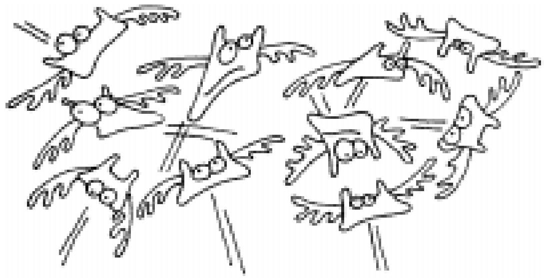
Ампилова Наталья Борисовна

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ХАОСА В СЛОЖНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Мы предполагаем опубликовать ряд статей, знакомящих читателя с понятиями о динамических системах и возникающих в них хаотических движениях.



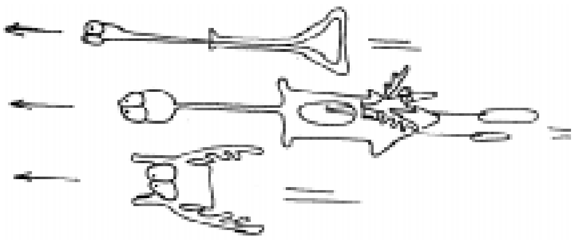
На примере изучения одномерных и двумерных систем с помощью компьютерного моделирования можно проследить за появлением таких движений, а также связанных с этим явлением самоподобных (фрактальных) структур.

ВВЕДЕНИЕ

Изучение физических процессов приводит нас к построению математических моделей, описывающих данный процесс. Разумеется, модели всегда рассматриваются при некоторых условиях, то есть разумных ограничениях на входящие в них величины и параметры.

Модель представляет собой систему уравнений, описывающих изучаемый процесс в терминах математических объектов. Уравнения, входящие в систему, могут иметь различную природу. Зависимость между величинами, входящими в уравнения, может быть линейной (то есть представлять собой линейную функцию) или нелинейной, уравнения могут содержать параметры (уравнения с параметрами) или функции, и их производные (дифференциальные уравнения).

Примеры таких моделей известны: например модели движения маятника, движения жидкости, движения тела с ускорением.



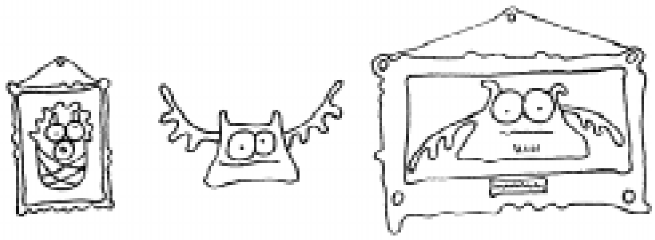
Система уравнений, описывающих данный процесс, определена на некотором множестве значений переменных. Это множество часто называют пространством состояний или фазовым пространством системы (от английского слова «phase» - состояние). Например, закон радиоактивного распада вещества можно сформулировать так: скорость распада радиоактивного вещества пропорциональна оставшемуся в данный момент количеству вещества. В этом случае состояние процесса определяется количеством вещества. Процесс размножения бактерий при достаточном количестве питательного вещества может быть описан следующим образом: скорость роста популяции пропорциональна ее объему. Здесь состояние процесса определяется количеством бактерий. В обоих случаях фазовое пространство одномерно и представляет собой множество положительных вещественных чисел. Можно, впрочем, считать фазовым пространством всю вещественную прямую (обозначаемую R).

Рассмотрим механическую систему, описывающую движение материальной точки.

Состояние рассматриваемой точки характеризуется двумя величинами: координатами и скоростью. В зависимости от того, где происходит движение, потребуется различное количество характеристик для однозначного определения состояния точки. Если точка движется по прямой, то потребуется две величины (координата на прямой и скорость), и фазовым пространством, таким образом, будет являться плоскость или ее часть. (Обычно плоскость обозначают R^2 - евклидово пространство размерности 2). При движении точки в плоскости координаты задаются двумя величинами, и вектор скорости также имеет две составляющих. Следовательно, фазовым пространством является пространство R^4 (четырехмерное евклидово пространство). Аналогично для описания движения точки в трехмерном пространстве потребуется 6 величин, характеризующих состояние данной точки в некоторый момент времени, и фазовым пространством такой системы будет пространство R^6.

