Кудрявцева Марина Валерьевна
Сеннов Андрей Светозарович

ЭКОЛОГИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ШКОЛЕ

При использовании аппарата математического моделирования для решения конкретных практических задач возникают проблемы, связанные с оценкой адекватности используемой модели и оценкой достоверности полученных результатов. Наиболее обычными причинами этих проблем являются:

- непонимание специалистом-математиком специфики конкретной задачи;
- незнание специалистом в конкретной области возможностей современной вычислительной техники и программного обеспечения (ПО).

Характерные примеры можно найти в сфере использования информационных технологий в экологии и науках о Земле.

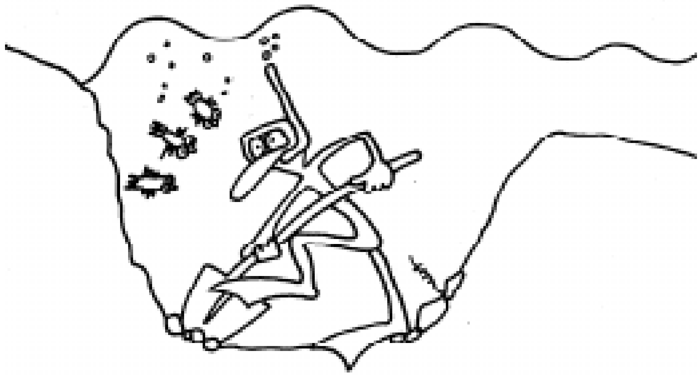
Осознание недостаточности знаний об окружающей среде в последней четверти XX столетия совпало с бурным развитием информатики и вычислительной техники. В результате возникла новая сфера деятельности – экоинформатика. Однако специалисты, работающие в данной области, часто не имеют серьезной математической подготовки. Вследствие этого, большое количество современного ПО остается невостребованным. С другой стороны, огромное количество этого ПО ставит специалиста в тупик – непонятно, что надо применять в каждом конкретном случае. Напрашивается вывод, что изучать конкретные моделирующие программы бессмысленно – гораздо лучше научиться понимать, как работает тот или иной вычислительный метод. Тогда, при необходимости, можно будет либо самому подобрать нужное ПО, либо обратиться к специалисту, разговаривая с ним на одном языке.

...специалисты, работающие в данной области, часто не имеют серьезной математической подготовки...

Небольшой авторский опыт преподавания в сфере среднего образования и более долгий в сфере высшего образования подталкивает к мысли, что уже в школе надо пытаться объяснять принцип работы сложных вычислительных алгоритмов, используемых для моделирования. В этом вопросе среднее образование должно давать достаточно широкие представления о предмете, безусловно, рассматривая простые задачи. Компьютерная поддержка таких объяснений в настоящий момент вполне реальна, причем с помощью самых обычных пакетов программ.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ

Рассмотрим одну из таких возможностей на примере метода простых итераций. Первая задача – подобрать понятное уравнение, в то же время достаточно сложное для решения привычными методами, например, алгебраическими преобразованиями. Рассмотрим решение урав-



Рассмотрим решение уравнения, описывающего зависимость длины волны от глубины воды на мелководье...

нения, описывающего зависимость длины волны от глубины воды на мелководье. Оно имеет следующий вид:

$$l = L\ \mathrm{th}(2ph/l)$$

где l – длина волны на мелководье, L – длина волны на большой глубине, th – гиперболический тангенс[1], h – глубина воды. Несмотря на внешнюю простоту, аналитическое решение этого уравнения невозможно. При объяснении можно отметить, что такие уравнения называются трансцендентными. Однако оно легко решается одним из численных методов – методом итераций.

ОСНОВЫ МЕТОДА

Предположим, что нам известна длина волны на большой глубине L, и мы хотим рассчитать, какой она будет на мелководье с глубиной h (здесь можно отметить, что нас больше интересует высота гребня волны, но это является более сложной задачей). Возьмем произвольное начальное значение l, которое обозначим l_0, подставим его в правую часть уравнения и вычислим значение длины волны l_1, то есть

$$l_1 = L\ \mathrm{th}(2ph/l_0)$$

После этого вычислим следующее значение l_2 по формуле

$$l_2 = L\ \mathrm{th}(2ph/l_1)$$

и так далее. Теоретически, путем повторения этого процесса можно достигнуть любой точности, проведя достаточное количество итераций. Практически, она ограничивается погрешностями округления.

