

## РАБОТА НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ СО СРЕДОЙ "VERIFIER"

### 1. Обучение в процессе диалога.

Значительную роль в общении ученика с учителем играет творческий диалог - обмен предположениями, указаниями, уточнениями...

Этот диалог может быть, например, таким, как на страницах 62-63 [1].

Для поддержания диалога преподаватель должен предусмотреть типичные ошибки, "подводные камни", на которые может наткнуться ученик, решая данную задачу, должен, наконец, соответствующим образом реагировать на ошибки. Может ли компьютер хотя бы в некоторой степени заменить преподавателя или помочь ему?

### 2. Компьютер в роли преподавателя.

Компьютерное средство "Verifier" (от английского слова "verify" - "проверять") создавалось для того, чтобы в той или иной степени взять на себя роль учителя в только что продемонстрированном процессе "совместного творчества". Ученик вводит ответ с клавиатуры, а роль "судьи в мантии" играет компьютер.

Какие средства для общения в этой ситуации есть у ученика и какие у компьютера?

В распоряжении ученика так называемая виртуальная клавиатура, с помощью которой можно вводить ответ в общепринятой форме (сейчас вы увидите это на примере числовых интервалов). Дополнительные возможности может дать блокирование некоторых кнопок при составлении задачи. Например, требуется упростить выражение с корнями, дробями, степенями, а ученику доступны лишь кнопки для ввода чисел. Ему, конечно, придется упрощать выражение (при наличии всех кнопок он мог бы в качестве ответа ввести... условие задачи!).

Но самое интересное, что и как может ответить компьютер? Возможностей здесь несколько. Во-первых, он указывает контрпример, демонстрирующий неполноту ответа (указаны не все числа) или его избыточность (в ответе содержится что-то лишнее.) Во-вторых, ученик видит демонстрацию контрпримера на рисунке, часто с графиками функций. Наконец, после 2-3 неправильных ответов программа, "заметив", что ученик ошибся не впервые, начинает подсказывать. Да и "ответ" программы в зависимости от ошибки ученика может изменяться.

В программе предусмотрены следующие типы ответа:

- 1) число;
- 2) числовой интервал;
- 3) числовой вектор (упорядоченный набор чисел, например, "введите координаты точки на плоскости");
- 4) множество (набор чисел, порядок которых не важен - такой тип ответа удобен, например, для уравнений);
- 5) предикат (логическое высказывание; например, для задачи "укажите необходимые и достаточные условия того, что квадратный трехчлен с коэффициентами  $a$ ,  $b$  и  $c$  положителен всюду на вещественной оси" верным ответом будет " $a > 0 \& (b^2 - 4ac < 0)$ ";
- 6) функция (здесь ответом служит выражение, зависящее от переменной; например, для задачи "приведите пример нечетной функции, обращающейся в ноль при  $x=1$ ", верным ответом будет и  $\sin(\pi x)$ , и  $(x-1)x(x+1)$ , и многие другие функции).

Какие же сюжеты из школьной программы можно охватить компьютерным средством «Verifier»?

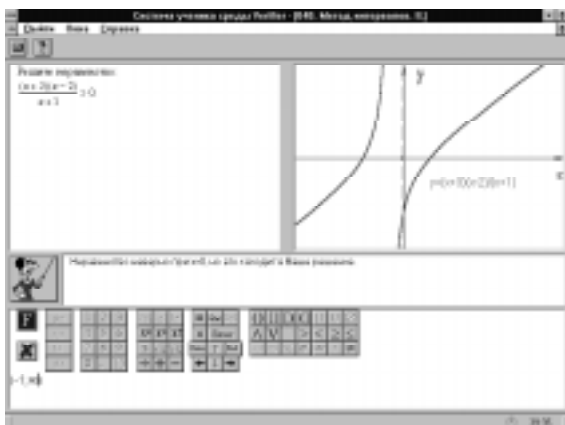
Прежде всего это обычная школьная арифметика: делимость, остатки при делении, основная теорема арифметики. Уже в режиме «число» может получиться содержательный диалог, подобный тому, с которого начинается статья.

