Волкова Наталия Александровна
Замилов Антон Валерьевич

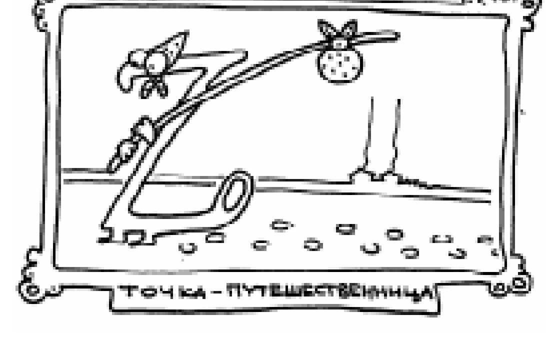
ПЕРВЫЕ ЭКСПОНАТЫ. ФРАКТАЛЫ: МНОЖЕСТВО МАНДЕЛЬБРОТА И МНОЖЕСТВА ЖЮЛИА

Впервые о музее занимательной науки Перельмана, созданном в Ленинграде, я услышала в детстве от своего отца, который рассказывал о нем как о путешествии в сказку. Там было решето, в котором носили воду, курицы клевали зерна пшена, которые ссыпались по наклонной плоскости, образуя классический колокол Гаусса – одним словом, обычный мир представал с необычной стороны. Мой отец был из того предвоенного поколения любознательных мальчишек, любимыми книгами которых были книги Перельмана и Рюмина. Эти потрепанные книжки были одними из тех немногих вещей, которые удалось спасти моей бабушке после бомбежки в 42-м, когда отец уже был под Сталинградом. После войны он стал инженером-строителем, строил заводы, каналы, космические объекты, но до конца жизни остался в душе неугомонным изобретательным мальчишкой. И в этом немалая заслуга удивительных книг Я.И. Перельмана, которые увлекали детей в бескрайний мир познания природы и техники, развевали туман предрассудков и заблуждений. Книги пережили музей занимательной науки, который был разрушен во время войны, а после гибели в блокадном Ленинграде в 1942 году его создателя восстановить музей было некому...

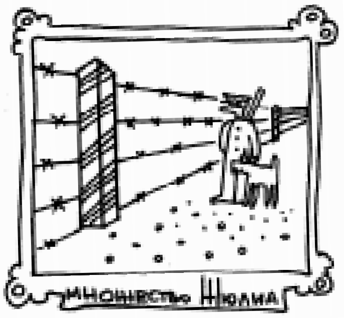
Авторы представляют один из экспонатов нового виртуального музея занимательной науки – компьютерную интерактивную программу.

ФРАКТАЛЫ И ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ

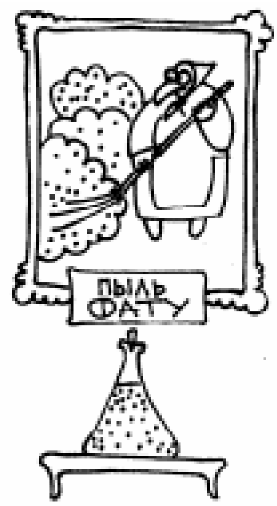
Определение фрактала еще не приняло классически отшлифованный вид, так как содержание этого понятия все еще обогащается и уточняется. Грубо говоря, под фракталом понимается фрагментированная геометрическая форма, которая может быть разделена на части, каждая из которых (по крайней мере, приблизительно) есть уменьшенная копия целого. Более сложные математические определения фрактала связаны с понятием размерности. Фракталы – это объекты, обладающие дробной размерностью, геометрические формы, занимающие промежуточное положение между плоскими фигурами и пространственными телами, что-то вроде бесконечно густых сеток или губок. Мандельброт дает математическое определение фрактала как множества, размерность которого строго превышает топологическую размерность, то есть ту нормальную размерность, которую мы привыкли использовать. (Так точка имеет топологическую размерность 0, линия – топологическую размерность 1, поверхность – топологическую размерность 2.)



Как же получаются такие объекты? Известные в математике примеры фракталов (кривая Пеано, снежинка Коха и т.д.) получаются с помощью некоторого бесконечного итерационного процесса.



