

*Кондратьев Александр Сергеевич  
Филиппов Михаил Эдуардович*

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

### 1. КОМПЛЕКСНАЯ НАУЧНАЯ ПРОБЛЕМА КАК ОБЪЕКТ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Развитие современной науки, связанное с широким внедрением электронно-вычислительной техники в процесс научного исследования, привело к появлению новых форм исследовательской деятельности. Появились даже новые категории. Например, наряду с теоретической и экспериментальной физикой, появилась вычислительная физика, характеризующаяся своим предметом и методом исследования. Характерным моментом здесь является построение физической модели и проведение вычислительного эксперимента. Подобная схема исследования является весьма общей и используется не только в физике, но и в других естественных науках. По-

этому в рамках развития современных информационных технологий обучения естественно говорить об определенных универсальных исследовательских умениях и навыках, связанных с возможностью реализации указанной схемы научного исследования, независимо от конкретного объекта исследования.

Естественно ставить вопрос о развитии таких универсальных навыков в процессе обучения, в том числе и в средней школе. Здесь, конечно, возникает ряд вопросов,

главным из которых является необходимость обеспечения как адекватного научного уровня рассмотрения, так и доступности соответствующей деятельности для учащихся средней школы. В свете изложенного претерпевает определенные изменения и концепция развития творческих способностей обучаемых: к традиционным аспектам этой проблемы, давно являющейся объектом самого пристального внимания педагогики, добавляется новый момент, связанный с обязательным присутствием у творчески развитой личности определенных умений и навыков, позволяющих практически реализовывать имеющийся творческий потенциал.

Особенно важным обстоятельством здесь является возможность более раннего включения обучаемого в реальные научные исследования,

обусловленного именно наличием у него указанных универсальных навыков. Наличие универсальных исследовательских навыков позволяет также в новом свете рассматривать вопрос о реализации межпредметных связей: если раньше межпредметные связи рассматривались как определенный компонент обучения, проявляющийся при рассмотрении определенной проблемы в рамках какой-то конкретной области знания, то теперь межпредметные связи реализуются на пути вы-

*Наряду с теоретической и экспериментальной физикой, появилась вычислительная физика, характеризующаяся своим предметом и методом исследования. Характерным моментом здесь является построение физической модели и проведение вычислительного эксперимента.*

ше межпредметные связи рассматривались как определенный компонент обучения, проявляющийся при рассмотрении определенной проблемы в рамках какой-то конкретной области знания, то теперь межпредметные связи реализуются на пути вы-

бора комплексной научной проблемы, изначально не относящейся к какой-либо одной области знания и, соответственно, к одной учебной дисциплине.

Остановимся кратко на обсуждении критериев выбора научных проблем, которые могут эффективно использоваться для развития навыков исследовательской деятельности. Прежде всего отметим, что выбираемая проблема должна быть современной, представлять несомненный интерес на данном современном этапе развития науки, ее уже полученное решение должно содержать существенные научные результаты, и в то же время эта проблема должна быть еще далека от окончательного разрешения. Современность проблемы не вызывает сомнений, поскольку весь смысл развития исследовательских навыков заключается в овладении современными методами научных исследований. Определенная незавершенность решения проблемы необходима для возможности развития умения постановки новых задач, что по своей значимости превосходит значение умения решать поставленные задачи: все развитие науки убедительно демонстрирует тот факт, что способность к постановке актуальных научных проблем встречается гораздо реже хорошо развитых способностей решения сформулированных проблем. Наличие уже полученных существенных научных результатов необходимо для создания устойчивого фона положительных эмоций, для выработки и закрепления требуемых умений. Подчеркнем, во избежание недоразумений,

*Выбираемая проблема должна быть современной, полученное решение должно содержать существенные научные результаты, и в то же время эта проблема должна быть еще далека от окончательного разрешения. Определенная незавершенность решения проблемы необходима для возможности развития умения постановки новых задач, что по своей значимости превосходит значение умения решать поставленные задачи.*

*Выбираемая проблема должна лежать на стыке двух или даже нескольких областей знания: истинные научные проблемы в рамках развитых областей - физики, математики и т.д., как правило, очень сложны и недоступны для решения на обсуждаемом уровне подготовки обучающихся. Указанное свойство выбираемой проблемы соответствует возможности ее разложения на более мелкие конкретные задачи, относящиеся уже к определенной области знания.*

