Рыжик Валерий Идельевич

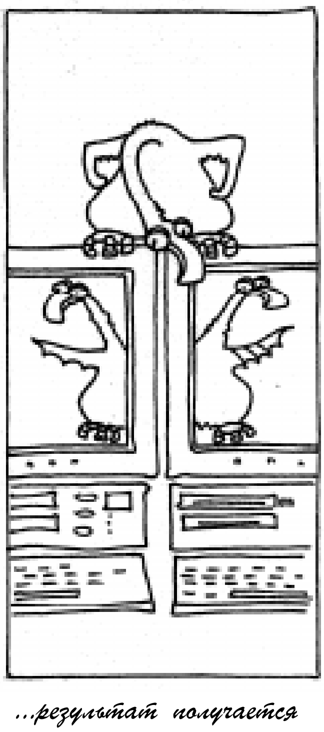
ГЕОМЕТРИЯ И КОМПЬЮТЕР

Многовековая практика преподавания геометрии показывает, что невозможно начальное преподавание геометрии в школе, основанное на полной системе аксиом. Реально ученикам предлагают некоторую усеченную систему аксиом с отказом, например, от аксиом непрерывности, аксиом порядка. Это разумно. Но тогда получается, что мы в школе рассказываем не основы геометрической науки, а что-то другое, рассказываем какой-то школьный предмет. Встает вопрос: можно ли каким-либо образом этот школьный предмет связать с современными математическими тенденциями? Мне кажется, что появление и формирование за последние годы направления в математике, которое называется прикладной математикой, помогает осмыслить реальное преподавание геометрии в школе.

Что я при этом имею в виду? Прежде всего, я не буду вдаваться в дискуссию по поводу того, является ли прикладная математика особым предметом. Есть разные точки зрения по этому поводу, а реальность такова, что, например, есть математические факультеты, а есть факультеты прикладной математики. Прикладная математика, подобно физике, имеет дело с реально существующими объектами или процессами, и для нее вопрос существования, вообще говоря, не стоит.

В преподавании школьной геометрии можно использовать эту же особенность, потому что поднимать развитие ребенка до уровня понимания необходимости доказательства, например, существования перпендикуляра к плоскости, может быть, и надо, но не в самом начале. Он убежден в существовании вертикали, убежден в существовании многогранников и пр. Но если не доказывать существования, встает вопрос, какие у нас методологические основания для выбора такой точки зрения: не надо доказывать существование перпендикуляра к плоскости, надо просто с этим перпендикуляром работать. А эта точка зрения методологически «сидит» в прикладной математике: если я что-то вижу своими глазами, я буду это изучать.

В прикладной математике (как и в физике) доказательные рассуждения свободно используют симметрию и непрерывность. И в школьной математике можно эффективно использовать для доказательства соображения симметрии и соображения непрерывности – я могу привести много примеров. Более того, детей с самого начала тянет доказывать, например, что после проведения биссектрисы результат получается просто из симметрии картинки. Мне неоднократно приходилось слышать от своих учеников, которые серьезно занимаются физикой, аргумент «из соображений симметрии». Однако мы, занимая жесткую позицию, говорим: «Использовать симметрию еще нельзя. Нужны признаки равенства треугольников». Я думаю, что эту странность имеет смысл преодолевать. Для этого надо иметь методологическую основу, и коль



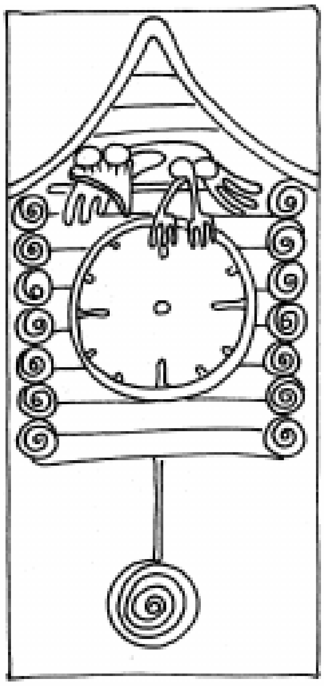
...результат получается просто из симметрии картинки...

скоро ее нет в «чистой» математике, надо ее искать «на стороне».

