СТАНДАРТЫ и концепции

ВЛИЯНИЕ ИНФОРМАТИКИ НА ПРЕПОДАВАНИЕ МАТЕМАТИКИ: МНЕНИЕ ПЕТЕРБУРГСКИХ УЧЕНЫХ

Редакция журнала «Компьютерные инструменты в образовании» провела серию интервью с известными математиками, специалистами в прикладной математике и информатике, преподавателями, работающими в образовательных учреждениях, известных своими научными исследованиями вообще и, прежде всего, в математике. Всем была задана тема интервью: «Новые тенденции в математике и математических науках, их отражение в образовании».

Выбирая людей для интервью, мы руководствовались следующими соображениями:

– это должен быть специалист высокой квалификации, знающий проблемы обучения математике;

– это интервью должно соответствовать тематике журнала, то есть в данном случае отражать те тенденции в математике, математических науках и преподавании математики, которые связаны с развитием информатики.

На вопросы редакции ответили (в хронологическом порядке):

– Юрий Владимирович Матиясевич, чл.-корр. РАН, сотрудник ПОМИ;

– Иосиф Владимирович Романовский, профессор кафедры операционного исчисления математико-механического факультета СПбГУ, научный руководитель Заочной школы современного программирования;

– Григорий Лазаревич Литвинов, профессор международного центра Софуса Ли, сотрудник научно-исследовательского института системных исследований РАН;

– Николай Кириллович Косовский, заведующий кафедрой информатики математико-механического факультета СПбГУ;

– Валерий Идельевич Рыжик, канд. пед. наук, преподаватель математики физико-технического лицея, один из авторов известной серии учебников по геометрии;

– Святослав Сергеевич Лавров, чл.-корр. РАН, автор серии базовых учебников по теории программирования;

– Марк Иванович Башмаков, академик РАО, автор серии учебников по алгебре и основам анализа;

– Слисенко Анатоль Олесьевич, профессор университета Париж-12, сотрудник СПИИРАН.

Основываясь на высказанных экспертных оценках, обнаруживаем любопытную картину, которая дает представление о тенденциях в преподавании математики. Наиболее общие выводы таковы:

1. Современные тенденции в математике не отражаются на ее преподавании, особенно на уровне школы.

2. Развитие математики не влияет непосредственно на ее преподавание. В то же время на преподавание математики влияет развитие прикладных наук, в частности, информатики.

3. Информатика влияет на исследования в математике и на ее преподавание.

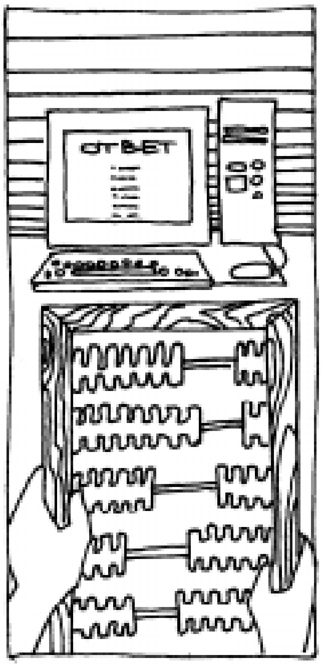
Более детальная картина влияния информатики на преподавание математики представлена в материалах следующих интервью.

Матиясевич Юрий Владимирович

КАК ИНФОРМАТИКА ВЛИЯЕТ НА МАТЕМАТИКУ

Есть традиции, которые остаются неизменными, хотя условия обучения математике меняются. Появились мощные компьютерные инструменты, которые позволяют производить сложные вычисления. Как эта ситуация влияет на обучение математике?