Система описывает изменение с течением времени состояния объекта, происходящее по некоторому закону. Если этот закон выражается с помощью дифференциальных уравнений, то говорят, что задана система с непрерывным временем. Если же уравнения, определяющие систему, задают закон изменения состояния системы через определенный интервал времени, то система называется системой с дискретным временем. Величина этого временного интервала определяется условиями конкретной задачи. Таким образом, мы можем представлять себе поведение интересующего нас объекта, рассматривая движение точек в фазовом пространстве в определенные моменты времени, а закон этого движения задается нашей системой уравнений.

Одним из наиболее известных является класс систем, описывающих так называемые детерминированные процессы. Это означает, что существует правило в виде системы уравнений, которое однозначно определяет весь будущий ход процесса и его прошлое, исходя из состояния в настоящее время.



Например, системы, описывающие процессы размножения бактерий и радиоактивного распада вещества, а также механические системы, описывающие движение материальной точки, являются детерминированными, то есть ход развития процесса однозначно определяется по заданному начальному положению и уравнениям системы. Разумеется, существуют и недетерминированные системы: процесс распространения тепла в некоторой среде является полудетерминированным, так как будущее определяется настоящим, а прошлое - нет. А вот движение частиц в квантовой механике не является детерминированным процессом.

(Нужно заметить, что факт детерминированности того или иного процесса можно установить лишь экспериментально, следовательно, - только с некоторой степенью точности. В дальнейшем мы еще вернемся к этому обстоятельству, а сейчас будем считать, что наши математические модели совпадают с реальными физическими процессами, то есть являются достаточно точными.)

Поскольку ход развития процесса, описываемого детерминированной системой, однозначно определяется заданным начальным состоянием, то можно предположить, что поведение такой системы является достаточно регулярным, то есть следует некоторому определенному закону.

Однако последние десятилетия принесли в терминологию, связанную с механическими и другими системами, новое слово «хаос». За последние годы оно стало привычным во многих научных дисциплинах. В современном понимании оно означает состояние беспорядка и нерегулярности. Применение этого термина при изучении свойств системы означает, что ее движение может стать нерегулярным, непредсказуемым, то есть система может начать вести себя случайным образом.

(Мы познакомимся с наиболее простой моделью, демонстрирующей такое поведение, немного дальше.)

Надо отметить, что представления о том, что движение в детерминированных системах может не всегда носить регулярный характер, возникли достаточно давно. Еще в конце XIX века А. Пуанкаре установил, что в некоторых механических системах может появляться хаотическое движение. Тогда это было воспринято как курьез. В 1963 году Э. Лоренц исследовал метеорологическую модель и обнаружил, что она приводит к совершенно хаотическим движениям. Лоренц открыл один из примеров так называемого «детерминированного хаоса».

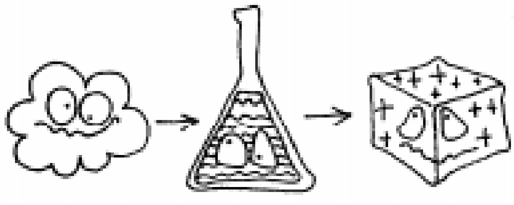
В последние годы, благодаря новым теоретическим результатам, наличию быстродействующей техники и развитию техники эксперимента, стало ясно, что хаос встречается часто. Во многих системах хаотическое и регулярное поведение чередуются.

Можно привести список нелинейных систем, в которых было обнаружено проявление детерминированного хаоса:
· маятник с возбуждением;
· лазеры;
· жидкости вблизи порога турбулентности;
· приборы нелинейной оптики;
· химические реакции;
· ускорители частиц;
· классические системы, включающие много тел;
· биологические модели динамики популяций.

Интенсивное исследование нелинейных процессов показывает, что хаотические движения не являются исключениями, они присущи этим процессам. При решении таких задач численными методами выясняется, что результаты счета весьма чувствительно зависят от выбора начальных данных, то есть процессы с достаточно близкими начальными состояниями с течением времени сильно расходятся. Эта особенность является одним из признаков существования в системе хаотических режимов. Далее мы поговорим об этом подробнее и рассмотрим эту характеристику на примере анализа поведения модельного уравнения.

ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ И ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС

Мы рассмотрим дискретные системы, то есть системы, описывающие состояние некоторого процесса в дискретные моменты времени. Состояние изучаемого процесса в данный момент времени назовем состоянием системы в этот момент времени. Иначе говоря, состояние системы - это точка ее фазового пространства. Важно отметить, что уравнения, описывающие поведение такой системы, фактически задают некоторый итерационный



процесс. Именно: если известно состояние системы в момент времени $t_i(S_i)$, то уравнения, задающие систему, позволяют определить ее состояние в момент времени $t_{i+1}(S_{i+1})$. Переход системы из состояния S_i в состояние S_{i+1} называется итерацией. Таким образом, последовательные итерации точек фазового пространства определяют нам динамику системы. Точка фазового пространства системы переходит из одного состояния в другое, подчиняясь уравнениям, описывающим данную модель, и отслеживание ее поведения позволяет определить характерные особенности нашей системы. Иногда говорят, что система порождает некоторую структуру в фазовом пространстве. Будем обозначать фазовое пространство системы через X, а точки этого пространства через x_i, где i принимает значения из множества натуральных чисел. (Заметим, что переменная i может пробегать и множество целых чисел, но пока мы эту ситуацию не рассматриваем).

Выберем произвольное значение x_0 в фазовом пространстве нашей системы и начнем итерационный процесс. В результате получится последовательность значений $x_1, x_2,..., x_n$.

Эту последовательность называют траекторией точки x_0. Понятно, что выбирая различные начальные значения мы будем, вообще говоря, получать различные траектории.

Нас интересует поведение системы по истечении достаточно большого периода времени, то есть поведение построенных траекторий. Будут ли они сходиться к некоторому предельному значению, образуют ли периодическую последовательность или будут вести себя непредсказуемо? Иначе говоря, какую структуру в фазовом пространстве мы получим? Чтобы ответить на эти вопросы, нужно исследовать свойства данной системы.

Рассмотрим простой пример. Последовательность Фибоначчи задается следующей рекуррентной формулой $x_{n+2}=x_n+x_{n+1}$, при этом $x_1=0$, $x_2=1$. Применение этой формулы даст нам ряд чисел: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,..., где каждый член ряда, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих. В этом случае можно считать, что на множестве натуральных чисел (включая 0) задан некоторый процесс, порождающий числовую последовательность.

Члены этой последовательности можно рассматривать как точки фазового пространства системы, заданной приведенным рекуррентным соотношением. Таким образом, фазовое пространство - множество натуральных чисел, а числа ряда Фибоначчи - точки в этом фазовом пространстве. Последовательность Фибоначчи обладает следующим интересным свойством.

Вычислим предел последовательности u_n, где $u_n = \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$. Для этого заметим, что справедливо соотношение $\dfrac{x_{n+2}}{x_{n+1}} = \dfrac{x_n + x_{n+1}}{x_{n+1}} = 1 + \dfrac{x_n}{x_{n+1}}$. Иначе говоря, получаем формулу для последовательности u_n: $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$. Нетрудно проверить, что эта последовательность монотонно возрастающая, ограниченная, следовательно у нее существует предел a. Тогда из полученного соотношения следует $a = 1 + \dfrac{1}{a}$, откуда $a = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. Эта величина хорошо известна как золотое сечение. Таким образом у нашей дискретной сис-

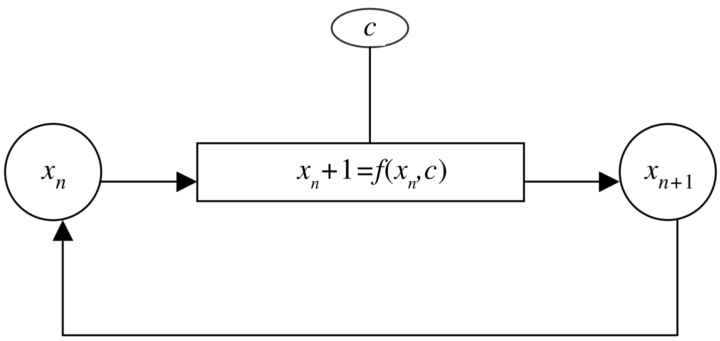


Рисунок 1.

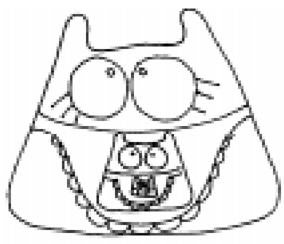
темы есть некая предельная величина, характеризующая ее поведение на бесконечности (то есть при достаточно большом числе итераций): предел отношения двух последовательных состояний равен золотому сечению.

Для изучения появления в дискретных системах сложных хаотических режимов мы будем рассматривать нелинейные системы, то есть такие, где уравнения в правых частях имеют более сложный вид, чем линейные функции. Это связано с тем обстоятельством, что линейные системы не демонстрируют сложной динамики.

