Федотов Валерий Павлович

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК В СЕТИ ИНТЕРНЕТ

Настоящий проект является составной частью программы «Международный заочный математический кружок», реализуемой автором с 1995 года и поддержанной грантом фонда Дж. Сороса на 1998-99 учебный год.

Слово «математический» в названии кружка отнюдь не сужает его направленности до одной лишь математики. Представленные ниже материалы кружка наглядно демонстрируют, что тематика кружка ничуть не в меньшей степени посвящена также информатике, искусственным и естественным языкам. Однако отказаться от слова «информатика» в названии кружка автора заставила нынешняя практика употребления этого слова, ассоциирующая его в лучшем случае с офисными программами типа «Лексикон», а в худшем – с клубами компьютерных игр, появившимися в самое последнее время в огромном числе.

Организационная структура кружка – сетевая. В частности, это означает, что кружок не имеет статуса юридического лица, жесткой структуры управления и единого бюджета. В тех школах, городах, регионах и государствах, где участники кружка более, чем единичны, работу кружка координируют и организуют кураторы по соответствующим территориям (как правило, учителя математики или преподаватели вузов).

Кураторы ведут учет участников кружка в своих школах и территориях, фиксируя их имена, место учебы, адреса для связи, итоги выполнения заданий кружка, участия в других математических соревнованиях, регулярно передают эту информацию куратору по стране. Там, где участников много, кураторы организуют тиражирование заданий, а также могут самостоятельно проверять работы, обязательно придерживаясь единой для кружка системы оценок в процентах (как за решение отдельной задачи, так и за каждое задание).

Если того требует объем организационных расходов, то поиск необходимых источников финансирования также является заботой куратора. В частности, учителя, как правило, используют возможность получения оплаты за ведение кружка или факультатива в своей школе. Для школьников же участие в кружке бесплатное.

Организация кружка преследовала несколько целей. В их числе :

а) разработка и апробация новых математических и междисциплинарных курсов и/или циклов уроков для последующего внедрения в общее образование;

б) координация совместных усилий руководителей школьных математических кружков в пределах региона (Санкт-Петербург и Ленинградская область), сопредельных территорий, всей России, на международном уровне;

в) выработка международных стандартов дополнительного математического образования, не привязанных к школьным программам отдельных стран;

г) предоставление возможности для школьников любого возраста из разных стран участвовать в единых общедоступных математических соревнованиях.

Среди заданий кружка можно выделить разнообразные конкурсы, а также не носящие соревновательного характера учебные этюды для любителей самостоятельных исследований. Как те, так и другие задания сформулированы таким образом, чтобы посильную проблему в них смогли увидеть участники разного возраста и с разным уровнем подготовки. При этом в конкурсах можно соревноваться не только друг с другом, но и каждому с самим собой, фиксируя личные рекорды. А в популярной серии конкурсов «Язык и математика» можно учитывать и рекорды, относящиеся не к участникам, а к языкам (каждый школьник может представить работу на одном языке или на нескольких, тогда при подведении итогов он попадет в протоколы как по каждому выбранному языку, так и в конкурс полиглотов).

Кроме того, членам кружка предлагается участвовать и в следующих соревнованиях, имеющих собственные оргкомитеты и условия проведения:
1) официальные олимпиады (школьные, районные, городские и т.п.);
2) Соросовские олимпиады (для 7-11 кл.; в России, как и национальные олимпиады, они проводятся в 4 тура, причем первый – заочный; адрес оргкомитета: 117234, Москва, В-234, а/я 590, «Олимпиада», директор программы – Б.И. Миропольский; E-mail : olymp@issep.rssi.ru),
3) конкурс «Кенгуру» (для 3-10 кл.; его российский оргкомитет размещается в Институте продуктивного обучения: 191025, Санкт-Петербург, ул. Марата, 25; председатель оргкомитета – директор Института академик М.И. Башмаков); адрес в Интернет: i.am/kenguru.
4) олимпиада «Телетестинг» (только для 9 и 11 кл.; информация на Web-сервере МГУ по адресу: http://www.ht.ru ссылка «Олимпиада Телетестинг»).

Ниже приводятся образцы заданий, подготовленных автором специально для занятий и конкурсов кружка. Тексты даны в той же самой редакции, как они и были предложены школьникам.

