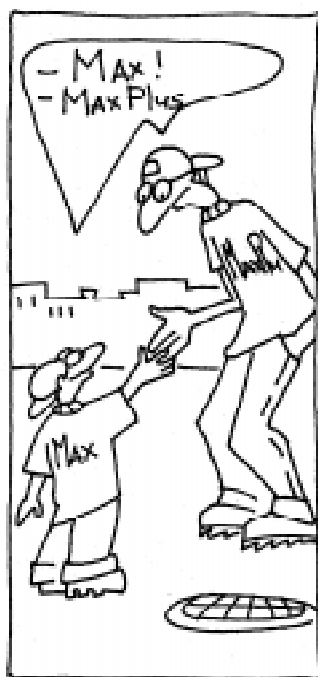
ным ошибкам, а также к ошибкам исходных данных. Это называют степенью устойчивости. Кроме того, как обычно бывает при повышении уровня абстракции в математике, универсальная программа позволяет решить очень много разных задач. А чем меньше программ мы используем, тем меньше вероятность допустить ошибку при конструировании окончательного алгоритма задачи.

Имеется еще один важный источник формирования универсальных алгоритмов и обобщенных программ. Таким источником является новый раздел математики, который сейчас принято называть идемпотентной математикой, или идемпотентным анализом, или идемпотентным исчислением. Это направление сейчас развивается очень многими авторами, возникло обширное международное сотрудничество на эту тему, и в нем очень важную роль играет академик Маслов. По крайней мере, в нашей стране наиболее важные работы в этом направлении ведутся под его руководством.

Оказывается, что наша традиционная математика над числовыми полями – это наука квантовая, и она наиболее адекватно соответствует математическому аппарату квантовой

механики. Точно так же, как у квантовой механики, имеется классический аналог, а именно, классическая механика, у нашей традиционной математики над числовыми полями имеются классические аналоги. Например, таким аналогом является идемпотентная математика.

Идемпотентная математика очень похожа на нашу обычную математику, но только сложение обладает необычным свойством: $x+x=x$, каков бы ни был этот элемент x . Это свойство называется идемпотентностью сложения. Типичная идемпотентная операция – это операция взятия максимума или



*...Max – как бы имя,
а Plus – фамилия....*

минимума. В идемпотентной арифметике основных операций две: новое сложение, которое равно максимуму, и новое умножение, которое совпадает с обычным сложением. Эта алгебраическая система носит название алгебра «макс-плюс». Во Франции даже есть группа авторов, которые подписываются псевдонимом Max Plus, то есть Max – как бы имя, а Plus – фамилия. Псевдоним создан по аналогии с «Николя Бурбаки».

Идемпотентная математика имеет дело не только с алгеброй макс-плюс, но и с десятками других интересных алгебр с идемпотентным сложением. Оказывается, что идемпотентная математика является хорошим аппаратом для решения задач классической механики. Это связано с вариационными принципами механики, с принципом наименьшего действия. Кроме того, идемпотентная математика является очень естественным аппаратом для решения задач оптимизации и оптимального управления.

Очень важно, что многие универсальные алгоритмы работают как в рамках традиционной математики, над обычными числовыми полями, так и в рамках идемпотентной математики, то есть над числовыми идемпотентными алгебрами, такими, как макс-плюс. Тем самым, появляется очень большая и содержательная область, которая является источником многих универсальных алгоритмов и их естественных реализаций. В частности, самые важные алгоритмы – это универсальные алгоритмы линейной алгебры. Хорошо известные алгоритмы обычной линейной алгебры можно усовершенствовать таким образом, чтобы они стали универсальными и работали как в традиционной, так и в идемпотентной математике.

Мы в рамках международного центра «Софус Ли» разрабатываем новый проект: написать учебник по численным методам, исходящий из новых принципов, где четко прослеживалась бы степень универсальности каждого используемого алгоритма, и снабдить этот учебник программной поддержкой, которая позволяла бы с помощью обобщенных программ

универсальным образом решать различные задачи (в частности, учебные задачи и упражнения, которые студент должен прорешать, изучая курс численных методов).