Рассмотрим схему следующего итерационного процесса $x_{n+1} = f(x_n, c)$, где x_n обозначает состояние системы в момент времени n, x_{n+1} - в следующий момент, c - параметр системы. Функция f задает правило, по которому определяется состояние системы в последующий момент времени, если известно ее состояние в предыдущий момент (рисунок 1).

Описанная схема представляет собой процесс с обратной связью, когда результат одной итерации является начальным значением для следующей. Такие процессы есть в любой точной науке. Существенным условием, налагаемым на систему, как уже упоминалось выше, является нелинейная зависимость между результатом и начальным значением. При этом условии такие системы весьма часто порождают самоподобные (или фрактальные) структуры. Самоподобие означает, что любая часть такой структуры повторяет строение всей структуры в целом. В природе самоподобные структуры встречаются довольно часто: самоподобие можно наблюдать в строении морских коньков и морских звезд, прибрежных линий морей и рек, в иерархической организации живых существ.

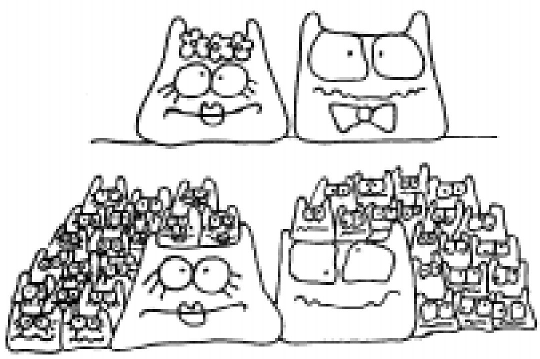
В дальнейшем мы на простых примерах проследим появление таких структур.



ДИНАМИКА ПОПУЛЯЦИЙ И ЛОГИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

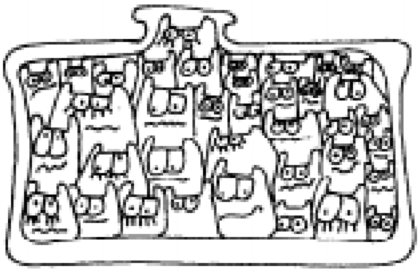
Мы приведем пример построения математической модели в наиболее простом случае, когда наша система содержит только одно уравнение, и ее фазовое пространство (то есть пространство состояний) является множеством положительных вещественных чисел.

Рассмотрим пример из биологии, связанный с динамикой популяции. Рост некоторой популяции за несколько лет описывается при помощи коэффициента прироста k, который равен отношению ежегодного прироста к общей численности популяции. Если этот коэффициент остается постоянным в течение всего рас-



сматриваемого промежутка времени, то закон роста называется линейным. Например, если k=5%, то популяция удвоится через 14 лет. Этот результат нетрудно получить, решив уравнение $1.05^n x = 2x$, где x - численность популяции, n - число лет, за которое она удвоится. Решение уравнения дает $n = \dfrac{\ln 2}{\ln 1.05} \approx 14$.

Разумеется, такой рост возможен лишь на ограниченных промежутках времени. Таким образом, линейные уравнения не позволяют нам даже в первом приближении описать рост популяции. В 1845 г. П.Ф. Ферхюльст сформулировал закон, содержащий ограничение на рост. Он считал, что любая экологическая ниша может обеспечить существование популяции только определенного размера, а коэффициент прироста должен снижаться с ростом численности популяции. При таком подходе коэффициент k становится параметром процесса, описывающего изменение численности популяции, то есть - переменная величина и процесс становится нелинейным.



А именно, схема поведения популяции может быть описана следующим образом.

При малых коэффициентах прироста численность популяции будет регулироваться таким образом, чтобы достичь оптимального ($X_{опт}$) размера. При k>200% энергичный рост быстро приводит к достижению максимального ($X_{макс}$) размера, превышающего оптимальный. В результате возникает ответная реакция: коэффициент прироста снижается, и популяция уменьшается до минимального размера ($X_{мин}$). Появляются устойчивые колебания между максимальным и минимальным размерами популяции, то есть между состояниями $X_{макс}$ и $X_{мин}$. Это означает, что возникает некоторый устойчивый режим: в наблюдаемые моменты времени состояние системы определяется этими двумя параметрами. Иначе говоря, в системе возникает устойчивый цикл периода 2.

При дальнейшем увеличении параметра k происходит усложнение в поведении системы.