БЛИЦ-КОНКУРС

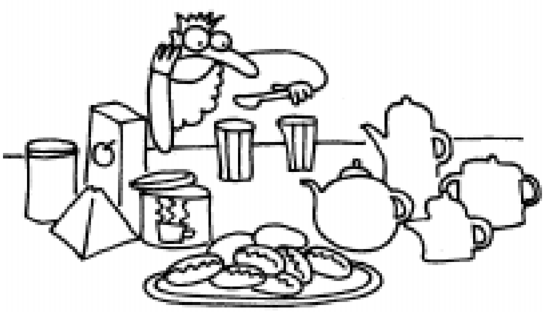
В записанных ниже предложениях заполните пробелы натуральными числами так, чтобы получились верные утверждения. Если кому-то из старшеклассников задание покажется легким и Вы найдете несколько вариантов ответа, то постарайтесь выбрать тот из них, в котором наибольший общий делитель чисел будет как можно меньше, а наименьшее общее кратное – как можно больше.

1. Сумма чисел ____ , ____ и ____ равна 24 .
2. Произведение чисел ____ , ____ и ____ равно 216 .
3. Сумма квадратов чисел ____ , ____ и ____ равна 2500 .
4. Квадраты чисел ____ и ____ делятся на их сумму.
5. Квадраты чисел ____ и ____ делятся на их произведение.
6. Сумма любых двух из чисел ____ , ____ и ____ делится на третье.
7. На плоскости можно построить треугольник, углы которого равны ____°, ____° и ____°.
8. На плоскости можно построить треугольник, каждый угол которого равен ____°.
9. На плоскости можно построить треугольник, каждый угол которого равен ____° или ____°.
10. На плоскости можно построить остроугольный треугольник, каждый угол которого равен ____° или ____°.
11. На плоскости можно построить тупоугольный треугольник, каждый угол которого равен ____° или ____°.
12. На плоскости можно построить прямоугольный треугольник, каждый угол которого равен ____° или ____°.

13. На плоскости можно построить четырехугольник, каждый угол которого равен ____°.
14. На плоскости можно построить четырехугольник, каждый угол которого равен ____° или ____°.
15. На плоскости можно построить выпуклый четырехугольник, каждый угол которого равен ____° или ____°.
16. На плоскости можно построить невыпуклый четырехугольник, каждый угол которого равен ____° или ____°.
17. На плоскости можно построить пятиугольник, каждый угол которого равен ____°.
18. На плоскости можно построить пятиугольник, каждый угол которого равен ____° или ____°.
19. На плоскости можно построить выпуклый пятиугольник, каждый угол которого равен ____° или ____°.
20. На плоскости можно построить невыпуклый пятиугольник, каждый угол которого равен ____° или ____°.
21. На плоскости можно построить многоугольник, каждый угол которого равен ____°.
22. На плоскости можно построить многоугольник, каждый угол которого равен ____° или ____°.

ОЛИМПИАДА КРУЖКА 1996 ГОДА

1. Первоначально в один стакан налили 10 чайных ложек кофе, а в другой - столько же молока. Затем Ефим перелил одну ложку из первого стакана во второй и тщательно перемешал второй стакан, после чего перелил одну ложку из второго стакана обратно в первый и тщательно перемешал первый стакан. Эту процедуру он повторил еще 9 раз. Ответьте, чего в итоге будет больше:



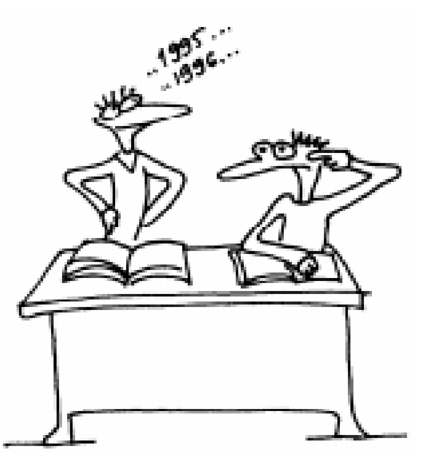
а) Кофе в первом стакане или молока в первом стакане?
б) Кофе в первом стакане или молока во втором стакане?
в) Молока в первом стакане или молока во втором стакане?
г) Молока в первом стакане или кофе во втором стакане?