Моя идея состоит в следующем. Эту основу можно найти в прикладной математике. В ней существует своя методология, свои подходы, свои взгляды на вещи. Если выстроить школьный курс геометрии в соответствии с прикладной математикой, с ее методологией, если мы с самого начала разрешим ребенку свободно пользоваться соображениями наглядности, симметрии, непрерывности, то преподавание геометрии пойдет в школе гораздо интенсивнее, быстрее и интереснее.

И, наконец, есть одна принципиально новая возможность в преподавании геометрии. Это использование компьютера, использование тех графических средств, которые позволяют нам визуализировать многие геометрические факты. Например, расположение нескольких точек на одной прямой или на одной окружности, факт пересечения двух прямых именно в этой точке, а не в какой-нибудь другой, равенство отрезков, равенство углов – это все проверяется при помощи компьютера.

Здесь чрезвычайно важно понять, какую роль играет компьютер в преподавании. Мне кажется, что примерно та же роль отводится компьютеру в прикладной математике и, может быть, даже прибору в физике. Когда физик видит что-либо на экране своего осциллографа, он не подвергает это сомнению, он просто ищет объяснение тому, что он видит. Эту же точку зрения можно реализовать, когда мы преподаем геометрию. Если компьютер показывает, что независимо от треугольника три медианы пересекаются в одной точке, я должен принимать это как факт, и проблема теперь в том, чтобы как-то его обосновать. А это уже чистая математика, или чистая геометрия в традиционном ее понимании.



...в математике нет такой величины, как время...

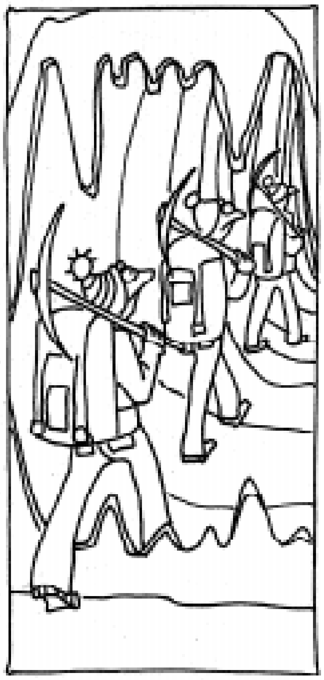
Я думаю, что использование компьютера в геометрии может радикальным образом изменить ее преподавание за счет развития динамических пространственных представлений, которые есть в голове у любого школьника. Ныне практически вся геометрия, которую мы изучаем в школе, статическая. Мы сделали рисунок, и уже не имеем возможности проследить за изменениями компонентов этого рисунка в зависимости от того или иного параметра. Компьютер же позволяет это сделать. Кроме того, он позволяет формулировать проблемы, формулировать гипотезы, он позволяет их проверять, он позволяет вести наблюдение. И, между прочим, за этим наблюдением скрывается еще одно интересное соображение. Если некоторый параметр меняется, а ребенок смотрит за результатом и говорит о том, что при этом происходит, то тем самым в школьную геометрию входит фактор времени. Но в математике нет такой величины, как время, а в прикладной математике она есть. Вот еще одна мысль, которая (благодаря компьютеру) направляет школьное преподавание геометрии на курс прикладной математики.

Подводя итог своим очень кратко высказанным соображениям, я думаю о том, за счет чего возможен прогресс преподавания школьной геометрии. Известно, что сейчас состояние школьной геометрии кризисное, потому что в мире нет четкого понимания, как преподавать геометрию. Есть много разных проблем, например, одновременное изучение планиметрии и стереометрии. Я думаю, что смена акцентов в школьном преподавании геометрии со стороны «чистой» математики в сторону прикладной математики (вместе с использованием компьютера) может помочь преодолению этого кризиса.