Итерационные процессы, или процессы с обратной связью, когда одна и та же операция повторяется раз за разом и результат предыдущей является начальным значением для следующей, часто встречаются не только в математике, но и в природе. Лист дерева разворачивается из концевой почки на ветке, выросшей из предшествующей и т.д. Рост сосульки при таянии снега – тоже природный итерационный процесс: очередная капля воды, попадающая на сосульку, намораживается на нее, лишь едва заметно изменяя ее форму. Подобно этому происходит рост коралловых рифов, послойный рост кристаллов из растворов и т.д. и т.п. На каждом шаге процесса ветка, сосулька, коралл, кристалл изменяются, оставаясь подобными себе. Если присмотреться вокруг, то примеры развития таких процессов можно продолжать бесконечно. Природа конструирует свои творения с помощью небольшого числа исходных элементов и простого итерационного принципа.



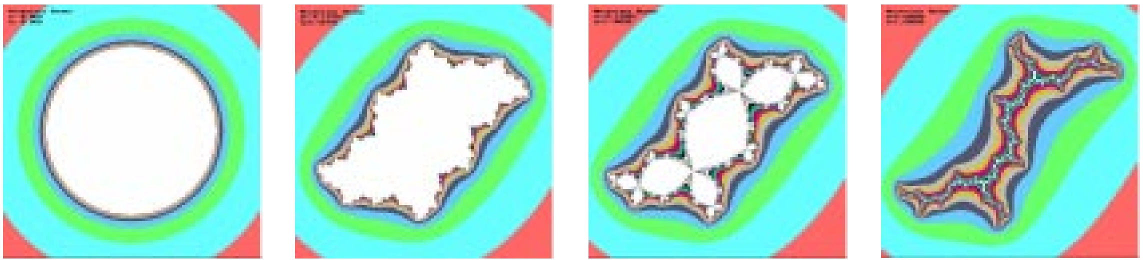
Необычность понятия фрактала связана с тем, что его невозможно задать без указания процесса построения. Можно сказать, что в понятии фрактала главным является не столько геометрический объект с конкретными свойствами, сколько способ его конструирования, здесь важна не статика объекта, а динамика процесса.

МНОЖЕСТВА ЖЮЛИА И МАНДЕЛЬБРОТА

Как математически описать эти почти очевидные процессы и структуры? Этим вопросом заинтересовался профессор Гарвардского университета Бенуа Б. Мандельброт, выпустивший в 1976 году свою известную книгу «Фрактальная геометрия природы». Обратившись к трудам своих предшественников французских математиков Жюлиа и Фату, которые в начале XX века исследовали вопрос о сходимости итерационных процессов[1] на действительной оси, он сделал то же, что сделал в XIX веке Б. Риман: чтобы получить ответ на сложный вопрос о свойствах функций действительного переменного, он перешел на комплексную плоскость. Мандельброт сделал и следующий шаг – упростил до предела правило итерационного перехода. В итоге получилась следующая задача: зададим движение некоторой фиксированной точки z_0 в комплексной плоскости с помощью итерационного процесса: $z_n = z_{n-1}^2 + c$, где n – номер положения точки, c – комплексное число, параметр процесса. Где будет «точка-путешественница» z_0 после достаточно большого числа шагов n? Аналитически ответ можно получить только в одном самом простом случае при $c = 0$: тогда все точки z_0, лежащие внутри единичного круга «сжимаются» в точку 0, вне круга «убегают» на бесконечность, а лежащие на окружности – крутятся по окружности в хаотическом порядке.

При отличном от нуля значении c картина усложняется. Граница между областями притяжения к конечным точкам и к бесконечности – *множество Жюлиа* – искажается, становится похожей на изрезанный морской берег, а затем рассыпается, как будто взрывается, на отдельные точки, так называемую *пыль Фату*. Незаурядность Б. Мандельброта как математика и преподавателя проявилась в том, что

[1] *Итерационным процессом* в математике называется числовая последовательность $\{x_n\}_{n\geq 0}$, полученная по следующему правилу $x_{n+1} = f(x_n)$ при условии, что задано x_0.



c = 0 c = –0,12375+*i*0,56505 c = –0,12+*i*0,74 c = *i*

Рисунок 1. *Множества Жюлиа.*

он, будучи, как принято говорить, «чистым» математиком, не чурался современной техники. Он попросил своего знакомого программиста для учебных целей сделать несколько компьютерных программ, которые бы показали процесс притягивания точек для произвольных значений *c*. Тогда-то они и увидели на экране своего «допотопного» (дело было в далеком 1980 году, когда только-только появились первые персональные компьютеры) необычные красивые картинки – *множества Жюлиа* (рисунок 1). Эти причудливые кривые представляют собой границу раздела между точками, убегающими на бесконечность, и точками, притягивающимися к конечным точкам-аттракторам[2]. Множества Жюлиа, как видно на рисунке, в зависимости от *c* могут быть как связными[3], так и превращающимися в отдельные несвязные скопления точек, *пыль Фату*.

