Рыжик Валерий Идельевич

КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

Боюсь, я слишком долго недооценивал компьютеры, считая их разве что большим арифмометром. Все перевернулось как-то в одночасье. Однажды на моих глазах компьютер моментально, буквально в доли секунды, разложил на множители выражение n^4+4 (во многих задачниках соответствующее утверждение названо теоремой Софи Жермен) - задание, которое я обычно предлагал на школьных олимпиадах. Затем оказалось, что он может взять производную, найти первообразную...

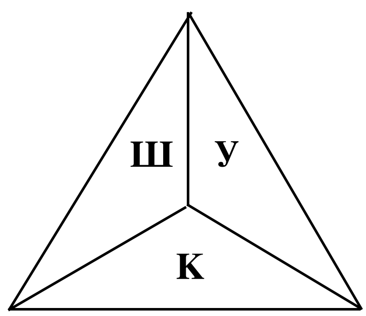
Теперь, спустя несколько лет после внезапного прозрения, у меня уже есть небольшой опыт использования компьютера в реальном математическом образовании, именно:

1. Использование пакета “Derive” (10-11 классы; занятия проводились один раз в неделю по одному часу в компьютерном кабинете - 11 персональных компьютеров типа IBM-486; класс для проведения занятия делился пополам).
2. Использование микрокомпьютера TI-92 (9-ый класс; в первом полугодии - два часа в неделю, во втором полугодии - на каждом уроке алгебры и начал анализа; занятия проводились в обычном кабинете - один микрокомпьютер на двух учеников).
3. Создание демонстрационных образцов - фрагментов компьютерного учебника геометрии.
4. Использование для контроля специально созданной батареи тестов в компьютерном варианте.

Даже такой скромный опыт убедил меня в том, что в нашем деле - преподавании математики в школе начинается (началась) “ползучая революция”. Ее главная движущая сила - компьютерные технологии и программные средства. Я убежден: когда каждый школьник будет иметь выход на компьютер, многие вековые задачи преподавания математики разрешатся чуть ли не автоматически.

И не героические усилия “новаторов”, доступные, по мнению чересчур восторженных журналистов якобы всем, не появление очередного “чудо-метода” (а сколько их было на моей памяти...), не очередные потуги реформаторов образования очередной перетасовкой системы сделать невозможное возможным, а небольшая “железка” - грандиозное достижение человеческого интеллекта - сдвинет наше дело от болтовни "по поводу" к реальным достижениям, как продвинул его в свое время печатный станок. Не раз я слышал, однако:” А если компьютер выйдет из строя, что тогда? Ваш ученик не сможет решить даже простенькое уравнение!” Вопрос и смешной, и серьезный одновременно. Почему смешной - ясно. Каждый день где-нибудь ломается телевизор, так его чинят. А серьезный - потому что порождает важную методическую проблему: выделение минимального круга математических идей, который дает достаточно современное представление о математике. Несмотря на такое отношение к компьютеру, я далек от мысли, что вместе с ними в школу придет учительский и ученический рай. Математическое образование станет другим, более человечным, что ли, ибо разные скучные задачи попросту исчезнут. Многие нынешние проблемы преподавания канут в лету, но появятся новые, не менее сложные. Будут учить другому и иначе - это да. В чем - другому? Как - иначе? На эти вопросы придется отвечать уже в следующем веке.

А теперь - поподробнее о своем опыте. Его осмысление привело меня к такой картинке:



Она отражает, попросту говоря, список "действующих лиц" в учебном процессе: Ш - школьник, У - учитель, К - компьютер (список, ясно, неполон, но для нашей

В преподавании математики в школе начинается "ползучая революция".. Когда каждый школьник будет иметь выход на компьютер, многие вековые задачи преподавания математики разрешатся чуть ли не автоматически.

проблематики достаточен). Мне удалось увидеть некие связи между "действующими лицами", и я попытаюсь их проиллюстрировать собственным опытом.

1. Учитель - компьютер

Спросим себя: а что, собственно, меняется в работе учителя, использующего компьютер в работе со школьниками? Ответ будет длинный.

1.1 Меняется содержание заданий. В самом деле, может ли быть заданием решение уравнения, нахождение производной, вычисление интеграла, построение графика, разложение на множители и многое другое, если все это за секунды - время набора задания на клавиатуре - "делает" компьютер? ("Делает", разумеется, не компьютер, а та математика, которая в него заложена, но так проще говорить). Если и да, то не надолго. Значит, в идеале надо подобрать такие задания, в которых беспомощны как школьник без компьютера, так и компьютер без школьника. Мне нравится говорить о сочетании "белкового и компьютерного интеллектов" - эту красивую фразу я могу расшифровать, и далее будет приведено несколько примеров такой расшифровки.

Пример. Появляется возможность проведения вычислительных экспериментов типа: а) число 444...4888...89 (в нем n четверок и n-1 восьмерок) является точным квадратом; сначала проверить при конкретных значениях n, затем доказать; б) убедиться в расходимости гармонического ряда; сначала выяснить, что некая его частичная сумма может быть больше, к примеру, 1000, а затем и доказать.