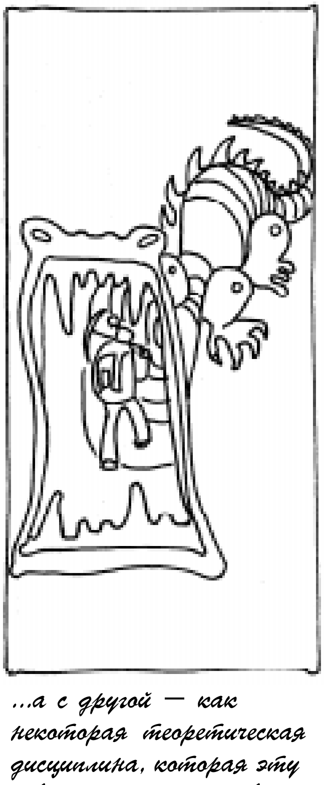
Вы предлагаете построить медианы и экспериментально убедиться, что они пересекаются в одной точке. Нет ли опасений, что никто потом не захочет об этом думать: произошло и произошло. Не получится ли, что наличие инструмента, который позволяет экспериментально определять какие-то зависимости, снизит интерес к обнаружению зависимостей, которые на школьном уровне поддерживаются задачами, и все задачи по геометрии как бы умрут?

Я вижу здесь границу между практическим и теоретическим уровнем понимания предмета. И это дает осно ференциации школьного курса геометрии. В том-то и дело, что, с одной стороны, я знакомлюсь с фактом, а с другой стороны, потом, если угодно, для желающих или в соответствии с атмосферой, с обстановкой в классе могу сказать: «А вот доказательство». Мне очевидно, что потребность в теоретическом мышлении у большинства учеников изначально отсутствует. Это нормально. Но математика может предстать перед учеником в двух ипостасях: с одной стороны как совокупность фактов, которые можно наблюдать, а с другой – как некоторая теоретическая дисциплина, которая эту совокупность фактов объясняет. Я еще раз говорю: ситуация серьезная, но мне кажется, что она разрешима именно потому, что можно вести преподавание математики на двух уровнях – уровень наблюдения и уровень объяснения. В какой ситуации какой уровень предпочесть и как их сочетать – это уже дело программы, дело учителя. Я не вижу при этом никакой трагедии. Думаю, что это лучше, чем занять однозначную позицию: я буду рассказывать в школе только то, что могу обосновать. Лучше уже потому, что это может убрать страх перед математикой. Из-за такой позиции в школьную программу не попали многие интересные вещи, которые можно было бы показать. Я приведу конкретный пример: лист Мебиуса. Качего проще – перевернул полоску бумаги и склеил края. Однако в школе его не проходят. Почему? Потому что в школе ничего не докажешь, потому что это топология. Ну и что? Расскажите на наглядном уровне, покажите рисунки, проведите эксперименты. Я убежден, что такие примеры необыкновенно развивают пространственное мышление и расширяют кругозор. Почему же это надо убирать?

Вы работаете в известной в России Физико-технической школе, основанной физиком-академиком Ж.И. Алферовым. Не является ли такая школа инструментом, посредством кото-



Но математика может предстать перед учеником в двух ипостасях: с одной стороны как совокупность фактов, которые можно наблюдать...



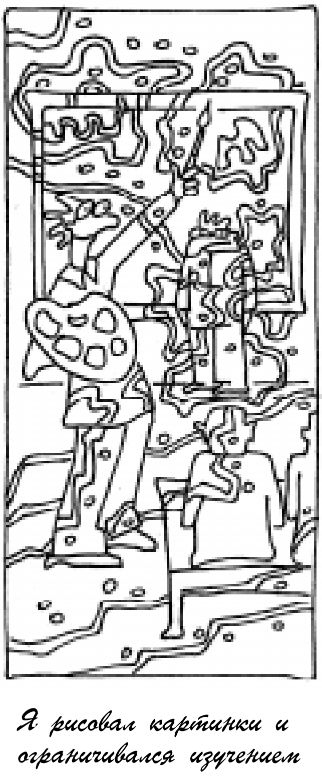
...а с другой — как некоторая теоретическая дисциплина, которая эту совокупность фактов объясняет...

рого новые веяния в точных науках находят свое отражение в образовании.