Этот курс состоит из двух томов. Более элементарный том называется «Приближения и погрешности», и в нем основная роль уделяется универсальным алгоритмам первого типа, которые не зависят от машинного представления чисел и от точности вычислений. Здесь особое внимание уделяется так называемому эффекту автокоррекции погрешности. Оказывается, что интервальные методы плохо работают в том и только в том случае, когда промежуточные погрешности взаимно уничтожаются. Это бывает довольно часто, и называется это эффектом автокоррекции погрешности. Этот эффект важен в теории приближений, в методе наименьших квадратов, во многих других задачах. В тех случаях, когда эффект автокоррекции отсутствует, интервальные методы дают разумные оценки погрешности окончательного результата. А в тех случаях, когда интервальные методы «пробуксовывают» и дают чересчур пессимистические оценки, нереальные для погрешности, нужно исследовать эффект автокоррекции и использовать специальный анализ.

Что же касается второй части учебника, то он соответствует более высокому уровню универсальности алгоритмов. Там, в частности, используются алгоритмы, которые работают как в обычной, так и в идемпотентной математике. Кроме того, изложены основы идемпотентной математики, которая является наукой очень простой, элементарной и гораздо более легкой, чем традиционная математика. Например, в идемпотентной математике формула бинома Ньютона очень проста: $(x + y)^n = x^n + y^n$. Многие наши студенты «открыли» эту замечательную формулу давным-давно.

Вообще, надо сказать, что идемпотентной математикой пользуется любая домохозяйка, когда покупает продукты. Что она делает с ценами отдельных продуктов? Она их складывает, а сумму минимизирует. Это самая житейская мате-

матика, связанная с важными практическими задачами, в основном задачами оптимизации. Особое внимание там уделяется универсальным алгоритмам линейной алгебры, их приложениям к конкретным оптимизационным задачам. Например, задачам оптимизации на графах, задачам динамического программирования и так далее.

В квантовой механике действует знаменитый принцип суперпозиции, смысл которого состоит в том, что уравнение Шредингера, то есть основное уравнение квантовой механики, является линейным. И основное уравнение механики (уравнение Гамильтона-Якоби), и основное уравнение в теории оптимизации (уравнение Беллмана), и основное уравнение в теории игр (уравнение Айзекса), и многие другие важные уравнения являются линейными над идемпотентной алгеброй. Более того, в сущности, все это одно и то же уравнение, которое называется обобщенным уравнением Гамильтона-Якоби-Беллмана-Айзекса. Мы имеем дело с одним и тем же объектом.

Существует идемпотентный принцип суперпозиции. Он состоит в том, что многие практически важные задачи, в частности, оптимизационные проблемы, в действительности являются линейными, но не в обычном смысле, а над правильно подобранной идемпотентной алгеброй. Использование этого идемпотентного принципа суперпозиции позволяет широко применять универсальные алгоритмы линейной алгебры и обеспечивает очень большое богатство приложений.

Таким образом, второй том учебника будет посвящен оптимизационным задачам и идемпотентной математике, которая трактуется как естественный аппарат оптимизационных задач. Программная поддержка представляет собой обширный пакет обобщенных про-

грамм, которые реализуют универсальные алгоритмы. Этот пакет написан на языке C++, и планируется, что работа над учебником будет закончена в 2002 году. Естественно, что разные части учебника обкатываются на студентах, которые учатся в международном центре «Софус Ли», а также на лекциях, в школах и на мероприятиях, которые устраивает центр. Мы надеемся, что после этой обкатки появится учебник нового типа, который будет отражать современные тенденции как в прикладной математике, так и в программировании.