Есть много спорных вопросов – нужно ли, скажем, учить студентов дифференцировать, тем более интегрировать? Лучше заставлять делать это «вручную» или обучать работе на некоторой системе компьютерной алгебры? На самом деле, использовать мощную вычислительную систему не очень просто. Во-первых, она часто предлагает несколько вариантов сделать одно и то же, и нужно понимать, какой из них наиболее эффективен. Для простых задач можно об этом не думать, а для сложных надо подумать о системе вычислений. Кроме того, все эти системы, к сожалению, содержат разнообразные ошибки, и нельзя им слепо доверять. Надо всегда иметь независимый способ проконтролировать вычисления. Когда мы подсчитали первообразную, имеет смысл продифференцировать (дифференцирует машина обычно лучше, чем интегрирует). Здесь культура вычислений состоит в том, чтобы интуитивно понимать, что может, а что не может быть правильным ответом, и владеть системой контроля за работой машины. Этому надо учить, и можно давать студентам не «игрушечные» примеры, которые обычно дают, а более реальные задачи, которые требуют хорошего продумывания и использования имеющихся ресурсов. Чтобы при правильном подходе их можно было сделать за 5 секунд на машине, а при плохом программировании это требовало бы немыслимого времени.



Надо всегда иметь независимый способ проконтролировать вычисления.

Эти проблемы в какой-то степени связаны с классической вычислительной математикой или не только с ней?

С вычислительной математикой, по-видимому, все обстоит более-менее хорошо. Проблемы связаны с формулами.

То есть человек может неграмотно поставить задачу?

Да. Самый примитивный пример – как вычислять числа Фибоначчи. Не задумываясь, можно написать в системе «Математика»:

$\varphi(0)=1,\ \varphi(1)=1,$

$\varphi(n,\ n>1):=\varphi(n-1)+\varphi(n-2).$

Если мы подсчитаем таким способом, например, $\varphi(200)$, программа будет много раз выполнять одно и то же действие. А если вставить строчку

$\varphi(n, n>1):=\varphi(n)=\varphi(n-1)+\varphi(n-2),$

программа будет запоминать каждое вычисление и считать очень быстро. В математике одну запись равенства от другой не отличают, но в алгоритмах это может заметно повлиять на скорость вычислений.

Это вопрос технологического плана или математический вопрос, который надо выделить из программирования?

Просто нужно себе представлять, как это будет реализовано на машине, что машина будет делать, если вы напишете так или иначе. Для математика это могут быть две эквивалентные операции, а для машины – два разных набора действий.

Эти идеи должны попадать в математику, или их лучше рассказывать в курсе программирования и информатики?

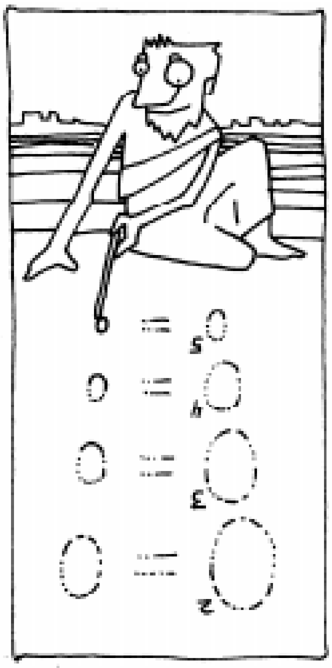
Нет четкой границы – где кончается математика и где начинается информатика. Например, на чемпионате мира по программированию побеждает команда из Санкт-Петербурга, и все три ее участника имеют больше отношения к математике, чем к информатике. Компьютеры, конечно, влияют на математику, на то, как ее надо преподавать.

Должна ли «компьютерная математика» передвигаться в школу?

В определенном смысле должна. Дело в том, что вычислительные системы порождают иллюзию, что вычисления делаются очень легко. Нажал на кнопки – и все, что надо, получилось. На простых действиях это действительно так, а на сложных часто уже не так. И люди просто не чувствуют, какую работу они поручают машине, что ей сделать легко, а что сложно. Этому надо учить.

Достаточно ли в «компьютерной математике» материала для школьного курса?

Имеет смысл учить эффективным алгоритмам, и в этой области как раз есть идеи, с которыми можно знакомить школьников и пояснять им, что одно и то же можно сделать по-разному, с разной степенью трудоемкости. Например, в школе учат умножать столбиком, а есть более эффективный алгоритм для умножения длинных чисел. На этом примере можно пояснить, что новый способ будет более эффективным.



Это называется «доказательство с нулевым знанием».