Здесь я сразу хотел бы сделать некоторый акцент. В школе работают очень грамотные математики, но, поскольку они или преподают в ВУЗе, или недавно закончили ВУЗ, то они не слишком далеко ушли от более-менее канонического курса математики. В этой ситуации мне проще говорить о том, что делаю я. Я полагаю, что преподавание математики для физиков имеет свою специфику по сравнению с преподаванием математики для математиков. Дети, достаточно способные, с трудом воспринимали мои попытки уделять чрезмерное внимание вопросам существования. Например, я показываю ученикам дифференциальное уравнение гармонического колебания и хочу доказать единственность решения. А они спрашивают: «Зачем это надо?» Им это неинтересно. Они видят процесс, они понимают, что есть решение, которое удовлетворяет всем условиям. Зачем еще что-то придумывать? У них иначе устроено мышление. Им (в школе) нужна математика в первую очередь операциональная, а во вторую очередь – математика идей. Кстати, математический анализ я им сознательно рассказывал так, чтобы им было что делать в ВУЗе, поэтому все эти «эпсилон-дельта» игнорировал. Я рисовал картинки и ограничивался изучением гладких и кусочно-гладких функций. Для меня, например, понятие непрерывности не было особо важным, для меня более существенно понятие дифференцируемости. Есть гладкая функция, есть процесс, есть скорость процесса, этим и будем заниматься. Разрывные функции – только для примера.

Здесь у меня было много идей, одна из них состоит в том, что я математику разделил на две части. 8–9 класс – операциональная математика Достаточно сказать, что учеников 8–9 класса я научил («на пальцах») дифференцировать и интегрировать, потому что без этого они не могут полноценно изучать механику. Пришлось придумывать какие-то подходы, чтобы ребенок понял основные идеи дифференцирования и интегрирования и потом мог решать самые простые задачи . А вторая часть – менее операциональные, более идейные вещи. Кроме того, можно было воспользоваться компьютером. Я разрешил детям свободно использовать Derive на уроках математики и даже на переводных экзаменах.

Итак, я выделяю две существенных особенности преподавания математики в такой школе. Первое, о чем я уже упоминал: математика для физиков – это не математика для математиков. Еще Ландау писал, что физикам надо рассказывать математику такую, которая работает в физике, которая будет нужна физику для работы. Второе: предельно широкое, по возможности, применение компьютеров.



Я рисовал картинки и ограничивался изучением гладких и кусочно-гладких функций...

В последние годы меня больше интересует применение компьютера в геометрии, но вместе с тем, я думаю, что настанет пора создавать новый предмет – компьютерную математику. При создании этого предмета самое главное – найти возможности для взаимодействия ребенка с компьютером, то есть надо найти ситуации, когда ученик работает вместе с компьютером. Это та идеология, которую я исповедую: компьютер для школьника должен быть как прибор для физика. Когда физик снимает показания приборов, он или использует эту информацию дальше, или начинает думать, почему приборы показывают столько-то. И в школьной математике возможен и тот, и другой подход. Пусть компьютер мне показал, что уравнение имеет два корня. Дальше я могу или это использовать и двигаться вперед, или начать думать, почему он показывает два корня. Это равноправные ветви при создании банка задач, когда бессилен как один человек, так и один компьютер. А симбиоз компьютера и человека позволяет эту задачу решить. Но это глобальная проблема на много лет.

В свое время П.П. Капица создал московский Физико-технический институт и со студентами реализовал идею профессиональной подготовки, когда они с младших курсов работают в действующих научных коллективах и понимают, чем они занимаются. На уровне школы так сделать не удается, и там, наверное, нет прямой связи между их дальнейшей профессией и обучением в школе?

Нет, такая связь есть. Я хочу обратить ваше внимание на то, что школа называется Физико-технической. В Техническом университете есть Физико-технический факультет, и институт имени А.Ф. Иоффе называется Физико-техническим. То есть даже по названию видна преемственность. Это первое. Второе: начиная с десятого класса, наши ученики один день в неделю полностью проводят в лабораториях Физтеха. Это предложил Ж.И. Алферов 12 лет назад, и это было очень смелым, интересным и далеко идущим шагом. И что получилось? Очень часто оказывалось, что дети, которые пришли в те или иные лаборатории, провели там студенческие годы, а сейчас работают там же в качестве научных сотрудников и в тех же лабораториях защищают диссертации. Мало того, что они, по мере сил и возможностей, участвовали во все более сложных конкретных исследованиях, они еще и налаживали контакты с конкретными людьми, они видели, кто что делает. И в результате получается непрерывный путь от школьника до специалиста.

Рыжик Валерий Идельевич,
учитель математики лицея
«Физико-техническая школа».

НАШИ АВТОРЫ