что сказанное выше никак не умаляет значение изучения классических методов исследования. Однако, здесь следует учитывать тезис о необходимости практического использования полученных знаний по мере их накопления. Далее, выбираемая проблема должна лежать на стыке двух или даже нескольких областей знания. Это требование связано с дидактическим требованием доступности: истинные научные проблемы в рамках развитых областей - физики, математики и т.д., как правило, очень сложны и недоступны для решения на обсуждаемом уровне подготовки обучающихся. Сформулированное требование естественно вытекает из требований современности научной проблемы и ее доступности. Наконец, указанное свойство выбираемой проблемы соответствует возможности ее разложения на более мелкие конкретные задачи, относящиеся уже к определенной области знания.

Если решения этих задач уже известны в науке, то реализуется возможность комплексного анализа проблемы с дифференцированным подходом к исследовательской деятельности обучающихся.

Итак, комплексный характер научной проблемы и представляет собой главное отличие предлагаемого подхода к развитию навыков исследовательской деятельности по сравнению

с традиционными методами развития творческих способностей на основе решения учебных задач в определенной области знания. В результате создаются предпосылки для успешной реализации модели научного исследования.

*Основными этапами реализации модели научного исследования являются:*

- *получение экспериментальных данных или (что более реально) сбор и анализ уже имеющихся экспериментальных данных относительно какой-нибудь группы интересных явлений;*
- *расчленение общей возникающей проблемы на группу конкретных частных задач, имеющих самостоятельный интерес и допускающих различные подходы к их решению в рамках конкретных наук (областей знания);*
- *разработка физических моделей явлений, фигурирующих в рамках указанной комплексной проблемы, на основе феноменологического подхода с опорой на фундаментальные положения и законы физики и, возможно, других наук;*
- *разработка математических моделей отдельных возникающих задач и математической модели всей комплексной проблемы;*
- *проведение вычислительного эксперимента на основе развитых математических моделей.*

## **2. ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ КОМПЛЕКСНОЙ МОДЕЛИ**

Дальнейшее обсуждение будем проводить на конкретном примере комплексной научной проблемы лазер-индуцированного тромбообразования в микрососудах живых организмов, изучение которой осуществляется в течение последних лет в ряде научных центров США и Японии и на кафедре патофизиологии Санкт-Петербургского Медицинского Университета. Воздействие лазерным лучом, сфокусированным в полость объекта через микроскоп, рассматривается в настоящее время как один из наиболее перспективных способов моделирования повреждения микрососудов и формирования тромба в живых организмах (in vivo). Этот метод дает возможность получать воспроизводимые результаты при строго дозированном воздействии на микрососуд.

Указанная проблема действительно представляет собой комплексную актуальную научную проблему, лежащую на стыке нескольких областей знания, представляющую исключительно высокий теоретический и практический интерес.

Ниже мы сформулируем основные экспериментальные факты и обсудим возможность разбиения общей проблемы на ряд более мелких конкретных задач, доступных для независимого исследования.

Тромбоз не развивается без повреждения сосудистой стенки, о чем известно еще со времен Р. Вирхова. Лазерное излучение в той или иной мере всегда обеспечивает повреждение эндотелия вследствие поглощения энергии.

Рост тромба осуществляется в три стадии: начальная стадия, в течение которой осуществляется первичная адгезия пластинок тромбоцитов на сосудистую стенку; агрегационная стадия, когда тромб растет вследствие оседания крови на ранее осевшие тромбоциты, и заключительная стадия, завершающаяся либо закупоркой сосуда, либо отрывом тромба от стенки. При этом предметом изучения в рамках феноменологического подхода естественно выбрать вторую и третью стадию, так как

*Решение задач требует создания конкретной физической, химической, биологической и математической моделей явления. Общей чертой всех фигурирующих конкретных моделей является создание качественной картины происходящих явлений, которая дополняется учетом количественных соотношений, когда это оказывается возможным.*

первая стадия, с которой начинается тромбообразование в результате какого-либо повреждения сосуда, определяется механизмом взаимодействия протекающей крови с поверхностью поврежденной стенки.

Вторая, агрегационная стадия, характеризуется ростом тромба и определяется универсальными характеристиками, не зависящими от типа повреждения: физиологическими особенностями взаимодействия тромбоцитов с растущим тромбом и гидродинамическими характеристиками протекания крови в связи с частичной или почти полной закупоркой сосуда с тромбом. Гидродинамические и физиологические факторы, определяющие кинетику образования тромба, существенно различны на начальном и конечном этапах процесса тромбообразования.

