

## КОМПЬЮТЕРНАЯ ПОДДЕРЖКА КУРСА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ В СРЕДЕ «VERIFIER»

Электронный сборник задач «Производная и дифференциал» составлен в среде «Verifier» в расчете на студентов первого курса технического вуза и может быть использован абитуриентами и старшеклассниками при проработке соответствующих разделов математики. Сборник ориентирован, в первую очередь, на самостоятельную работу учащегося, в нем представлены 17 различных типов задач по всей теме. При желании можно использовать сборник для контроля знаний, в том числе поэтапно, так как стандартные задачи представлены в нескольких (обычно в пяти) вариантах. Задачи сгруппированы по темам:

1. Определение производной и техника дифференцирования.
2. Физический и геометрический смысл производной.
3. Дифференциал.
4. Исследование функции с помощью производной.
5. Экстремальные задачи.

Темы разбиты на подтемы. Например, первый раздел содержит задачи на табличное дифференцирование, на нахождение значения первой и второй производной в точке, на определение значения производной по графику, на дифференцирование функций, заданных неявно или параметрически, на логарифмическую производную и другие. Задачи имеют тройную нумерацию: первый номер указывает

на одну из пяти перечисленных тем, второй соответствует типу задачи, третий является собственным номером задачи.

С методической точки зрения следует обратить внимание на следующие моменты:

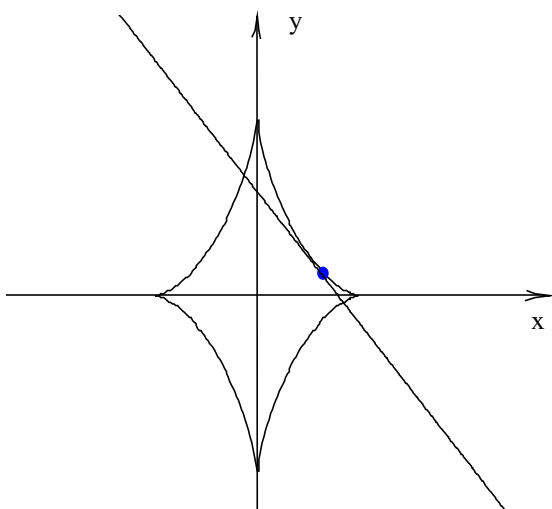
- Сборник не включает сложных задач, требующих громоздкого решения, но, тем не менее, не всегда можно обойтись без карандаша и бумаги. По-видимому, это характерно для всех электронных задачников.
- В сборнике присутствуют задачи разного уровня. Наиболее способные и подготовленные студенты могут пропустить слишком простые задачи.
- Многие задачи содержат иллюстрации, как сопровождающие формулировку, так и появляющиеся в виде реакции на ошибочный ответ. Наглядность, достигаемая благодаря возможностям среды «Verifier», заметно облегчает студенту понимание задачи и осознание своей ошибки.

*Пример 1.*

Имеется задача:

Найдите коэффициенты  $k$  и  $b$  уравнения касательной  $y=kx+b$  к графику функции, заданной параметрическими уравнениями  $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = 2 \sin^3 t \end{cases}$  в точке, соответствующей значению параметра  $t = \frac{\pi}{6}$

Эта задача сопровождается иллюстрацией:



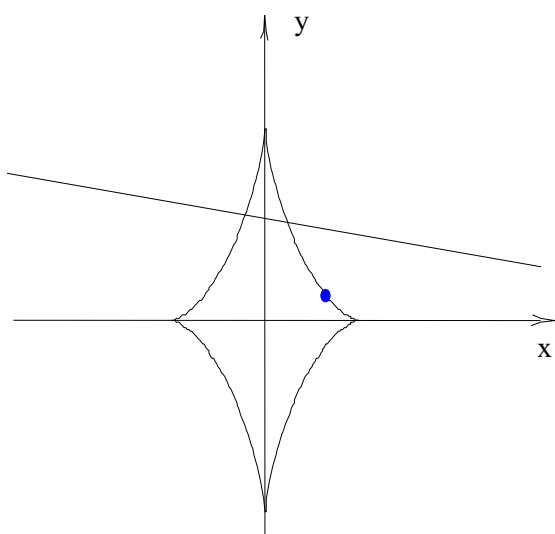
В случае неверного ответа появляется одно из двух сообщений:

Прямая  $y = kx + b$  не проходит через заданную точку

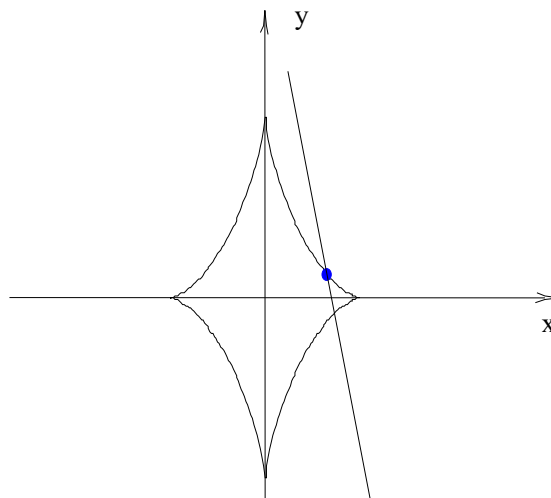
или

Прямая  $y = kx + b$  не является касательной

Первое сообщение дополняется иллюстрацией типа:



Второе сообщение дополняется иллюстрацией типа:



- Большая часть (трудно ручаться за все) ответов к задачам не может быть просто угадана. Например, составители старались, чтобы точка максимума или перегиба не имела абсциссу  $x = 0$  (хитрый студент скорее всего попытается предложить компьютеру это решение).

*Пример 2.*

Имеется задача:

Найдите  $y''_{xx}$  в точке (1,1) для неявно заданной функции  $x^2 + 5xy + y^2 - 2x + y - 6 = 0$

Едва ли подбором удастся найти решение, равное  $\frac{111}{256}$ .

- Ответы к задачам в соответствии с возможностями среды «Verifier» принадлежат к одному из следующих типов:

**1.** Выбор одного правильного ответа из нескольких альтернатив. Это традиционные тестовые задачи, их немного.

**2.** Выбор всех правильных ответов из предложенного набора. В отличие от задач предыдущего типа здесь найти решение перебором не так-то просто, особенно если ответы требуется перечислить в определенном порядке.

Пример 3.

Имеется задача:

Укажите все номера примеров, в которых допущены ошибки:

1)  $(x^n)' = nx^{n-1}$

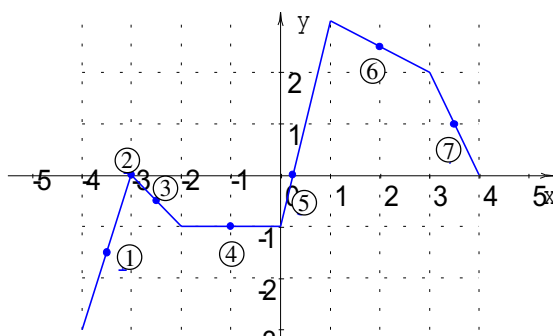
2)  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

3)  $(\arctg 2x)' = \frac{2}{1+x^2}$

Здесь необходимо назвать номера 2 и 3 в любом порядке.

Пример 4.

Приведена иллюстрация:



Задание:

Перечислите в указанном порядке номера точек, в которых производная:

1. Равна 0
2. Равна -0.5
3. Равна -2
4. Равна 3
5. Не существует
6. Равна -1
7. Равна 4

Здесь ответ содержит 7 чисел, причем, если учащийся неверно указал первую точку, ему на это будет особо указано. Имеется специальная подсказка и на случай, когда неверно определена точка, где производной не существует. Еще одна подсказка напоминает, как определить значение производной линейной функции по наклону прямой.

Не стоит опасаться слишком подробных разъяснений. Так как ход действий учащегося протоколируется, преподаватель может проанализировать все его метания и сомнения, а правильное решение все-таки будет получено в ходе диалога.

3. Число или числовое выражение, содержащее знаки операций, скобки, радикалы, константы  $\pi$  и  $\varepsilon$ . Это позволило привлечь в сборник «нетестовые» задачи с такими, например, ответами, как  $\sqrt{2}$  или  $\frac{\pi}{3}$ .

Пример 5.

Имеется задача:

Найдите значение производной функции

$x^3 \arcsin \frac{1}{x}$  в точке  $x = \sqrt{2}$

В качестве ответа следует ввести выражение  $\frac{3\pi - 4}{2}$ .

4. Упорядоченный или неупорядоченный набор чисел. Этот тип ответа в сборнике используется чаще всего (найти экстремумы функции, вычислить производную, дифференциал и приращение функции в данной точке и т.д.). В частности, к этому типу относятся рассмотренные выше примеры 3 и 4.

5. Любое подмножество числовой оси. Этот тип ответа очень удобен для многочисленных задач на исследование функций. В случае неверного, неполного или избыточного ответа среда «Verifier» генерирует контрпримеры. Сопровождаемые подробными комментариями и нередко иллюстрациями, эти примеры подводят ученика к искомому решению.

Пример 6.

Имеется задача:

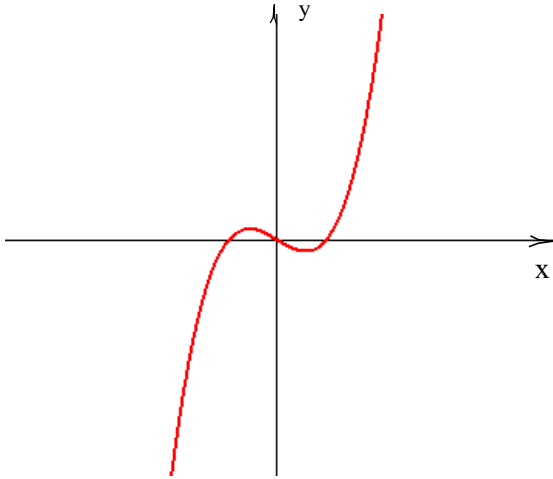
При каких значениях коэффициента  $a$  функция  $f(x) = x^3 - ax$  возрастает на всей числовой оси? (Ответ дайте в виде интервала)

Ответом является интервал  $(-\infty, 0]$ .