Пусть, например, $L = 10$ м, $h = 0.5$ м. Примем $l_0 = L$ в качестве начального приближения. Результаты вычислений l_i приведены в таблице 1.

После 30-й итерации результаты вычислений отличаются менее чем на 1 см, то есть достигнута точность, вполне достаточная для практических целей.

ДВА СЛОВА О ТЕРМИНАХ

Разность значений, полученных на двух последующих итерациях, называется относительной погрешностью. Когда она уменьшается, как в нашем примере, говорят о сходимости расчетного метода. Добиться этого удается не всегда – в этом случае говорят, что расчетная схема расходится. Тогда надо менять параметры математической модели или использовать другой численный метод. Чтобы и в этом случае компьютер также мог закончить вычисления, как правило, ограничивают число итераций. Отметим, что иногда, даже если возможно решить задачу аналитически, численные методы оказываются более эффективными.

В качестве инструмента компьютерной поддержки можно использовать всем известный пакет MS Excel. На рисунке 1

---

[1]Функция $\mathrm{th}\,x$ определяется как $\frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x}$, где $\mathrm{sh}\,x$ и $\mathrm{ch}\,x$ – гиперболические синус и косинус, которые в свою очередь определяются так: $\mathrm{sh}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\mathrm{ch}\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $e = 2{,}71828...$

Любопытно, что свойства этих функций напоминают свойства соответствующих тригонометрических функций (что отражается в их названиях). Например, проверьте правильность равенства $1 - \mathrm{th}^2 x = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$ и сравните с равенством $1 + \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Итерация №	l_i	Итерация №	l_i	Итерация №	l_i
1	3.0421619	11	5.0494950	28	5.3163677
2	7.7498265	12	5.5262999	29	5.3056299
3	3.8453934	20	5.3460951	30	5.3142174
4	6.7342040	21	5.2819794	31	5.3073477
5	4.3537745	22	5.3332159	32	5.3128420
10	5.6510840	27	5.3029458	33	5.3084469

Таблица 1.

демонстрируется возможный вариант решения задачи о длине волны при известной глубине. Верхние поля – это параметры задачи, которые можно изменять (h, L и начальное приближение в ячейке А7). В строке 5 вычисляется номер текущей итерации по простому правилу:

№ *текущей итерации* = № *предыдущей итерации* + 1

В строке 7 осуществляется последовательный расчет длины волны l_i. В столбце А строки записано начальное приближение. Вопрос о том, как его определить, является предметом отдельного исследования, и часто от этого серьезно зависит скорость решения задачи. В нашем случае наиболее просто и естественно использовать в качестве начального приближения L. Подставляя различные начальные приближения, можно убедиться в том, что результат решения при 25 итерациях изменяется мало. При необходимости число итераций можно увеличить простым ко-