Каждое из состояний $X_{макс}$, $X_{мин}$ претерпевает изменения, аналогичные описанному, в результате чего появляются 4, затем 8, затем 16 и т.д различных величин, между которыми колеблется численность популяции. Таким образом, при изменении параметра динамика поведения нашей системы будет характеризоваться появлением циклов периода 4, 8, 16 и т.д.

Нарисуем диаграмму, иллюстрирующую описанный процесс. По оси OX будем откладывать значение коэффициента прироста k, а по оси OY - значения x_n, соответствующие численности популяции при заданном значении k.

Пусть x_n обозначает численность популяции, соответствующую значению параметра k_0. Пусть k_1 обозначает то значение параметра, которому соответствуют два состояния системы - x_{n1} и x_{n2}. Колебание численности популяции происходит между этими двумя значениями, то есть переменная x в моменты времени, соответствующие интервалу в один год, будет принимать только эти два значения. Говорят, что данному значению параметра соответствует цикл периода 2. Значению параметра k_2 соответствует цикл периода 4 и т.д. Но такое регулярное изменение поведения происходит лишь до определенного значения коэффициента k. При k>257% в системе появляются циклы любого периода и нетрудно понять, что в этом случае предсказать ее поведение довольно сложно. Такой режим часто называют хаотическим.

Описанный процесс можно изобразить схемой (диаграммой) как на рисунке 2.

По оси OX будем откладывать значение коэффициента прироста k, а по оси OY - значения x, соответствующие численности популяции при заданном значении параметра k. Пусть x_n обозначает оптимальную численность популяции , соот-

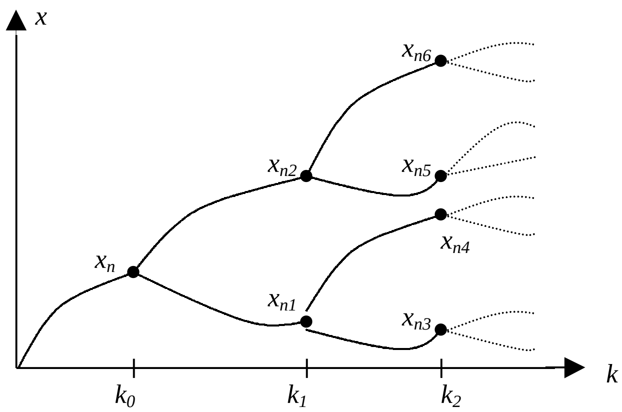


Рисунок 2.

ветствующую значению параметра k_0. При значении параметра k_1 численность популяции колеблется между двумя устойчивыми положениями: минимальным (x_{n1}) и максимальным (x_{n2}). При значении параметра k_2 поведение системы определяется четырьмя значениями, то есть колебания популяции происходят между значениями x_{n3} - x_{n6}.

Приведенную диаграмму можно построить следующим образом. Выберем произвольное значение x_0 и будем строить его итерации в соответствии с заданной системой. Зададимся достаточно большим числом итераций (например 10000) и будем изображать на графике значение начальной точки после этих итераций. Вычисления проводим, меняя значение параметра k. Тогда ветвь диаграммы от начальной точки до точки x_n обозначает изменение популяции при изменении параметра. При значении параметра равном k_0 существует устойчивое положение системы, то есть итерации различных начальных точек дают один и тот же результат - величину x_n.

При изменении параметра от k_0 до k_1 численность популяции может как увеличиваться, так и уменьшаться, что показывают две ветви диаграммы между точками x_n, x_{n1} и x_n, x_{n2}. Однако при достижении параметром значения k_2 в системе существуют два устойчивых режима, между которыми и будут происходить колебания, то есть итерации различных начальных значений будут давать только величины x_{n1} и x_{n2}.

Система с описанным поведением может быть промоделирована с помощью так называемого логистического уравнения. Последнее получило свое название из задачи о пропитании животных (logistics - снабжение, пропитание).

Итерационный процесс задается формулой $x_{n+1} = f(x_n, \lambda)$, где $f(x) = \lambda x(1-x)$. Здесь переменная x представляет число особей на изолированной территории, деленное на максимальное число особей, которых эта территория способна прокормить. (В таких единицах максимальное число животных равно 1). Таким образом, количество имеющейся пищи пропорционально величине 1-x. Иначе говоря, по мере того, как число животных приближается к максимуму (то есть 1), количество пищи, постоянно сокращаясь, приближается к нулю.