Реакция на ошибку здесь двойкая. При введении интервала для  $a$ , который содержит неподходящие значения, например,  $(-4,4)$ , генерируется сообщение типа:

При  $a = 1$  найдутся значения  $x$ , для которых функция  $f(x)$  убывает

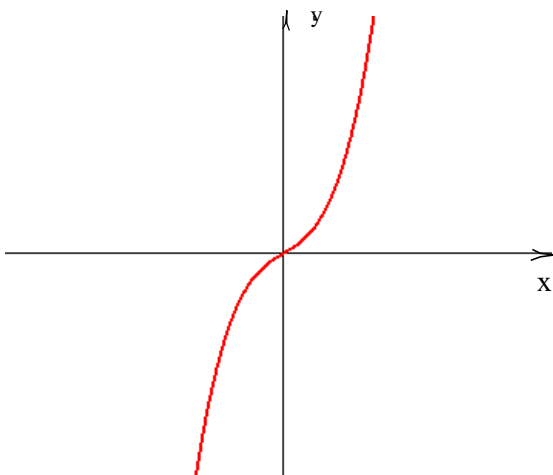
Сообщение сопровождается иллюстрацией:



А при неполном ответе, например,  $(-\infty, -2)$ , генерируется сообщение типа:

Вы указали не все значения  $a$  (например, нет  $a = -1$ ), для которых функция  $f(x)$  возрастает при любом значении аргумента  $x$

Сообщение сопровождается иллюстрацией:



**6. Функция одной переменной.** Этот тип ответа незаменим, в частности, при проверке знания таблицы производных и простейших приемов дифференцирования.

*Пример 7.*

Найдите вторую производную функции  $f(x) = \arctg x + \operatorname{arcsctg} x + 2\sqrt{x^3}$

Ответ этой задачи вводится в виде выражения  $\frac{3}{2\sqrt{x}}$ , содержащего переменную  $x$ . При двух ошибочных ответах на экране появляется подсказка:

Функцию можно упростить перед дифференцированием

К сожалению, задачи, имеющие ответ в виде функции нескольких переменных или функции, содержащей параметра, пока не могли быть представлены в сборнике по техническим причинам.

- Разнообразие типов ответов, возможность заложить в сборник подсказки, гибко реагировать на ошибки позволило отбирать задачи, ориентируясь в первую очередь на их содержание, почти не задумываясь о возможности или невозможности «ввести задачи в компьютер».
- Наглядность формулировки задачи, наличие хорошей иллюстрации или возможность добавить такую иллюстрацию являлись дополнительными аргументами в пользу включения задачи в сборник.

Приблизительно пятая часть задач сборника оригинальна.

При составлении использована литература:

1. И.П.Натансон. Краткий курс высшей математики. СПб, «Санкт-Петербург», 1997г.
2. Математический анализ в примерах и задачах. Т.1. Киев, «Вища школа», 1974 г.
3. И.Ф Шарыгин, В.И.Голубев. Факульт-

тативный курс по математике. Решение задач. Учебное пособие для 11 класса средней школы. М., «Просвещение», 1991 г.

4. М.И.Башмаков, Б.М.Беккер, В.М.Гольховой. Задачи по математике. Алгебра и анализ. Библиотека «Квант», выпуск 22, М., «Наука», 1982.

5. Задачи по математике. Начала анализа. Справочное пособие. М., «Наука», 1990г.

6. П.Е.Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожевникова. Высшая математика в примерах и задачах. Ч.1, М., «Высшая школа», 1996 г.

7. И.А.Марон. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах.

8. Производная и ее применение. Дидактические материалы по курсу алгебры и начал анализа. СПб, «Свет», 1995 г.

9. В.И.Рыжик. Дидактические материалы по алгебре и математическому анализу. М., «Просвещение», 1997 г.

10. Б.М.Ивлев, С.М.Саакян, С.И.Шварцбурд. Дидактические материалы по алгебре и началам анализа. М., «Просвещение», 1995 г.

*Описание системы «Verifier» содержится журнале «Компьютерные инструменты в образовании», СПб, №1, 1997, с.58–66.*

*Составители сборника благодарят за постоянные консультации методиста ЦПО «Информатизация образования» С. Г. Иванова.*

## НАШИ АВТОРЫ

*Агафонова Ирина Витальевна,  
старший преподаватель СПб  
Института машиностроения.*

*Дмитриева Оксана Михайловна,  
старший преподаватель СПб  
Института машиностроения.*