Не могли бы вы перечислить еще несколько идей и тем, важных для школы?

Например, это классическая задача о сортировке. Требуется упорядочить очень большое множество, и простейшие алгоритмы будут очень долго работать. Это связано с вопросами трудоемкости.

Из новых идей, которые пришли в математику из информатики, можно вспомнить, например, новый взгляд на то, что такое доказательство. На эту тему существует много сюжетов. Например, я доказал теорему и хочу убедить вас, что теорема верна. В традиционном варианте я вам это рассказываю, вы понимаете, и далее можете рассказать кому угодно. Но возможен вариант с интерактивным доказательством. Идет диалог между мной и вами, в котором вы играете активную роль. Вы задаете мне вопросы, на которые я отвечаю. После нашего диалога вы убеждены, что теорема верна, но вы никого сами убедить не можете, причем такое доказательство можно очень красиво формализовать.

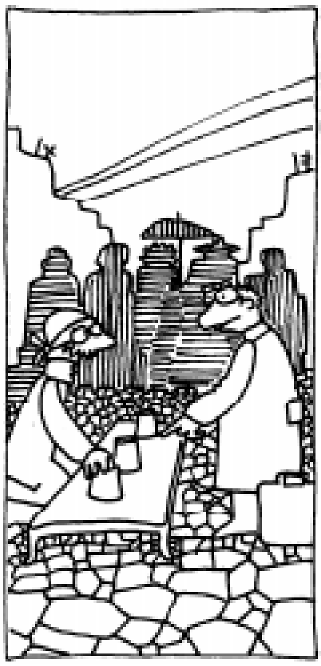
Это называется «доказательство с нулевым знанием». Могу привести вам простейший пример. Я люблю пояснять такие вещи «методом кошки». Его придумал Марк Твен, когда его попросили объяснить, что такое радио. Что он сказал? «Радио – это беспроволочный телеграф». Далее он объяснял, что такое телеграф. «Представьте себе очень большую кошку, у которой голова в Чикаго, а хвост в Нью-Йорке. В Нью-Йорке дергают за хвост, а в Чикаго мяукают. А радио – это то же самое, только без кошки». То есть я вам объясню сначала с кошкой, а как без кошки – это уже некоторые тонкости.

Допустим, что у нас имеется граф. Я хочу его раскрасить в несколько цветов, чтобы соседние вершины были раскрашены по-разному. Эта работа считается трудоемкой, быстрые алгоритмы неизвестны. Я хочу вас убедить, что этот граф раскрашен в N цветов. Самое простое – раскрасить граф и показать собеседнику. Но саму раскраску я хочу держать в тайне от вас. Я хочу убедить вас в том, что такая раскраска есть, но не показывать ее. Допустим, что мы раскрашиваем граф в 3 цвета: A, B и C. Я выбираю три реальных цвета: красный, синий, зеленый. Можно устроить соответствие между цветами и символами A, B и C. Есть шесть вариантов. Я кидаю монетку и раскрашиваю мой граф в некотором соответствии с цветами. Затем, скажем, покрываю все вершины монетами и показываю вам рисунок. Затем вы меня спрашиваете, в какой цвет окрашены концы данного ребра. Я снимаю монету на одном конце ребра, на другом его конце. Если они окрашены одинаково, вы говорите, что условие не выполнено, а если они окрашены по-разному – вы удовлетворены. Могу ли я вас обмануть? Могу, если где-то вершины окрашены одинаково, но одновременно вы их не увидите. Какова вероятность того, что мне удастся вас обмануть? Допустим, что у нас n ребер и где-то есть «неправильное» ребро. Мне не удастся вас обмануть с вероятностью $1/n$. С вероятностью $1-1/n$ я вас обману. А теперь мы делаем этот эксперимент n^2 раз. То есть я заново раскрашиваю граф, заново вам показываю картинку, и вы выбираете ребро. Каковы мои шансы вас обмануть? Это примерно $(1-\frac{1}{n})^{n^2} \approx e^{-n}$. Если мы это сделаем 1000 раз, то мои шансы вас обмануть – это e^{-1000}. Вы, скорее всего, согласитесь с тем, что граф раскрашен в n цветов. А теперь – какую информацию вы от меня получили? Что вы видели? Вы видели 1000 копий графа и про одно ребро каждой копии знали, что его концы разного цвета. Никакой информации о том, какую раскраску на самом деле я знаю, вы от меня не получили. Я вас убедил, что граф можно раскрасить, не сообщив ничего ни про одну конкретную раскраску. Это был пример «доказательства с нулевым знанием», но он был основан на том, что были выполнены некоторые действия с графом. То же самое можно сделать на более абстрактном уровне.