Как известно, нет ничего практичнее, чем хорошая теория. По нашему мнению, использование новых идей, как связанных с универсальностью, так и генерированных идемпотентной математикой, упрощает преподавание. Именно поэтому мы пишем учебник, исходя из этих новых принципов. Он рассчитан отнюдь не только (и не столько) на «чистых» математиков, но и на математиков-прикладников, и на инженеров, и на экономистов. Новая математика вовсе не является более слож-

ной, напротив, она гораздо проще, чем традиционная математика. Не зря домохозяйки пользуются именно этой математикой. Точно так же, как классическая механика проще квантовой, так и новая математика проще обычной. Поэтому наша основная цель состоит в том, чтобы предложить новый способ преподавания предмета, как численных методов, так и оптимизационных задач.

Но преподавание – это крайне консервативная вещь. Потребуется очень длительная работа и усилия по пропаганде новых педагогических идей, прежде чем образование будет как-то радикально перестроено. С другой стороны, практика – лучший учитель. Есть хорошо известный критерий того,



...идемпотентной математикой пользуется любая домохозяйка, когда покупает продукты...

как отличить ложных пророков от истинных. «По плодам их узнаете их», – говорил Иисус Христос.

Степень популярности этого нового способа изложения определит только время и практика. Мы, во всяком случае, приложим все усилия к тому, чтобы изложение было достаточно простым и понятным. Обидно, что в школах пока совсем не затрагивается этот новый предмет. Например, такая пара операций, как наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное, – это прекрасный классический пример операций идемпотентной алгебры. Оказывается, что выполняются все стандартные законы – коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность, имеются ноль и единица, можно строить матричную алгебру и так далее. Но школьники так никогда и не узнают об этом, если будут учиться по старым учебникам.

Нам очень интересно, что Вы затронули школьное образование. У нас при журнале действует школа современного программирования. Нам бы хотелось, чтобы Вы высказались по поводу нынешнего курса информатики.

Школьное образование – дело очень тонкое и серьезное. Резко его менять всегда крайне опасно. С другой стороны, информатика – предмет новый для школы, и традиции его преподавания еще не успели установиться. Мне кажется, что свежие идеи надо излагать школьникам. В зрелом возрасте очень трудно заставить людей переучиваться, а школьников научить гораздо легче. Несомненно, что эта наука очень простая, в ней есть вещи, которые можно объяснить школьникам 7 класса, но всякая работа со школьниками должна очень тщательно делаться и обрабатываться.

Как ни странно, написать учебник для школьников

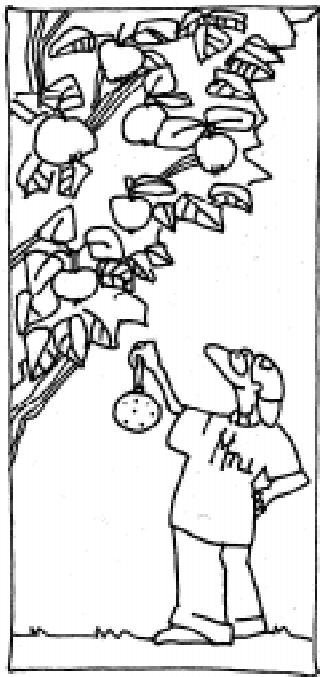
гораздо сложнее, чем для студентов, и, пожалуй, потребуется больше времени, чтобы довести его до приемлемого педагогического уровня. Несомненно, эту работу надо начинать немедленно, уже сейчас. И замечу, что в центре «Софус Ли» мы со школьниками уже этим занимаемся.

Каковы задачи центра «Софус Ли»?