Научное исследование предполагает выделение наиболее существенных черт в изучаемом явлении. Часто выделение таких черт позволяет перейти к более простому объекту, который отражает основные закономерности явления и дает возможность получить о нем новую информацию. Такой объект и представляет собой модель изучаемого явления. В рассматриваемом случае описываемый объект состоит из отдельных блоков, совокупность которых мы называем обобщенной физической моделью. Применительно к проблеме лазер-индуцированного тромбообразования создание обобщенной модели приводит к выявлению задач:

1) лазерное излучение и его взаимодействие со стенками кровеносных сосудов;

2) физические, биологические и химические следствия повреждения стенки сосуда лазерным излучением;

3) основные характеристики кровотока, состав крови и механизм возникновения и роста тромба вблизи поврежденного участка стенки сосуда;

4) гидродинамические закономерности кровотока и их изменение в результате возникновения и роста тромба.

В результате такого разбиения вырисовывается последняя, заключительная задача в выбранном направлении исследования, решение которой потребует предварительного решения всех предыдущих задач:

5) физическая картина роста тромба и анализ влияния различных факторов на этот процесс, включающий его математическое описание.

Решение каждой из этих задач требует создания конкретной физической, химической, биологической и математической модели явления, или конкретной модели явления, учитывающей различные факторы. Так, в рассматриваемом случае, на первый взгляд, чисто физическая модель явления соответствует только задаче (5), а все остальные задачи требуют создания конкретных моделей, учитывающих факторы различной природы; однако все они в той или иной степени содержат физическую компоненту. Как мы увидим, для полного согласования всех сформулированных задач (даже в задаче (5)) приходится учитывать существенные биологические факторы. Общей чертой всех фигурирующих конкретных моделей является создание качественной картины происходящих явлений, которая дополняется учетом количественных соотношений, когда это оказывается возможным.

Стенка кровеносного сосуда подвергается кратковременному воздей-

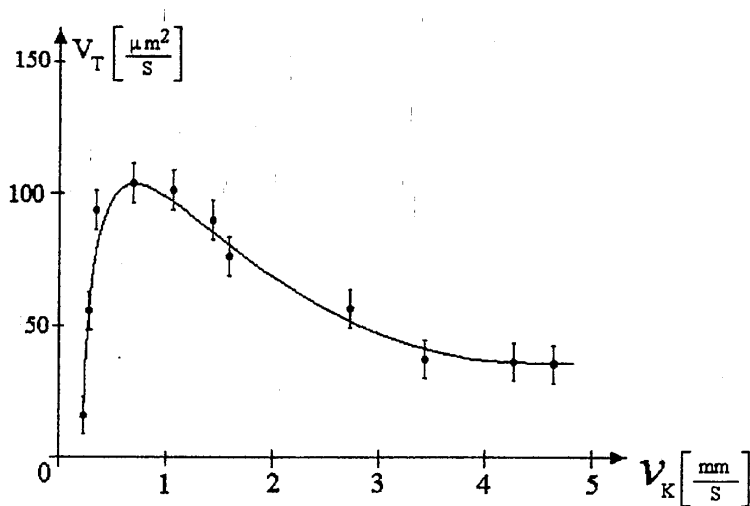
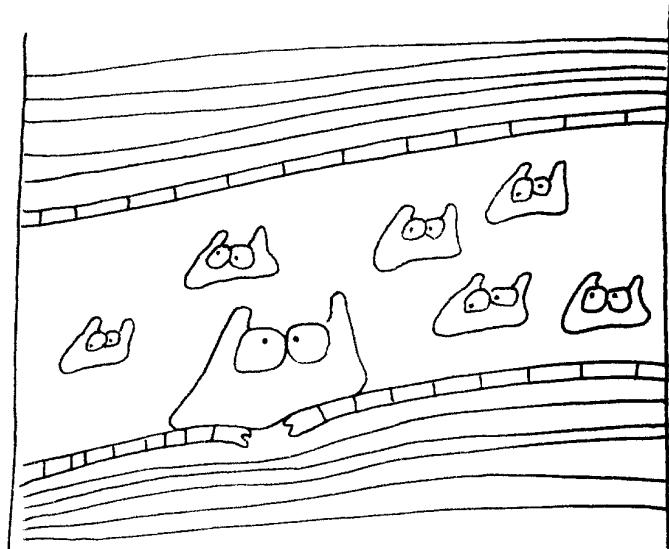


Рисунок 1. Зависимость скорости роста тромба от скорости кровотока.