2. Ожидая скорого прихода гостей, хозяйка должна сварить и почистить 12 картошин. Чистка одной картошины (безразлично сырой или вареной) занимает 1 минуту. Чтобы свариться, картошина должна находиться в кипятке не менее 6 минут, но перед этим еще 4 минуты нужно потратить на нагревание воды. Договоримся, что все остальные операции, связанные с готовкой, практически не отнимают времени. Также будем считать, что хозяйка не испытывает недостатка в кастрюлях, плитах, воде и т. п. (например, при желании, может варить каждую картошину в отдельной кастрюле). Помогите ей выполнить эту работу как можно быстрее.

Сумеет ли она при этом управиться за 7 минут? за 9 минут? за 10 минут? за 11 минут? за 12 минут? за 13 минут? за 14 минут? за 15 минут? за 16 минут? за 17 минут? за 18 минут? за 20 минут? за 22 минуты? за 72 минуты? за 76 минут? за 2 часа?

3. Фирма «Рога и Копыта» приобрела микрокалькулятор, выполняющий только одну операцию A#B=1-(A/B). Однако программист Остап Бендер сумел с его помощью проводить вычисления по формулам, включающим все 4 арифметических действия. Как ему это удалось?

4. Однажды на уроке дети заспорили. Михаил сказал, что любое натуральное число можно представить в виде разности двух чисел, одно из которых делится на 1995, а другое на 1996. Борис заметил, что это можно сделать очень просто, взяв разность самого этого числа, умноженного соответственно на 1996 и 1995. Например, 7 = (1996x7) – (1995x7). Однако Михаил возразил, что он имел в виду разность в обратном порядке: первое число должно делиться именно на 1995 (а не на 1996, как в примере Бориса). Тогда Борис засомневался в том, что это вообще получится.



Прав ли Михаил? Составьте нужную разность для чисел от 1 до 10.

5. В продолжение того же спора Антон заявил, что любое восьмизначное число можно представить в виде суммы двух натуральных чисел, одно из которых делится на 1995, а другое – на 1996. Семен добавил, что этим же свойством обладают и все семизначные числа. Фома же усомнился в правоте их обоих.

Кто же из троих все-таки прав?

ЭТЮД «СТЕПЕНИ И ЦИФРЫ»

Для начала уточним термины, что легче всего сделать на следующем примере. В десятичной записи 4-ой степени числа 11 (то есть $11^4=11\cdot11\cdot11\cdot11=14641$) участвуют 3 цифры – 1, 4 и 6, причем две из них – 1 и 4 – повторяются (каждая по два раза), а цифра 6 не повторяется. Остальные цифры (0, 2, 3, 5, 7, 8 и 9) также не повторяются в записи числа 14641, но они в ней и не участвуют.

Задание A. Начнем с квадратов (вторых степеней) натуральных чисел. Первые примеры ($1^2=1$, $2^2=4$, $3^2=9$), а также квадраты чисел, оканчивающихся нулем, не слишком интересны. За этими исключениями, постарайтесь найти как можно большее число, в десятичной записи квадрата которого участвуют не более двух различных цифр.

Задание B. Постарайтесь найти как можно большее число, в десятичной записи квадрата которого нет повторяющихся цифр.

Задание C. Постарайтесь найти как можно меньшее число, в десятичной записи квадрата которого участвуют все 10 цифр.

Задание D. Постарайтесь найти как можно меньшее число, в десятичной записи квадрата которого участвуют только повторяющиеся цифры.

Задание E. Постарайтесь найти как можно меньшее число, в десятичной записи квадрата которого повторяются все 10 цифр.

Задание F. Постарайтесь найти как можно большее число, в десятичной записи квадрата которого участвуют только пары одинаковых цифр, записанных непосредственно друг за другом.

Наконец, трудный вопрос G: а может ли квадрат натурального числа, большего трех, записываться всего лишь одной (повторяющейся) цифрой?

В заданиях A-F не требуется делать больше, чем спрашивается: ни перечислять все числа с указанным свойством, ни искать крайнее, ни доказывать его экстремальность. Достаточно лишь указать то число с нужным свойством, которое удастся найти. Однако более содержательные и обоснованные ответы получат и более высокую оценку в конкурсе. Если же даже упомянутые в начале абзаца проблемы не покажутся слишком сложными, то выполните задания A-F:

(*) для кубов, четвертых, пятых, ..., произвольных степеней.