Вы, вероятно, поняли, какой класс задач годится для такого приема и в чем можно убедить с «нулевым знанием». Можно формализовать понятие «нулевого знания». Необходимы три условия. Первое - есть тот, кто доказывает, и тот, кого убеждают.

Второе – в случае невыполнения условия мои шансы вас обмануть в процессе нашего обмена информацией экспоненциально стремятся к нулю, то есть можно сделать вероятность достоверности сколь угодно близкой к 1.

И третье, самое тонкое условие, – информация, которую вы получите при этом доказательстве, не позволит вам сократить время поиска информации самостоятельно. То есть эта информация не даст вам никакой подсказки для решения задачи. Вы могли бы и сами граф раскрасить, но то, что вы у меня увидели, вам никак не поможет, и время вашего вычисления не может существенно сократиться. Скажем, я могу вас убедить, что данное число составное, но информация, которую вы при этом получите, не позволит вам самостоятельно найти его делители.



Каковы мои шансы вас обмануть?

Эта тема граничит и с информатикой и с математикой. Зачем такие вещи нужны? Скажем, это очень полезно в шифровальном деле. Например, я получаю деньги в банкомате, для чего должен набрать свой код. Вы его подсмотрели, подошли и получили мои деньги. А если будет проходить диалог, в котором я буду нечто доказывать интерактивно, то есть, например, смогу убедить машину, что граф можно раскрасить, и она мне выдаст деньги? За этим диалогом вы можете сколько угодно подсматривать, но вы не сможете извлечь никакой информации, чтобы потом взломать шифр. Это доказательство никому никакой информации не передает.

Еще один пример. Допустим, у нас было некоторое доказательство. Его можно преобразовать в некоторый другой объект, очень нетрадиционный. Что с ним можно делать? В нем можно взять наудачу, скажем, 32 бита и провести с ними некоторое вычисление. Если доказательство было ошибочным, то с вероятностью 1/2 вы это выявите, изучив эти 32 бита. Если вы это повторите 100 раз, то вероятность того, что вы не обнаружите ошибку, будет $\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$. То есть проверить правильность доказательства можно, не изучая все это доказательство. Причем вероятность ошибки может быть сделана гораздо меньше вероятности ошибки человека, вероятности сбоя компьютера и так далее. На Международном конгрессе математиков за этот результат была присуждена премия по приложениям математики к информатике. Это новый взгляд на доказательство, пришедший со стороны информатики и требующий довольно нетривиальной математики. Сразу учить этому в школе еще не нужно, а в вузах можно давать представление о том, что бывает очень нетрадиционный подход к доказательству.

Это связано с тем, что есть доказательства, которые невозможно проверить?

Это другая тенденция развития математики. Сейчас появилась экспериментальная математика. Есть много гипотез, которые мы доказать не можем, а численная проверка дает что-то очень правдоподобное. По-видимому, дальше будут параллельно развиваться две науки: математика, где все доказывается, и «квазиматематика», где предлагаются гипотезы и приводятся численные подтверждения. Здесь можно и ошибиться, но такой способ проверки сейчас активно используют. Есть еще один вид деятельности – когда доказательство строгое, но человек не может это проверить. Скажем, та же проблема четырех красок. Может быть, придумают доказательство, которое можно проверить, а может быть, эта проблема так и останется примером одной из первых задач, которую доказала машина, а человек никогда не проверит.

НАШИ АВТОРЫ

Матиясевич Юрий Владимирович, член-корреспондент Российской Академии Наук (РАН), заведующий лабораторией математической логики Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В.А. Стеклова.