ствием лазерного излучения, в результате чего на пораженном участке внутренней поверхности сосуда начинается рост тромба. Экспериментальное исследование этого процесса показало, что скорость роста тромба является немонотонной функцией скорости кровотока, имеющей ярко выраженный максимум при определенном значении скорости (рис. 1). Изменение скорости кровотока в зависимости от размеров растущего тромба показали, что при малых размерах тромба изменение скорости соответствует уравнению неразрывности, а при дальнейшем достижении тромбом определенного размера, скорость начинает резко



*В начальной стадии роста тромба осуществляется первичная адгезия пластинок тромбоцитов на сосудистую стенку.*

уменьшаться и обращается в нуль. Основываясь на этих двух надежно установленных экспериментальных фактах, можно развить простую модель кинетики роста тромба, способную продемонстрировать в вычислительном эксперименте все наблюдаемые на опыте режимы роста тромба.

Первый из указанных экспериментальных фактов получает качественное объяснение в рамках биологической концепции времени активации тромбоцитов в потоке крови при попадании в область пораженного участка стенки.

На феноменологическом уровне взаимодействие тромбоцитов с растущим тромбом может быть описано путем введения универсального параметра, имеющего смысл “времени активации” (то есть времени, по истечении которого тромбоцит в крови, попав в зону поражения, становится способным к агрегации) и не зависящего от конкретной причины возникновения тромба.

Рассмотрение задачи (4) о гидродинамических закономерностях кровотока может быть проведено на более высоком, но доступном учащимся научном уровне, по сравнению с другими задачами. Оно открывает широкие возможности для последовательного адекватного углубления имею-

щихся у школьников знаний по механике жидкости и даже по реологии крови.

Полученные данные свидетельствуют о том, что на начальной стадии роста тромба скорость кровотока возрастает, а затем в области, соответствующей значительному перекрытию сосуда растущим тромбом, начинает резко убывать и обращается в нуль. Для объяснения этого явления следует воспользоваться сформулированным в физиологии кровообращения принципом шунтирования отдельных участков при достижении градиентом давления некоторого критического значения.

Приближенное описание экспериментальной кривой, показанной на рис.1, соответствует построению простейшей математической модели рассмотренного процесса сужения сосуда за счет роста тромба.

Для того, чтобы описать поведение этой кривой, введем функцию

$$\varphi(M) = \frac{e^{-\varepsilon M}}{1 - \gamma M e^{-\varepsilon M}} \quad (1)$$

где  $\gamma$  и  $\varepsilon$  - некоторые феноменологические параметры. Экспонента в знаменателе выражения (1) вводится для того, чтобы  $\gamma$  можно было считать феноменологическим параметром развиваемой теории.

Функция  $v(M) = v_0\varphi(M)$ ,

где  $\varphi(M)$  определяется выражением

(1), качественно правильно передает характер зависимости скорости крови на оси сосуда от размеров тромба. Достаточно простой вид функции  $\varphi(M)$  обеспечивает возможность элементарного исследования области возможных значений параметров  $\gamma$  и  $\varepsilon$ .

На начальной стадии роста тромба скорость кровотока в сосуде всегда возрастает. Отсюда следует условие:  $\gamma/\varepsilon > 1$ . Знаменатель выражения (1) должен быть положительным при любом значении  $M$ ; отсюда следует условие:  $\gamma/\varepsilon < e$ . В результате получаем область возможных изменений параметра  $\gamma/\varepsilon$ :

$$1 < \gamma/\varepsilon < e.$$

Исследование показывает, что функция  $\varphi(M)$ , определяемая соотношением (1), имеет максимум