Еще одна тема, раскрывающая возможности программы, - уравнения и неравенства. Здесь находят применение и графики, и контрпримеры. В частности, программа указывает на неполноту или избыточность ответа, используя график функции.

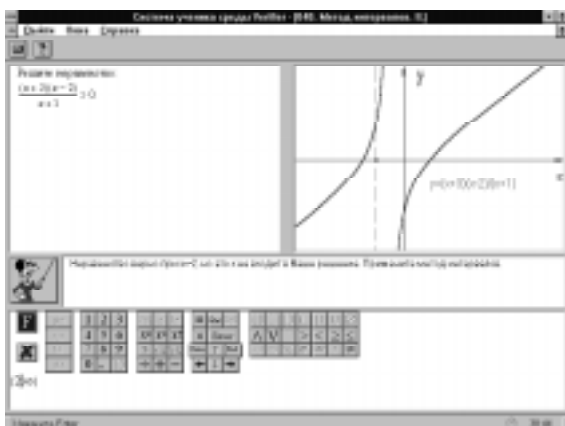
**Пример решения неравенства.**



Программа указывает на то, что не весь ответ ученика содержится в области допустимых значений, и приводит пример значения  $x$  ( $x = -1$ ), при котором знаменатель дроби  $y = \frac{(x + 3)(x - 2)}{x + 1}$  обращается в ноль.



Программа указывает на то, что при некоторых  $x$  из ответа ученика неравенство неверно, и приводит пример такого числа. Контрпример:  $x = 0$ . Это обстоятельство проиллюстрировано с помощью графика функции  $y = \frac{(x + 3)(x - 2)}{x + 1}$ . Абсцисса точки на оси  $OX$ , через которую проходит вертикальная штриховая линия, равна значению  $x$  контрпримера, то есть  $0$ .



Программа указывает, что ученик ввел не все значения  $x$ , при которых неравенство верно, и также приводит соответствующий пример ( $x = -2$ ), иллюстрируя его на графике функции  $y = \frac{(x + 3)(x - 2)}{x + 1}$ .

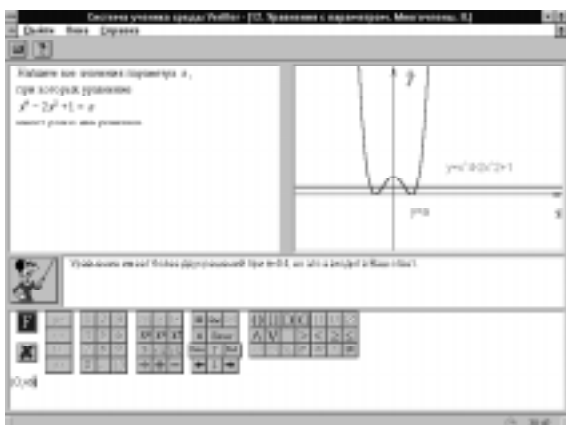
Кроме того, программа, "заметив", что ученик ошибся не впервые, начинает подсказывать: "Примените метод интервалов".



Ученик в конце концов нашел верное решение  $(-3; -1) \cup (2; \infty)$ , и программа одобрила его ответ: "Хотя и не сразу, но Вы решили задачу".

К этой теме прилегал еще один сюжет: уравнения и неравенства с параметром, исследование свойств функций. В этом случае ученик может увидеть на рисунке взаимное расположение графиков, поведение функций на бесконечности, количество корней и многое другое. Ученик имеет возможность проследить за изменением этих показателей в зависимости от значений параметров.