Здесь параметр λ аналогичен описанному коэффициенту прироста, а переменная x принимает значения из промежутка [0,1], то есть масштабирована с помощью деления на максимальное число особей.

Как мы видели, эта модель демонстрирует довольно сложное поведение при изменении параметра. Тем не менее, существует удивительная закономерность, характеризующая динамику таких процессов. При изменении параметра в определенных точках происходит качественное изменение в динамике системы: возникновение циклов определенных периодов, а затем циклов любых периодов. Обычно изменение качественной картины поведения системы при изменении входящих в нее параметров называют бифуркацией. В нашем случае мы можем говорить о бифуркации перехода от колебаний периода 2^n к колебаниям периода 2^n. Такое явление называется бифуркацией удвоения периода. Значения параметра, при которых происходят такие перестройки, называются точками бифуркации. Точное вычисление этих точек позволило установить следующую закономерность: интервалы между точками последовательных бифуркаций λ_i сокращаются, причем с одним и тем же множителем. А именно, справедливо следующее соотношение

$$\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \to \delta\text{, где } \delta \approx 4.669201\,.$$

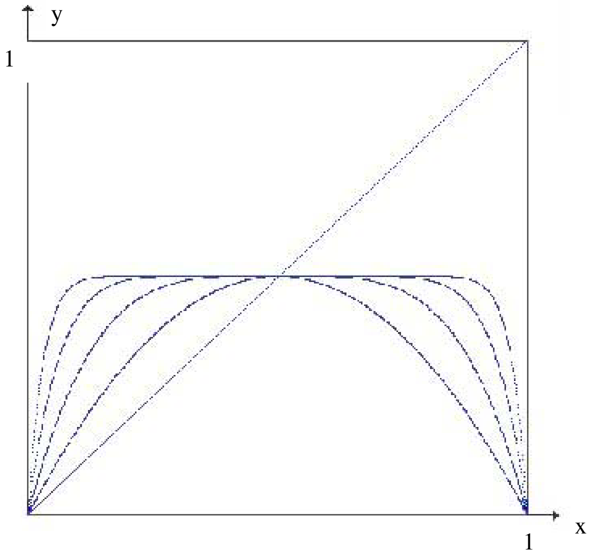


Рисунок 3. *Итерации логистического отображения при λ=2.01. У каждой степени та же неподвижная точка, что и у исходного отображения. Число итераций - 4.*

Величина δ называется константой Фейгенбаума по имени ученого, численно исследовавшего описанное уравнение и экспериментально установившего приведенное соотношение.

Важность изучения логистического уравнения осознана давно. Динамика сложных систем очень часто сводится к его изучению. Огромное число экспериментов подтверждает, что сценарий удвоения периода наблюдается во многих естественных системах (турбулентность в потоке жидкости, нелинейные колебания в электрических сетях, переход нормального ритма сердца в фибрилляцию).

Биолог Роберт Мэй писал: ([1])

«...я настоятельно советую, чтобы люди знакомились с логистическим уравнением на раннем этапе своего обучения математике. Такое изучение очень обогащало бы интуитивные знания учащегося о нелинейных системах. Для всех нас было бы лучше, если бы не только в научной работе, но и в повседневной политической и экономической жизни как можно больше людей поняло, что простые нелинейные системы не всегда обладают простыми динамическими свойствами.»

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ОДНОМЕРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Несмотря на сложность явлений, возникающих даже в простых нелинейных системах, мы можем изучить их особенности «в первом приближении», используя для этого метод компьютерного моделирования. Он состоит в численном построении траекторий исходной системы, то есть выборе начального значения и построении его итераций по формуле, задаваемой исходным отображением. Таким образом, при достаточно большом числе итераций (порядка 10000) мы получаем представление о поведении системы: либо она стремится к какому-то стабильному состоянию, либо совершает колебания, либо никаких устойчивых режимов у нее нет.