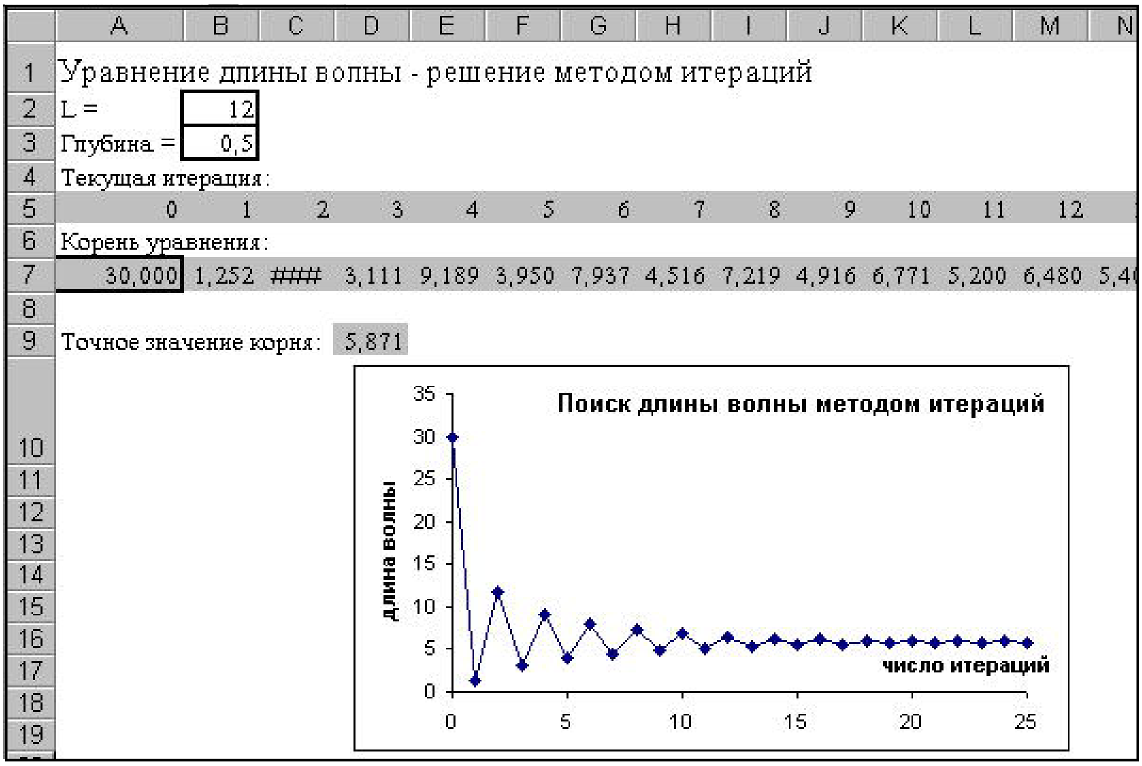


Рисунок 1.