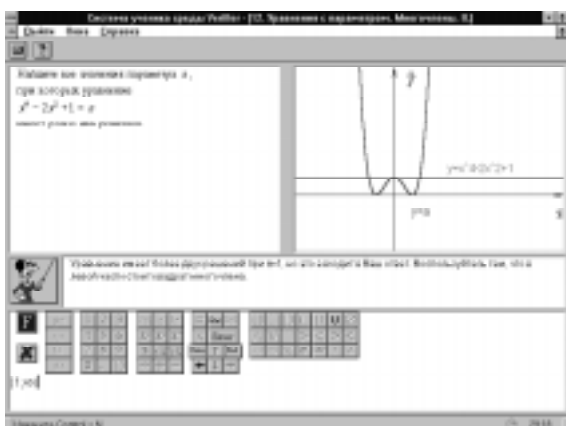
**Пример решения уравнения с параметром.**



Программа указывает на избыточность ответа  $(0; \infty)$  и приводит пример параметра  $(a = 0.4)$ , для которого графики функций

$y = x^4 - 2x^2 + 1$  и  $y = a$  имеют более двух общих точек.

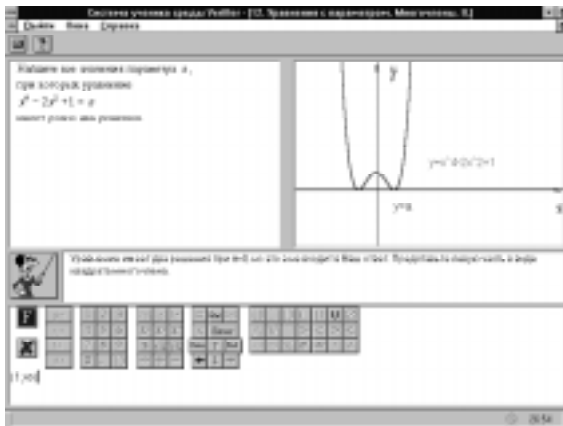
Это обстоятельство хорошо видно на приводимых программой графиках.



Программа указывает на избыточность измененного ответа  $[1; \infty)$  и снова приводит пример параметра  $(a = 1)$ , для которого графики функций

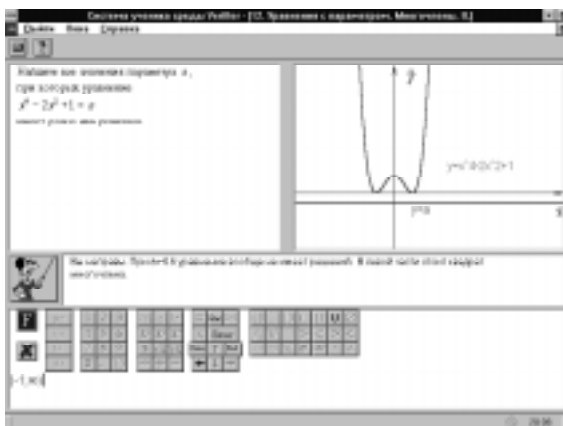
$y = x^4 - 2x^2 + 1$  и  $y = a$  имеют более двух общих точек.

Это обстоятельство также проиллюстрировано на графиках функций. Кроме того, "заметив", что ошибка допущена не впервые, программа выдает подсказку.



Программа указывает на неполноту ответа  $(1; \infty)$  и приводит пример значения параметра ( $x = 0$ ), для которого условие выполнено и которое не входит в ответ ученика. Это также проиллюстрировано на графиках функций

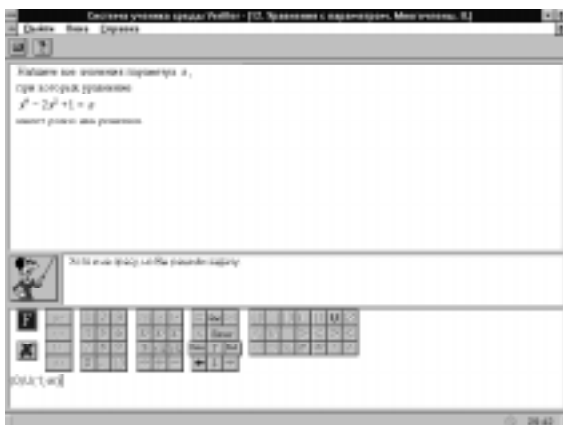
$$y = x^4 - 2x^2 + 1 \text{ и } y=a.$$



Анализируя ответ  $[-1; \infty)$ , программа напомнила ученику, что при отрицательных значениях параметра (например, при  $a = -0.6$ ) графики функций

$$y = x^4 - 2x^2 + 1 \text{ и } y=a$$

вообще не имеют общих точек.