Вернемся к уже рассмотренному логистическому уравнению и используем его как основную модель. Пусть $f(x,\lambda)$ - непрерывное отображение, заданное на отрезке [0,1] формулой $f(x,\lambda) = \lambda x(1-x)$. Пусть область значений лежит в единичном отрезке. В этом случае говорят, что

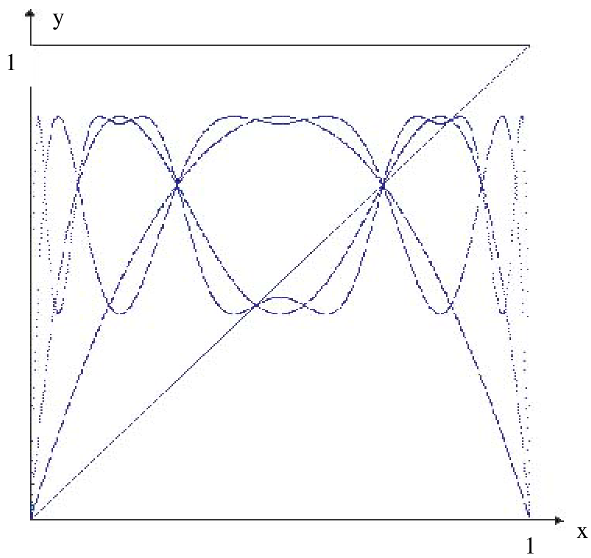


Рисунок 4. *Итерация логистического отображения при λ=3.4. Существуют две неподвижные точки отображения f^2 (цикл периода 2). Число итераций - 4.*

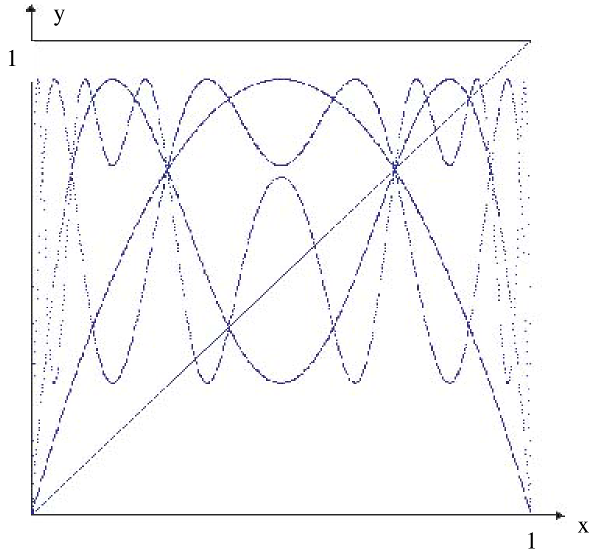


Рисунок 5. *Появление неподвижных точек при λ=3.67. Число итераций - 4.*

задано отображение единичного отрезка в себя.

Так как $\lambda x(1-x) = -\lambda((x-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4})$, то нетрудно заметить, что это выражение будет принимать наибольшее значение при x=0.5. Так как по условию максимальное значение отображения равно единице, то из условия $1 = \frac{\lambda}{4}$, получаем $\lambda = 4$. Таким образом, чтобы отображение $f(x,\lambda)$ задавало преобразование единичного отрезка в себя, нужно, чтобы параметр λ принимал значения из промежутка [0,4]. При различных значениях параметра график функции $f(x)$ представляет собой квадратичную параболу.

Для дальнейшей работы нам потребуются некоторые определения.

Определение 1.

Точка x называется неподвижной точкой отображения f, если она удовлетворяет уравнению $f(x)=x$.

Определение 2.

Степенью отображения f называется следующая конструкция

$$f^k(x) = \underbrace{f(f(\ldots(f}_{k \text{ раз}}(x))\ldots)),$$

где k - положительное целое число.

Определение 3.

Точка x называется периодической точкой периода m для отображения f, если $f^m(x) = x$ и $f^k(x) \neq x$ для k=0,1,...m-1.

Заметим, что если точка является неподвижной для f, то она является и периодической точкой при любом целом положительном k. Обратное утверждение неверно, то есть периодическая точка периода m не обязательно является неподвижной для f.

Определение 4.

Последовательность точек вида x_0, $f(x_0)$, $f^2(x_0)$,...,$f^k(x_0)$ называется орбитой (или траекторией) точки x_0 под действием отображения f.

Нетрудно заметить, что периодической точке x периода m соответствует орбита из m точек вида $\{x, f(x), \ldots f^{m-1}(x)\}$.

Неподвижные точки отображения f - это точки пересечения графика $y=f(x)$ с диагональю $y=x$. Периодические точки отображения f периода m - точки пересечения с диагональю графика функции $y=f^m(x)$.