$$\varphi_{\max} = \frac{\varepsilon/\gamma}{1 - \ln(\gamma/\varepsilon)},$$

который реализуется при значении  $M_1$ , равном

$$M_1 = \frac{1}{\varepsilon} \ln(\gamma/\varepsilon).$$

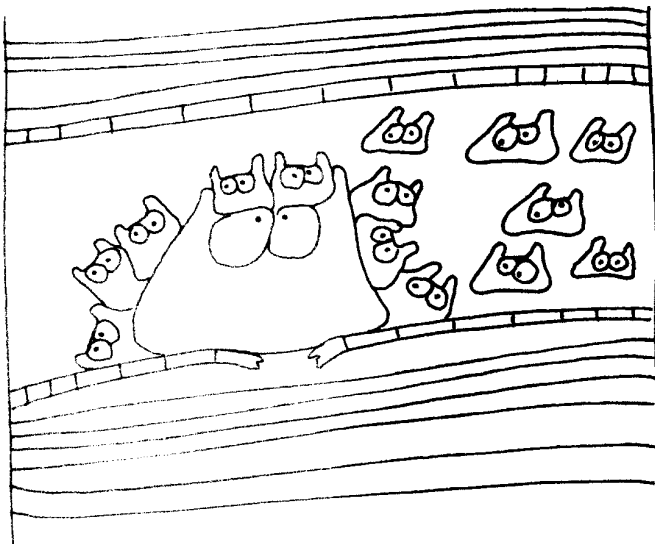
Видно, что величина максимума  $\varphi(M)$  зависит только от отношения  $\gamma/\varepsilon$ , а по-

ложение максимума определяется значениями двух параметров:  $\gamma$  и  $\varepsilon$ .

При изучении приведенного материала необходимо четко изложить учащимся идею введения функции  $\varphi(M)$ : аппроксимировать аналитически экспериментальную кривую можно различными функциями; выбор функции  $\varphi(M)$  именно в форме (1) соответствует возможности предельного перехода - при ничтожных размерах тромба ( $\varepsilon M \ll 1$ ) изменение скорости движения крови в сосуде должно определяться чисто гидродинамическими соотношениями, в данном случае, уравнением непрерывности. Только при достижении тромбом значительных размеров включаются определенные биологические факторы, в частности, принцип шунтирования поврежденных участков.

Методика проведения исследования для получения приведенных результатов может быть различной в зависимости от уровня подготовки учащихся. В школах и классах с углубленным изучением математики можно провести аналитическое исследование, основанное на использовании свойств экспоненциальной функции. В обычных школах можно осуществить вычислительный эксперимент с помощью компьютера или даже графического калькулятора, строя графики зависимости величины  $v(M)$  от  $M$  при различных значениях параметров  $\gamma$  и  $\varepsilon$ .

Построенные физические и математические модели различных компонент рассматриваемой комплексной модели позволяют подойти к решению заключительной задачи (5) и установить закон роста тромба со временем. Установление общей физической картины процесса тромбообразования делает возможным создание достаточно простой математической модели всего явления и проведение вычислительного эксперимента. Создание математической модели заключается в написании замкнутого уравнения (или системы уравнений), описывающих все стороны рассматри-



*Во второй, агрегационной, стадии тромб растет вследствие оседания крови на ранее осевшие тромбоциты.*



ваемого явления - в данном случае биологические, гидродинамические и т.д., что делает возможным проведение численных расчетов.

Математическая модель явления основывается на двух твердо установленных, разобранных выше фундаментальных экспериментальных фактах - немономонном характере зависимости скорости роста тромба  $dM/dt$  от скорости кровотока  $v$ , выражаемом экспериментальной кривой на рисунке 1, и зависимости скорости кровотока от размеров тромба. Кривую на рисунке 1 можно качественно аппроксимировать выражением:

$$\frac{dM}{dt} = av e^{-bv}, \quad (2)$$

где  $a$  и  $b$  - некоторые постоянные. Действительно, при малых скоростях, когда  $bv \ll 1$ , правая часть выражения (2) приближенно равна  $av$ , а при больших  $v$ , когда  $bv \gg 1$ , величина скорости роста тромба  $dM/dt$  убывает по экспоненциальному закону.

Используя развитые представления о гидродинамических закономерностях явления, приходим к выражению:

$$\frac{dM}{dt} = av_0 \varphi(M) e^{-bv_0 \varphi(M)} \quad (3)$$

Вводя новые константы  $\alpha = av_0$  и  $\beta = bv_0$ , перепишем соотношение (3) следующим образом:

$$\frac{dM}{dt} = \psi(M), \quad (4)$$

где  $\psi(M) = \alpha \varphi(M) e^{-\beta \varphi(M)}$ .

Уравнение (4) должно решаться с начальным условием:

$$M(t)|_{t=0} = M(0) = 0,$$

соответствующим началу отсчета времени в момента начала роста тромба.