Ученик в конце концов нашел верное решение  $\{0\} \cup (1; \infty)$ , и программа одобрила его ответ: "Хотя и не сразу, но Вы решили задачу".

Наконец, можно составлять тестовые задачи (типа “Перечислите номера верных утверждений из данного списка”), и проверка ответа в этом случае не очень сильно отличается от проверки ответа к уравнению: “Вы напрасно ввели номер такой-то, потому что...”, или “Вы указали не все верные ответы”. Здесь также можно воспользоваться подсказками и иллюстрациями.

В чем же особенность такой системы общения с учеником? Прежде всего в том, что информация, которую получает ученик, в значительной степени зависит от того, какую



Найдите наименьшее натуральное число, которое при умножении на 6 становится точным квадратом, а при умножении на 40 - точным кубом.



Понятно, что в этом разложении должны быть двойки, тройки и пятерки - эти множители входят в 6 и 40. Других не надо - число не будет наименьшим. При добавлении 6 ( $2 \cdot 3$ ) получается квадрат. Значит, 2 и 3 возьмем в первой степени. При добавлении 40 получится куб.  $40 = 2^3 \cdot 5$ ;  $2^3$  уже есть. Значит, не хватает  $5^2$ .

Рассмотрите разложение искомого числа на простые множители. У квадратов все простые множители стоят в четных степенях, у кубов - в степенях, кратных 3.

Не знает, как подступиться к задаче.



$$2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

Вы близки к решению. Но, к сожалению, при умножении на 40 Ваше число не будет кубом. Например, 2 будет в степени 4, а 4 не делится на 3.

При умножении на 40 не получится куба - например, степень двойки не будет кратна трем.



Да, ведь 40 дает в разложение 3 двойки... Значит, надо взять  $2^2$  тогда получится  $2^5$ , а  $6:3$ .



$$2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

Значит, надо позаботиться и о квадрате, и о кубе. 2 должна быть в такой степени  $k$ , что  $k+1:2$ , а  $k+3:3$ . Наименьшее такое число - 3.

Увы, теперь при умножении на 6 Вы не получите квадрата: двойка будет в степени 3, а 3 не делится на 2.

Теперь при умножении на 6 не получится квадрата.

Хорошо, Вы разобрались со степенями 2 и 5. Осталось найти степень тройки.

При умножении на 40 не получится куба из-за степени тройки.

Отлично! Теперь при умножении на 6 получим  $2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^2$  - квадрат  $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ , а при умножении на 40 -  $2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^3 = (2^2 \cdot 3 \cdot 5)^3$ . Задача решена.

Теперь все верно.

Так, 3 должна быть в такой степени  $t$ , чтобы  $t+1:2$ , а  $t:3$ . Наименьшее такое  $t$  - 3.

2<sup>3</sup> · 3 · 5<sup>2</sup>

2<sup>3</sup> · 3<sup>3</sup> · 5<sup>2</sup>







ошибку он сделал. Например, если в приведенной выше задаче о нечетной функции, обращающейся в ноль при  $x=1$ , ученик введет функцию  $y=\cos(x)$ , то программа укажет на то, что функция по условию должна быть нечетной, а если он введет  $y=x$ , то замечание будет уже по другому поводу - график функции не проходит через точку с координатами  $(1; 0)$ . Еще один пример - решение уравнения  $(x^2 - 3x)^2 + x^2 - 3x - 2 = 0$ . Множество корней состоит из четырех элементов, а если ответ ученика не удовлетворяет условию, программа указывает на это, предлагая посмотреть на график и обратить внимание на количество корней. Далее, все корни должны лежать на отрезке  $\left[-\frac{5}{6}, 11\right]$ , о чем тоже легко напомнить с помощью графика, если на оси абсцисс выделен соответствующий отрезок. Далее, среди корней должно быть число 1 (при ошибке можно напомнить ученику, что корень  $x=1$  можно и угадать). Кроме того, по обобщенной теореме Виета произведение корней многочлена равно свободному члену, в данном случае это  $-2$ , на что тоже можно указать. И только после этого программа перейдет к предъявлению контрпримеров.