(**) в иных системах счисления (соответственно изменив вопросы, если это нужно).

ЭТЮД «ДВА КВАДРАТА»

Нарисуйте на плоском листе бумаги два квадрата и соедините каждую вершину одного из них с ОДНОЙ вершиной другого так, чтобы соединительные линии не пересекались друг с другом.

Можно ли выполнить это задание, заменив выделенное в его формулировке слово «одной» на: «двумя»? «тремя»? «четырьмя»?

Можно ли выполнить задания, дополнительно потребовав, чтобы

a) соседние вершины одного квадрата соединялись с разными вершинами другого?

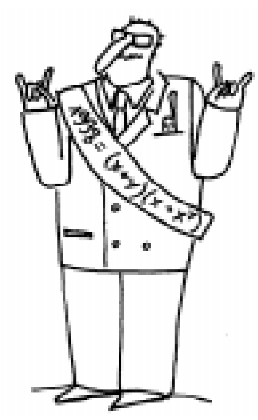
b) квадраты были равными (по величине)?

c) квадраты не имели общих точек?

d) соединительные линии не пересекались еще и со сторонами квадратов?

*) выполнялась какая-либо комбинация из условий a-d)?

ЭТЮД «КРУТЫЕ УРАВНЕНИЯ»



Подобных уравнений Вам не приходилось встречать не только на уроках в школе, но даже на математических олимпиадах. Дело не только в том, что в одном уравнении сразу два неизвестных, которые встречаются и в основании и в показателе степени, но и в ограничении : нужно искать только целочисленные решения. Однако не опускайте руки, а попытайтесь найти хотя бы одно решение, пусть даже и подбором:

a) $1998=(x+y)(x+x^y)$

b) $1998+x^x=x^7-x^5+x^4$

c) $1998=(x^{x-y}-x-y)(x^{x-y}+y)$

d) $1998+x^x=x^y(y+1)^{x-1}$

e) $1998=(x^y+y)(x^{y+1}-yx^y-1)$

f) $1998+x^x=xy(x+y)(y-x^x)$

g) $1998=x(x^{xy}-y^x)$

h) $1998+x^x=x^{xy+1}-x^{x+y}+x^{x+1}$

i) $1998=(y^x-x^x)-x-(y-x)^x$

j) $1998+x^x=xy(y(y+1)^2+1)$

k) $1998=x^x((x^y+1)^y+1)-x^{xy}$

l) $1998+x^x=x^y(yx^y-x)^y$

А, возможно, Вы сумеете и придумать какое-либо аналогичное уравнение.

ЭТЮД «ОЧЕРЕДИ»

Жителям России или других республик бывшего СССР не нужно долго объяснять, что такое очередь. Мы будем пользоваться этим коротким русским словом в точном соответствии с его смыслом, который профессиональные математики обозначают термином «линейно упорядоченное конечное множество». Уточним, что мы не рассматриваем здесь процесс продвижения очереди, а лишь фиксируем некоторое ее положение.

Основа этого понятия – отношение непосредственного предшествования/следо-

вания, которое мы будем записывать А→Б и читать как «А предшествует Б» или «Б следует за А». В любой (непустой!) очереди обязательно присутствует НАЧАЛЬНЫЙ элемент (первый по очереди), которому никто не предшествует, и КОНЕЧНЫЙ элемент (последний по очереди), за которым никто не следует. Все остальные, стоящие внутри очереди, имеют ровно одного предшественника и одного последователя. Наконец, если переходить вдоль очереди от ее начала к каждому следующему, то мы не только рано или поздно достигнем ее конца, но по пути обязательно перечислим все элементы очереди.

Упражнение 1. А теперь попытайтесь перечислить сами очереди. Пусть в магазин зашли 4 покупателя: Андрей, Борис, Вадим и Григорий. Сколькими способами можно выстроить их в очередь к прилавку?

Упражнение 2. Усложним предыдущее задание, разрешив покупателям не вставать в очередь (каждый из четверых может принять такое решение вне зависимости от остальных). Сколько вариантов очереди Вы найдете теперь?

Упражнение 3. Еще одно усложнение: в магазине 2 прилавка. Каждый покупатель может встать в очередь к любому из них, либо ни к какому.