Чтобы определить неподвижные точки отображения f, нужно решить уравнение $f(x)=x$. Получаем $\lambda x(1-x) = x$, откуда $x_1 = 0$, $x_2 = 1 - \frac{1}{\lambda}$. Таким образом, 0 - неподвижная точка f при любых значениях λ. Вторая точка существует только при значениях $\lambda > 1$, иначе она не лежит в отрезке [0,1]. Появление неподвижных точек для отображений $f^k(x)$ (то есть периодических точек периода k для $f(x)$) можно проследить, строя степени исходного отображения при различных значениях параметра. Построение степеней отображения заключается в построении последовательных итераций единичного отрезка в себя. Для этого можно воспользоваться следующей схемой. Отрезок делится на N частей и каждая точка полученного разбиения итерируется нужное число раз. На рисунках 3-5 построены 4 итерации отображения $f(x)$ при значениях параметра λ=2.01, λ=3.4 и λ=3.67. Хорошо прослеживается процесс возникновения новых периодических точек при изменении параметра λ.

Теперь мы можем проиллюстрировать описанную выше схему удвоения периода, используя логистическое уравнение как модель. Схема алгоритма следующая. Будем менять значения параметра λ, начиная с некоторого начального значения (например с 2) с достаточно малым шагом. При каждом выбранном значении параметра будем выбирать точки из отрезка [0,1] каким-либо образом (например, возьмем последовательность точек, выбираемых тоже с некоторым шагом). Каждую выбранную точку итерируем достаточное число раз, и результат этой итерации выводим на экран. Тогда мы получим бифуркационную диаграмму удвоения периода, приведенную на рис. 5. Горизонтальная ось соответствует значениям параметра λ, на вертикали, проходящей через точку $\lambda = c$, лежат точки, характеризующие поведение системы при этом значении параметра. Сначала мы можем наблюдать 2, 4,... такие точки (которые, как мы уже знаем, соответствуют циклам периода 2, 4,...), затем, начиная с некоторого момента, точки зарисовывают «почти всю» вертикаль, и определение периодических режимов становится затруднительным. Среди довольно плотной зарисовки можно видеть некоторый «просвет», соответствующий маленькому промежутку по параметру. Это так называемое окно периодичности. Его существование означает, что в этом интервале изменения параметра среди хаотических режимов могут возникать отдельные периодические траектории (рисунок 6).

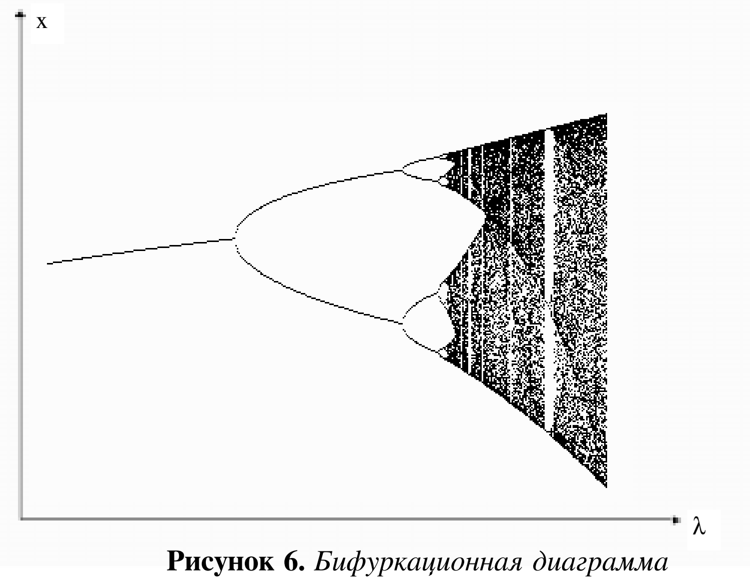


Рисунок 6. *Бифуркационная диаграмма удвоения периода для логистического уравнения.*

Известно, что описанное выше явление последовательности бифуркаций удвоения периода происходит в весьма широком классе систем, зависящих от параметра. Не приводя общих условий возникновения этого явления, отметим, что в системах, задаваемых отображениями $f(x) = \lambda \sin(\pi x)$, $f(x) = \lambda x(1-x)^2$ также наблюдается явление бифуркации удвоения периода.

На дискете приведен пример программы, позволяющей строить итерации логистического отображения. Программа написана на языке Pascal (версия 7.0), достаточно проста и может быть использована как модель для самостоятельного изучения поведения одномерных систем.

Литература.

[1] May R.M. Model Ecosystems. Princeton Univ. Press, Princeton, 1976.

Ампилова Наталья Борисовна, доцент кафедры дифференциальных уравнений мат.-мех. факультета СПбГУ.

НАШИ АВТОРЫ