Конечно, перечисленные условия и порядок, в котором они проверяются, зависят от того, как составлена задача.

Еще одна особенность - указание на ошибку через контрпример и его демонстрацию на графиках функций. Если компьютер не может заменить живое объяснение учителя, то в рисовании графиков, тем более зависящих от параметра, программа возьмет реванш.

И, наконец, у задачи может быть не один, а сразу много верных ответов, что мы только что видели на примере задачи о нечетной функции.

Программа разрабатывалась с целью преподавания математики, но оказалось, что ее можно использовать с не меньшим успехом и для других предметов. Например, ответ в виде числа, интервала, предиката и даже функции возможен в задачах по физике, химии, экономике... В этих случаях доступны и контрпримеры, и иллюстрации, и графики. Все зависит от фантазии составителя.

Конечно, компьютер не в состоянии полностью заменить человека. Но взять на себя часть его работы - почему бы нет? Во многих областях дело обстоит именно так - компьютер работает вместе с человеком, но не вместо человека.

Естественно, "педагогические способности" компьютера зависят от тех, кто разрабатывает программу, но сценарий обучения один и тот же: диалог ученика с компьютером. Ученик вводит ответ, а компьютер, анализируя этот ответ, советует, объясняет - в общем, преподает. И чем интереснее, плодотворнее диалог, чем больше у ученика возможностей проверить и расширить свои знания, тем лучше программа.

При всех недостатках компьютера как преподавателя он обладает как минимум двумя преимуществами перед человеком. Во-первых, обучение на компьютере - это нестандартный способ преподавания стандартного материала, и эффект от "незнакомомого в знакомом" в сочетании с интересом к компьютеру может, как показывает опыт, прибавить энтузиазма. Во-вторых, компьютер создает хорошую психологическую обстановку за счет объективности своих оценок. Он не обижается, не срывает раздражение на попавшем "под горячую руку". Он будет терпеливо подсказывать столько раз, сколько надо ученику, и не назовет его болваном даже после десятка неудачных ответов. Он не поставит две разные отметки за одинаковые работы (правда, и "списывания" не заметит...).

Расскажем немного об интерфейсе программы. Перед учеником появляется библиотека задач (см. рисунок на третьей странице обложки). Задачу можно вызвать двойным щелчком "мыши" по соответствующей строке или нажатием клавиши "Enter", если курсор находится на нужной задаче (выделенную строку можно перемещать клавишами с вертикальными стрелками). Образцы диалогов ученика с программой приведены в начале статьи.

А теперь представим, что урок закончился. Ученик с чем-то справился сразу, с чем-то не сразу, а с чем-то не справился совсем. Может ли учитель посмотреть, чем ученик занимался на уроке и каковы его успехи?

Конечно, может. Для этого предназначена Teacher System, с помощью которой учитель в начале урока выдает задание и может по своему выбору установить форму отчета (см. рисунок на третьей странице обложки). Отчет может быть полным (все сообщения, которыми обменивались ученик с компьютером) или кратким (перечень задач, за которые принимался ученик, с указанием по каждой из них количества попыток, затраченного времени, и, естественно, - решена ли задача). Конечно, некоторые задачи могут остаться нерешенными.

Помимо формы отчета, учитель может установить режим контрольной работы, - в этом случае программа вместо подсказок и графиков будет выдавать одно из двух сообщений: “Ответ верен” и “Ответ неверен”. Если же урок проходит в дисплейном классе с несколькими учениками, то учитель может завести отчет на каждого из них, выдать каждому из них свое задание и по ходу урока наблюдать, как изменяются отчеты и не пора ли помочь кому-нибудь из учеников. Тем самым, Verifier помогает учителю.

Урок для ученика завершается либо по истечении установленного учителем времени, либо щелчком “мыши” по команде “Выйти” в верхней части экрана.