Упражнение 4. Следующее усложнение: покупатель может встать и в обе очереди сразу.

Старшеклассникам мы предлагаем заменить в этих упражнениях число покупателей произвольным N, а затем и число прилавков произвольным K.

СЕРИЯ КОНКУРСОВ «ЯЗЫК И МАТЕМАТИКА»

Хотя примеры и комментарии в приводимых ниже заданиях даны по-русски, выполнять эти упражнения можно на любом языке: русском, английском и др. Жюри конкурса будет оценивать Ваши работы и определять лучших в каждой возрастной категории как по каждому вопросу для каждого из названных языков (и тех неназванных, по которым поступит не менее трех работ), так и среди полиглотов – суммарно по всем языкам. Разрешается использовать только слова, встречающиеся в словарях. Задание конкурсов 1–6: придумайте свои аналогичные примеры (не более 50 букв).

1. Конкурс «Путаница–1. Члены предложения.»

Фраза «*Мать любит дочь*» является классическим примером двусмысленности, в основе которой – неоднозначность грамматической структуры предложения (каждое из двух существительных может быть либо подлежащим, либо прямым дополнением).

2. Конкурс «Путаница–2. Знаки препинания.»

Не менее знаменитая фраза «*Казнить нельзя помиловать*» – пример двусмысленности, возникающей от неоднозначности постановки обязательной здесь запятой.

3. Конкурс «Путаница–3. Омонимия.»

Русские слова «*дуло*», «*забрало*» и др. (продолжите список!) могут быть как глаголами, так и существительными. Постройте предложение с участием этих или других подобных слов так, чтобы названный эффект сочетался с неоднозначностью грамматической структуры предложения.

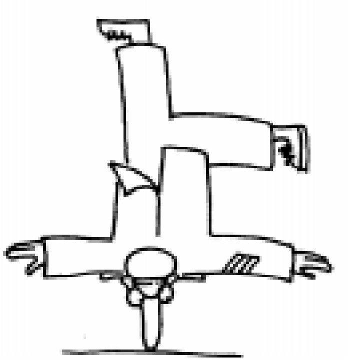
4. Конкурс «Путаница–4. Пробелы.»

Вопрос для разминки: В строке «*Теперьяподнимитетоже*» вставьте недостающие пробелы и (если это нужно) знаки препинания так, чтобы получилась осмысленная фраза. Постарайтесь сделать это как можно большим числом существенно различных способов.

Основной вопрос: Придумайте свой пример аналогичного свойства.

5. Конкурс «Путаница–5. Оттенки смысла.»

В предложении «*Капитан стоит на носу*» речь может идти как о капитане корабля, так и о капитане команды акробатов. В первом случае он стоит на носу корабля, тогда как во втором – на собственном. Особенность этого примера в том, что и его перевод на английский язык («*A captain stand on a head*») обладает таким же свойством.



6. Конкурс «Великая путаница.»

Постройте строку, сочетающую все 5 названных выше эффектов, и укажите варианты ее расшифровки. Здесь, как и в предшествующих пяти заданиях, оценка тем выше, чем больше указано вариантов, а при равенстве их числа – чем короче предложение.

Для выполнения заданий следующих двух конкурсов присвойте буквам алфавита произвольные номера (не обязательно по порядку!). Весом слова или предложения назовем сумму номеров всех входящих в него букв. Например, АБЗАЦ=1+2+9+1+24=37 – в случае нумерации русских букв по порядку (а – 1, б – 2, ... , я – 33).

7. Конкурс на самое весомое предложение.

Составьте осмысленное предложение длиной не более 50 букв, вес которого был бы как можно больше.

8. Конкурс на самую длинную цепочку слов.

Составьте как можно более длинную серию слов, веса которых являются последовательными натуральными числами. Например, БАЙ=2+1+11=14, БАК=2+1+12=15, БАЛ=2+1+13=16, ВАЛ=3+1+13=17, БАН=2+1+15=18 и т д. (в этом примере в каждом слове по три буквы, а буквы алфавита занумерованы по порядку, что совершенно не обязательно).

9. Конкурс «Рисунок слова».