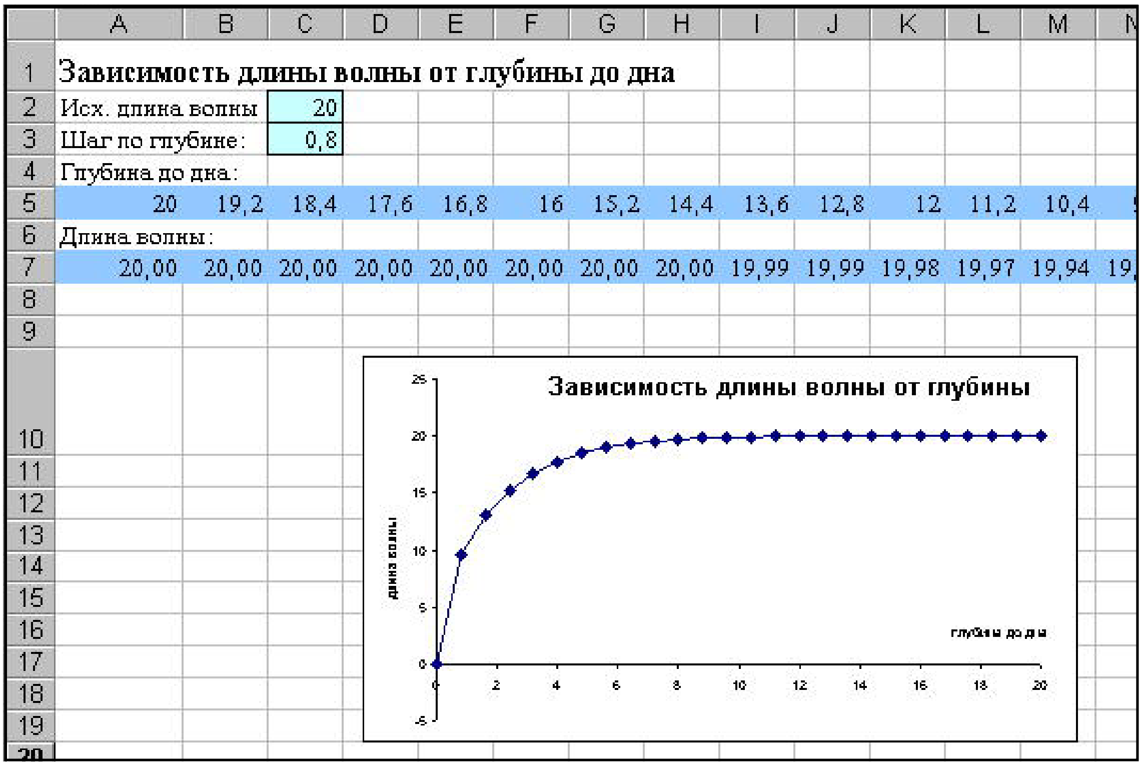


Рисунок 2.

пированием формулы в строке 7. Учащимся, например, можно предложить построить график зависимости количества итераций, которые потребовались для достижения точности в 1 см, от относительной ошибки начального приближения и сделать вывод о том, что оно не сильно влияет на результат.

Приведенный пример иллюстрирует технику вычислений методом итераций. Реально интересно было бы получить результат сразу. Такое вычисление выполнено в ячейке D9 (рисунок 1). Формула имеет вид:
=$B$2*TANH(2*ПИ()*$B$3/(D9+0,00001))

Очевидно, что в знаменателе дроби присутствует ссылка на текущую ячейку, что в терминологии электронных таблиц называется циклической ссылкой. Для того чтобы вычисление по формуле стало возможным, следует разрешить итерации (**Сервис – Параметры – Вычисления**). Здесь же можно установить параметры алгоритма – максимальное число итераций и относительную погрешность. Можно отдельно обсудить с учениками тот факт, что ограничение числа итераций может не позволить программе выполнить вычисления с заданной погрешностью, то есть правильный алгоритм может привести к неверным результатам.

Так как изначально в ячейку D9 ничего не вводилось, со стороны компьютера возможна также реплика «дел/0» (деление на ноль), которое происходит в результате первой же итерации. Избежать этого легко. В знаменатель дроби вместо A3 следует вписать (D9+0.00001), то есть малую величину. На точности наших расчетов это практически не отразится, а для компьютера знаменатель перестанет быть равным нулю. Здесь можно обсудить известное многим обстоятельство – вычислительный алгоритм часто использует неожиданные мелочи, и от этого зависит его эффективность.

Реальная задача состоит в том, чтобы исследовать зависимость длины волны от глубины воды на мелководье, и теперь мы полностью готовы к ее решению. Вариант такого решения приведен на рисунке 2. В верхние поля для параметров вводим исходную длину волны на большой глубине и шаг по оси X – глубина до дна. На диаграмме хорошо видно, что при уменьшении глубины (справа налево) длина волны сначала остается постоянной, а потом резко уменьшается, то есть высота гребня стремительно увеличивается. Таким образом, зная исходную длину волны и глубину мелководья можно предсказывать, например, последствия от цунами. Естественно, значения, вычисленные при отрицательной глубине, физического смысла не имеют.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенный пример является только одним из возможных для иллюстрации понятия математического моделирования, в том числе и с использованием пакета MS Excel. Некоторые примеры можно найти на нашем сайте www.ecosafe.nw.ru. Может быть, имеет смысл обсуждать и вопросы использования различных методов моделирования для разных областей знания. Например, в вычислительной физике часто используют дифференциальные уравнения, а при моделировании в области экологии и наук о Земле чаще применяют вероятностные методы. Сознавая необъятность темы, авторы попытались сделать первый шаг в этом направлении.

***Кудрявцева Марина Валерьевна,
старший преподаватель Центра переподготовки и повышения квалификации научно-педагогических кадров по естественно-научным направлениям СПбГУ.***

***Сеннов Андрей Светозарович,
доцент Центра переподготовки и повышения квалификации научно-педагогических кадров по естественно-научным направлениям СПбГУ.***

НАШИ АВТОРЫ