### **3. Первые ученики электронного учителя.**

В январе - мае 1997 года около 60 учеников школы N597 осваивали одну из промежуточных версий программы Verifier.

Программа разрабатывалась уже несколько лет, но для проведения уроков в школе использовалась впервые. Занятия проводились прежде всего с целью посмотреть реакцию на программу со стороны тех, для кого она в первую очередь предназначена, - в данном случае учеников 7-х и 10-х классов. Причем, в условиях, максимально приближенных к школьному уроку.

Основным результатом занятий можно считать то, что доказана сама возможность проведения урока математики на компьютере. Многие ребята (к сожалению, не все) пошли навстречу нововведению, некоторые оставались позаниматься после шестого урока. Ученики быстро нашли общий язык с программой - даже если раньше не очень хорошо знали Windows. В некоторых классах уроки математики на компьютере с программой, впервые используемой для этой цели, в течение всего полугодия проходили лучше, чем можно было ожидать. Даже если в каком-то классе математика не в почете - все равно ученики будут заниматься, хотя бы из интереса к компьютеру. Правда, на все полугодие энтузиазма может и не хватить.

В каждом из классов было проведено анкетирование. Перед вами подборка ответов на тему “Не красота, но правда”.

*Считаете ли Вы, что решать задачи на компьютере удобнее, чем без компьютера?*

В большинстве анкет ответ положительный (“Да, потому что можно узнать, правильный ли ответ, и есть подсказки”, “Интересней и наглядней работать”, “Я думаю, что компьютер не только дает новую информацию, но и помогает понять математику”, “Я в первый раз на таком компьютере, как IBM, увидел такую хорошую программу”, “Хорошая графика, удобно пользоваться”, “Мне кажется, что здесь все делается очень просто, и интересно, она очень удобна в обращении”), но иногда - с оговорками (“Думаю, что да, но, с другой стороны, на нем нельзя делать черновую работу, и это создает неудобства”).



Дают ли Вам дополнительную информацию подсказки и графики функций?

Как и на предыдущий вопрос, ответ в большинстве случаев положительный (“Дают, и это очень хорошо”, “С рисунками освоение программы легче”, “Подсказки наводят на ответ”), но иногда с оговорками (“Мне они дают не очень много информации, но в отдельных случаях помогают разобраться с чем-либо непонятным”, “Хорошо, что можно получить подсказку, но подсказки можно было бы сделать поподробнее”).

Какие изменения Вы могли бы предложить к программе и ее применению?

Здесь встречались самые разные ответы - начиная с “Лучше бы оставить все как есть” до различных интересных наблюдений. Например, “Надо включить ответ” (имеется в виду возможность “капитуляции” с тем, чтобы узнать ответ). “Хорошо бы сделать так, чтобы можно было решать не на листе, а под заданием” (действительно хорошо, но как это сделать?). “Я считаю, что программа хорошая, но надо сделать разделение на тренировку (с подсказками) и экзамены (без подсказок)” (Такая идея была реализована в следующей версии программы, но ученик этого, естественно, не знал, и догадался самостоятельно).

Но главное, конечно, не анкетные отзывы, а то взаимопонимание, которое многие ребята нашли с *Verifier’ом*.

**4. Возможное использование программы.**

- 1) преподавание школьного предмета на компьютере;
- 2) самостоятельная подготовка (репетитор, занятия для наверстывания упущенного в случаях, когда ученик не имеет постоянных контактов с учителем);
- 3) в исключительных случаях программа может даже заменить учителя, поскольку (по крайней мере, в “математической” реализации) рассчитана и проверена на традиционной школьной программе;
- 4) “дистанционное обучение”, когда ученики и учитель далеко друг от друга.

**Литература.**

1. Поздняков С.Н., Рисс Е.А. Сюжеты исследования по математике с компьютерной поддержкой и без... (книга выйдет в свет во II кв. 1998 г.)

**НАШИ АВТОРЫ**

*Иванов Сергей Георгиевич, методист  
ЦПО "Информатизация образования"*