Таким образом, мы приходим к простой математической модели кинетики

роста тромба, содержащей четыре феноменологических параметра:  $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ .

Качественное обсуждение рассмотренной простой математической модели кинетики процесса лазер-индуцированного тромбообразования обязательно следует завершить подчеркиванием ее феноменологического характера. Действительно, в развитой теории фигурируют всего четыре феноменологических параметра, в то время как число необходимых параметров в каждой из отдельных

задач, на которые разбивается общая комплексная проблема, оказывается большим четырех при ее последовательном микроскопическом анализе или аккуратной аппроксимации экспериментальных кривых. Поэтому, во-первых, от развитой теории нельзя требовать слишком хорошего совпадения с экспериментальными данными и, во-вторых, введенные феноменологические параметры не могут иметь однозначно точного физического смысла, то есть не могут определяться только одной какой-нибудь характеристикой рассматриваемой системы. Ситуация с такими заведомо упрощенными моделями характеризуется идеей Н. Бора о "дополнительности" таких характеристик физической теории, как ясность и точность: физическая картина явления и его математическое описание дополнены. Действительно, создание ясной и понятной физической картины явления требует пренебрежения второстепенными деталями и уводит от математической точности. Наоборот, погоня за точностью описания требует учета всех этих второстепенных деталей, что, конечно, делает общую картину менее понятной и наглядной.

Тем не менее, развитая теория оказывается способной передать все возможные режимы процесса тромбообразования, а введенные параметры являются генетически связанными характеристиками системы - гидродинамическими и биологическими.

Полученные модельные графики зависимости  $M(t)$  соответствуют определенной сглаженной картине развития тромба, то есть достаточно грубому временно-масштабу по сравнению со временем активации тромбоцитов, сопровождающейся изменением их формы и взаимодействием с уже образовавшимся тромбом. Очевидно, что получающиеся в результате вычислительного эксперимента кривые  $M(t)$  не учитывают флуктуаций распределения тромбоцитов в потоке, флуктуаций их скоростей движения и скорости изменения формы в результате активации и т.д. Сглаженный характер модельных кривых отчетливо виден при их сравнении с экспериментальными кривыми.

К числу положительных моментов, связанных с построением рассмотренной феноменологической теории, следует отнести построение интерполяционного выражения для зависимости скорости кровотока от размеров тромба, которое переходит в выражение, соответствующее уравнению непрерывности при малых размерах тромба.

В отличие от этого, выражение для скорости роста тромба имеет чисто интерполяционный характер и только качественно передает ход соответствующей экспериментальной кривой. Однако, как становится ясным из полученных результатов, детали поведения  $dM/dt$ , как функции скорости, не оказывают существенного влияния на картину роста тромба.

Заслуживает отдельного обсуждения вопрос о возможности уточнения развитой простой модели. В качестве первого шага здесь следует указать на необходимость использования в этом случае более

аккуратных аппроксимаций для экспериментальной кривой скорости роста тромба  $dM/dt$ .

В частности, можно использовать соотношения, полученные в различных моделях взаимодействия тромбоцитов с растущим тромбом, основанных на различных предположениях о свойствах времени активации тромбоцитов и о их распределении в потоке крови. Число феноменологических параметров теории при этом, естественно, увеличивается.

Далее, можно использовать подход, основанный на аппроксимации кривых с помощью сплайнов. Такой подход может послужить основой для организации факультативного курса в рамках изучения математики или информатики.

Завершить изучение разбираемого вопроса целесообразно общим обсуждением причины эффективности сравнительно простых моделей при описании весьма сложных явлений.

Отчетливое понимание учащимися этого вопроса является необходимым компонентом формируемого у них осознания своей способности к организации и проведению исследований сложных явлений на основе развития физической модели, создания на ее основе математической модели и проведения вычислительного эксперимента на компьютере.

Вычислительные алгоритмы, используемые в рассматриваемой математической модели изучаемого явления, весьма просты и сводятся к составлению программ, позволяющих строить графики введенных функций и проводить решение соответствующего дифференциального уравнения.

## НАШИ АВТОРЫ

*Кондратьев Александр Сергеевич,  
заведующий кафедрой методики обучения физике РГПУ им. А.И. Герцена,  
доктор физ.-мат. наук, профессор,  
действительный член РАО.  
Филиппов Михаил Эдуардович,  
аспирант РГПУ им. А.И. Герцена.*