«Софус Ли» – это некоторое неформальное объединение сильных математиков из разных городов и стран. Одна из его важнейших функций связана с развитием идей великого норвежского математика Софуса Ли (Sophus Lie). Деятельность центра довольно разнообразна. По традиции мы работаем сперва со школьниками, потом лучшие школьники становятся студентами или ассоциированными студентами, часть из них потом поступает в аспирантуру, а еще какая-то часть продолжает сотрудничать с центром в качестве равноправных участников. И так получилось, что основная масса школьников у нас из города Минска. «Софус Ли» зародился именно в Минске, хотя сейчас центр тяжести переместился отчасти в Москву, отчасти в Брюссель. Но по-прежнему центр «Софус Ли» является неплохим «пылесосом», который

отсеивает хороших школьников из Минска и направляет их на настоящее математическое обучение. Надо сказать, что в Москве есть много других хороших образовательных организаций, например, Центр непрерывного математического обучения, а для ребят из таких городов, как Минск, по-видимому, альтернативы пока не существует. Во всяком случае, планируется довольно большое расширение нашей деятельности по работе со школьниками и в Москве и в целом по России.

Вы сказали, что работаете со студентами, которые увлекаются программированием.



По плодам их узнаете их...

Не только. Программирование для нас в каком-то смысле дополнительный аспект. Деятельность, связанная с подготовкой хороших программистов, коммерчески выгодна и позволяет центру поддерживать работы, относящиеся к «чистой математике», для которых найти независимое финансирование очень трудно. В действительности же, центр был основан как содружество специалистов в области «чистой математики», а взаимодействие с внешним миром привело нас к тому, что и программирование вошло в сферу интересов центра.

Интересно, что В.И. Рыжик в своем интервью говорит о геометрии как о некоторой отрасли прикладной математики. Известен, наоборот, такой критический взгляд на это словосочетание – что нет прикладной математики, есть математика и ее приложения. Что вы подразумеваете под прикладной математикой?

Я, пожалуй, придерживаюсь точки зрения фонвизинского Митрофанушки: прикладная математика – это та, которая приложена, а та, что покамест еще не приложена, является существительной, то есть «чистой» математикой. В действительности, конечно, математика в той степени, в какой математика является наукой, – это математика «чистая». В последнее время трудно найти такой раздел «чистой» математики, который бы не был для чего-либо приложен. Поэтому под прикладной математикой я понимаю приложения классической математики к конкретным задачам. Это скорее сфера взаимодействия математики с жизнью, а не методы.

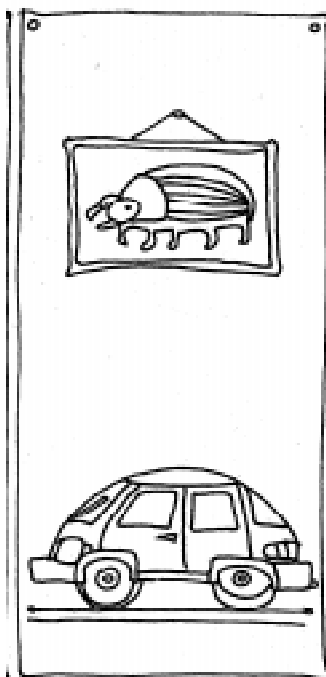
Пожалуй, все-таки прикладная математика несколько отличается от «чистой». Даже «чистая» математика в значительной степени является экспериментальной наукой. После того, как те-

ория отлилась в какую-то каноническую форму, все «промежуточные леса», все эвристические соображения, о которых думал автор, исчезают из окончательного изложения, которое заменяется некоторой «гладкописью». В действительности, когда вы занимаетесь прикладной математикой, для вас прикладной инженерный результат является наиболее важным. В этом случае математика становится ближе к физике и становится «полуэкспериментальной» наукой. Несколько меняются методы, меняется степень убедительности тех или иных соображений. Более того, в прикладной математике компьютерный эксперимент часто гораздо важнее длинных логических построений, потому что при логических построениях где-нибудь можно ошибиться. В этом смысле компьютер – это такая замечательная вещь, которая меняет наше отношение и к «чистой» и к прикладной математике. Появляется заметный элемент экспериментальной работы. Этим и хороши компьютеры.