Особенность этих кривых заключалась в том, что они состояли из частей, которые были подобны всей кривой или ее части, то есть они самоподобны. Другая их особенность состояла в том, что их размерность была больше их топологической размерности.

Но главная заслуга Мандельброта состояла в открытии и исследовании свойств универсального *множества Мандельброта* – множества тех значений параметра *c*, при которых граница между областями притяжения конечных и бесконечных точек-аттракторов остается связной, или, иными словами, множество Жюлиа связно. В результате многочисленных вычислительных экспериментов 1 марта 1980 года из принтера появился листок с изображением, пока еще неясным, этого множества – множества Мандельброта. Потребовалось еще два года вычислительных экспериментов и упорных математических исследований, чтобы окончательно разобраться с загадочным множеством Мандельброта. Оно оказалось связным, а его граница – типичный фрактал – состоящей из уменьшенных копий множества Жюлиа, которое получается при значении параметра *c*, взятого в соответствующей области множества Мандельброта. Различная окраска областей комплексной плоскости означает различную скорость с которой точки покидают окрестность нуля, то есть количество шагов через которое $|z_n| > R$. Цветовая гамма и количество цветов – скорее дело художественного вкуса и характеристик монитора, нежели науки.

Универсальность множества Мандельброта состоит в том, что его вид не зависит от правила итерационного перехода.

Кроме того, граница этого множества является аттрактором, только необычного вида. Точки при каждом шаге ите-

[2] *Аттрактором* называется предельная точка итерационного процесса, то есть $\lim x_n$ при $n \to \infty$.

[3] *Связным множеством* называется множество, все точки которого можно соединить кривой, которая принадлежит самому множеству.

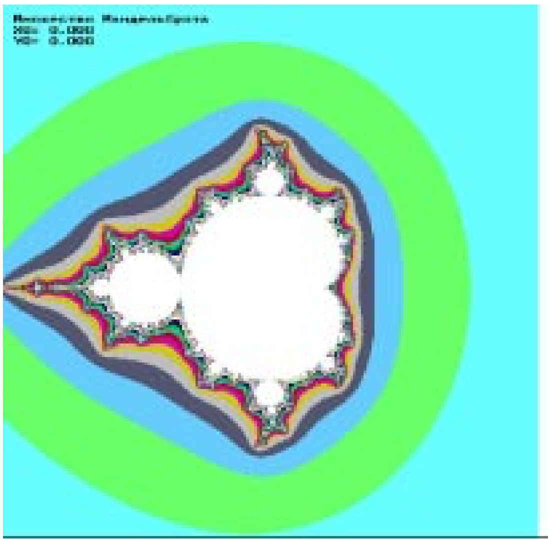


Рисунок 2. *Множества Мандельброта.*

рации перемещаются по границе, но не покидают ее.

ПРОГРАММА «МНОЖЕСТВА ЖЮЛИА И МАНДЕЛЬБРОТА»

Программа представлена на III конкурс «Петербургская Интернет-школа» в раздел «Музей занимательной науки». Она наглядно показывает связь между этими множествами. Она содержит три закладки: «О программе», «Множество Мандельброта и множества Жюлиа», «Введение в теорию фракталов».

На первой закладке описание программы. На второй закладке на экране компьютера в трех окнах можно видеть множества Мандельброта и Жюлиа. В первом окне множество Мандельброта, на двух других – Жюлиа, причем в маленьком окне оно показано схематически в черно-белом изображении, но динамически изменяющимся при перемещении курсора по множеству Мандельброта. В большем окне строится цветное изображение множества Жюлиа после цикла итераций при фиксации конкретного значения параметра с щелчком мыши. Параметр может быть задан также и непосредственно набором конкретного значения действительной и мнимой части *c* в специальных окошках. Это позволяет точно воспроизвести множества Жюлиа при конкретных *c*. Колорит рисунков определяется параметром «количество цветов», который, в свою очередь, зависит от параметров монитора. В зависимости от уровня подготовки, пользователь может получить как эстетическое удовольствие, так и пищу для серьезных математических размышлений.

На закладке «Введение в теорию фракталов» кратко приведены основные определения и сведения из теории фракталов, снабженные многочисленными иллюстрациями. В конце дан список публикаций и сайтов в Интернете, посвященных фракталам.

Волкова Наталия Александровна, кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики Государственной морской академии им. адм. С.О. Макарова.

Замилов Антон Валерьевич, курсант 5-го курса Государственной морской академии им. адм. С.О. Макарова.

НАШИ АВТОРЫ