Замените первую букву слова на цифру 1 во всех местах, где она входит в это слово, вторую из оставшихся – цифрой 2 и т. д., пока не будут заменены цифрами все буквы слова. Полученное число назовем рисунком слова. Например, рисунком для русского слова «МАТЕМАТИКА» будет 1234123562. Попытайтесь найти как можно больше слов (длиной не более 6 букв) с попарно различными рисунками.

10. Конкурс «Повторяющиеся буквы».

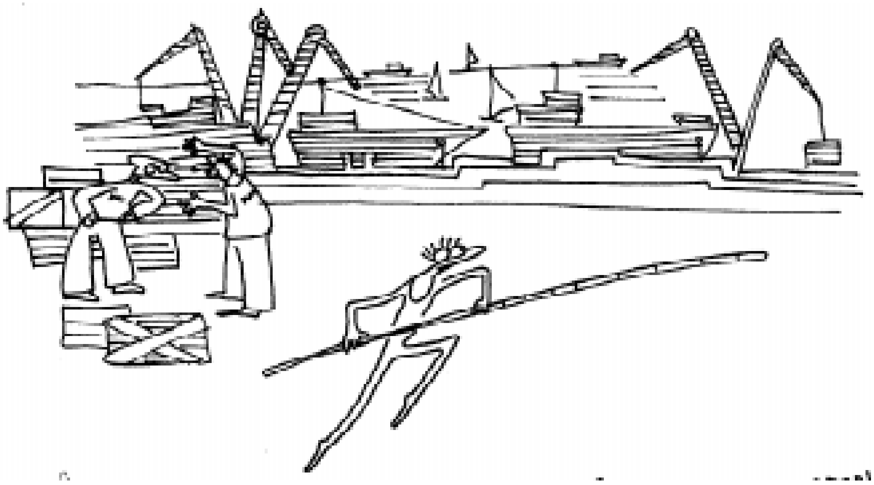
Вопрос для разминки: Для каждой буквы алфавита постарайтесь найти слово, в котором эта буква повторялась бы как можно большее число раз.

Основной вопрос: Если в слове несколько повторяющихся букв, то его ценность определяется как произведение чисел их повторений. Например, в русском слове «МАТЕМАТИКА» есть 3 буквы «А» и по 2 буквы «М» и «Т», поэтому его ценность равна 12 (=3·2·2). Попытайтесь найти самое ценное в этом смысле слово.

11. Конкурс «Пирамида слов».

Если в слове «*спорт*» вычеркнуть буквы *с*, *п* или *т*, то вновь получатся осмысленные слова.

Вопрос для разминки: Попытайтесь найти как можно более длинное слово, в котором это произойдет при вычеркивании любой буквы.



Если в слове «*спорт*» вычеркнуть сначала букву *т*, а затем и *п*, то оба раза получатся осмысленные слова.

Основной вопрос: Попытайтесь найти слово или предложение, в котором можно сделать как можно больше таких последовательных вычеркиваний.

12. Конкурс «Пирамида слогов».

Задание аналогично предыдущему, но вычеркиваются не буквы, а слоги.

13. Конкурс на самую длинную цепочку опечаток.

Опечатка может состоять во вставке, замене или пропуске какой-либо буквы. Составьте как можно более длинную серию слов, каждое из которых отличается от предыдущего только одной опечаткой.

14. Конкурс «Двумерный текст».

Акростих является известным примером текста, который можно читать как по горизонтали, так и по вертикали. Правда, последнее относится лишь к первому столбцу, образованному начальными буквами строк. Попытайтесь написать на клетчатой бумаге такой текст, который можно было бы прочесть от начала и до конца как по строкам, так и по всем столбцам.

У этого задания две версии: вертикальный и горизонтальный тексты могут либо совпадать, либо быть двумя существенно различными текстами.

А если получится, создайте и трехмерный (многомерный) текст.

Материалы кружка представлены на сервере Петербургской Интернет-школы по адресу: www.aec.neva.ru/internet-school.

По этому же адресу предлагается направлять свои работы тем, кто для связи с организаторами выбрал электронную почту. Кроме того, с автором этих строк можно связаться по телефону 597-82-38 в Санкт-Петербурге (код 812), либо обычной почтой по адресу: Россия, 194295, Санкт-Петербург, пр. Художников, д. 29, корп. 2, кв. 33, Федотову Валерию Павловичу.

НАШИ АВТОРЫ

Федотов Валерий Павлович,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент кафедры математики
Аграрного университета.