Так что математика бывает прикладной, когда вас интересует не внутреннее развитие математики, в том числе и методов, имеющих важные приложения, а решение конкретной прикладной задачи, и вы психологически меняете точку зрения: из «чистого» математика становитесь прикладным. У вас меняются акценты, у вас меняется отношение к осмысленности тех или иных приемов.

Вы упоминали о патентах, которые Вы имеете на уже реализованные замыслы.

Это не совсем так. Где-то лет 10 назад мне пришлось работать в патентном ведомстве. Заодно я постарался овладеть патентной наукой и теперь знаю, как нужно получать различные патенты. В качестве эксперимента я один патент оформил, получил на него авторское сви-



*Формула изобретения
должна указывать
на прототип...*

детельство, но на этом деятельность и прекратилась, потому что в России заниматься изобретательством и брать официальные авторские свидетельства – это выбрасывать свои идеи в корзину. А брать настоящие патенты нам, простым людям, не по карману. Их нужно поддерживать и за это платить. Другое дело, что идемпотентная математика дает методику, по которой можно очень легко составить заявки для нескольких тысяч патентов, которые, безусловно, будут полезны для реализации оптимизационных задач. Нет никаких проблем в том, чтобы перевести все эти патенты в «железо», просто это не сделано.

При современной кремниевой технике любой алгоритм легко перевести в интегральную схему. Во всяком случае, идемпотентный принцип соответствия (который в математике играет такую же роль, какую знаменитый принцип соответствия Нильса Бора играет в физике) позволяет без труда построить несколько тысяч новых специальных процессоров и реализовать их в виде интегральных схем. Но поскольку обычно в России судьба изобретателей является весьма тернистой, я предпочитаю публиковать эти результаты. Это тоже одна из форм патентования.

Еще могу объяснить, как делать патент. Грамотная заявка на патент в основном состоит в так называемой формуле изобретения. Формула изобретения должна указать на прототип и отличия вашего изобретения от прототипа. Если у изобретения вообще нет прототипа, то его надо числить открытием, а это уже другое ведомство.

Например, изобретается гвоздь (гвоздь – это прототип), отличающийся тем, что его шляпка смазана бараньим салом. Если вы сможете описать экономический эффект, то отклонить такую за-

явку довольно трудно. Как конструируются новые специальные процессоры? Возьмем в качестве примера процессор, который вычисляет скалярное произведение. Имеется около 100 патентов, описывающих различные аппаратные способы, как вычислить скалярное произведение, потому что при решении задач линейной алгебры эта операция встречается очень часто, и именно эту процедуру необходимо ускорить. Любой из 100 существующих патентов можно взять в качестве прототипа. Осталось указать отличия. Отличие состоит в том, что традиционные математические операции заменяются операциями из той или иной конкретной идемпотентной алгебры. А все находки авторов предыдущих патентов (рациональное распределение памяти, удачные технические решения и так далее) переносятся в новое устройство.

Можно сделать такой компьютер, который будет ближе к интервальным идеям, но, вообще говоря, современные компьютеры как раз не очень приспособлены для интервальных идей. В любом случае, всякий алгоритм можно реализовать в программе, всякую программу можно перевести в «железо». Это вопрос практической и экономической целесообразности.

Я думаю, что реализация идей, связанных с идемпотентной математикой и универсальными алгоритмами, окажет влияние на архитектуру современных компьютеров. Но это дело будущего. А пока очень легко заставить компьютеры с традиционной архитектурой работать с новыми алгоритмами и программами.

Информацию о деятельности центра «Софус Ли» и работах по идемпотентной математике можно найти в Интернете (<http://sophus-lie.euro.ru>).

НАШИ АВТОРЫ

*Литвинов Григорий Лазаревич,
профессор международного центра
Софуса Ли, сотрудник научно-
исследовательского института
системных исследований РАН.*