1.2. Меняются акценты в преподавании. Становится важным не только то (а может быть, просто не то), что было таковым ранее. Вот нарочитый пример. Пусть надо решить уравнение $x^2 = 1000x$. Предположим, школьник выводит на экран графики левой и правой части. В обозримых пределах окна дисплея (например, от - 5 до 5) он увидит одну только точку их пересечения, соответствующую x = 0. Чтобы найти вторую точку их пересечения, соответствующую x = 1000, он должен знать, что она существует. В более замысловатом примере к аналогичному знанию ещё надо придти. Значит, важно откуда-то знать, сколько корней имеет данное уравнение, а потому при изучении свойств функций требуется повышенное внимание к исследованию их монотонности и поведению на бесконечности.

Еще пример - очень сильный. Пропадает необходимость в решении неравенств типа $f(x) > 0$, ибо для этого достаточно иметь график функции $f(x)$ и по нему уже отыскать на экране ее нули - дальнейшее очевидно.

1.3. Меняется содержание теоретического курса. Было бы странно, если бы ученики смотрели на компьютер как на фокусника. Пусть, к примеру, компьютер выдал все решения уравнения пятой степени. Я не знаю, как он это сделал, могу только предполагать, но я объясню ученикам, как он мог бы это сделать. Если эту мысль развернуть, то несложно представить появление в школе курса "компьютерной математики", ориентированной на то, чтобы работа компьютера (еще раз оговорю - программных средств) не была для школьников загадкой. Потребуется хорошо рассказать детям об алгоритмах, итерациях, приближениях, погрешностях...

Здесь же отмечу чрезвычайно важное обстоятельство. Компьютер может сэкономить массу времени при изучении канонического курса математики. На что употребить оставшиеся часы? Если на математику, то имеет смысл заняться изучением многих важных вещей, которые компьютеру не под силу или не нашедших до сих пор достойного места в школьной программе. Еще проще отвести освободившиеся часы на геометрию. Но, быть может, - с более общих позиций - сократить учебную нагрузку ребенка и дать ему возможность самому распорядиться оставшимся временем? Говоря это, я наступаю на собственное горло - вот бы рассказать детям что-нибудь этакое... Но не лучше ли дать им возможность поваляться на травке?

1.4. Меняются методические приемы учителя. Появляются новые проблемы: что доверить компьютеру, что дать самому, когда и как “подключить компьютер к школьнику”?

Пример 1. Одно дело - я в 8 классе показываю, как по формуле решается квадратное уравнение, и понятно, некоторое число таковых (какое?) ученик должен сделать “вручную”. Другое дело - на выпуске из школы он может позволить себе для такого же уравнения роскошь нажатия кнопок на клавиатуре компьютера. Так в какой момент “переключить рубильник”?

Замечу, что решение таких маленьких чисто методических задач идет постоянно, а потому - размышляешь, пробуешь, ошибаешься и радуешься, когда “попадаешь в точку” - в конечном счете обогащается профессиональный опыт.

Пример 2. Компьютер выдает рисунок. Если это график функции, то экстремумы “видны”. Ученик может это использовать (где-то). Ну, а если экстремумы “не видны” - так бывает, если шкала довольно мелкая. Переходить к более крупной шкале? Но ведь так можно действовать долго. В какой момент ученик может написать, что экстремумы отсутствуют?

Пускай теперь нужна кривая, заданная параметрически, скажем $x = \cos t$, $y = \sin t$. На дисплее высвечивается замкнутая линия, и ученик решил, что она настолько похожа на окружность, что и есть таковая. На этом ему можно остановиться?

Пример 3. Решается уравнение $e^{\sqrt{x}} = 2$. Компьютер выдает ответ в виде десятичной дроби. Этого достаточно? Не надо ученику писать, что $x = (\ln 2)^2$? А если он показывает периодичность графика и в качестве периода выдает нечто вроде 1,5707863... - кого это устроит?

1.5. Необходимо личное понимание, что есть компьютер на уроке математики. Галочка для начальства? Игрушка для учеников? Суперлогарифмическая линейка? Видел я как-то карикатуру: ученик, приложив компьютер к листу бумаги, очерчивает с его помощью прямую. Вопрос не простой, и я не думаю, что пришел к окончательному ответу. Пока - так: компьютер - это как прибор для физика. Можно и без него, но получится хуже или дольше. И этот прибор может отвечать на достаточно серьезные вопросы. Значит, школьника надо научить задавать такие вопросы и верно интерпретировать полученные ответы. Таковая интерпретация возможна только тогда, когда есть нечто ожидаемое в качестве ответа. Если при аналитическом решении кубического уравнения компьютер выдает два корня, то что с этим делать дальше?

2. Школьник - компьютер.

2.1. Что изменится для ученика? Умение задать грамотный вопрос, верно истолковать полученный результат, понимание того, как компьютер мог бы решить данную задачу - всё это приводит к росту математической культуры школьника.

Компьютер может сэкономить массу времени при изучени канонического курса математики. Быть может, сократить учебную нагрузку ребенка и дать ему возможность самому распорядиться оставшимся временем?

Пример 1. Пусть требуется решить уравнение $\sin x = 0{,}5$. Я могу решить его графически с помощью компьютера на разных промежутках: $[0;\ 0{,}5\pi]$, $[0;\ \pi]$, $[-0{,}5\pi;\ 0{,}5\pi]$ и т.д. Выбор промежутка обусловлен пониманием задачи в целом.

Пример 2. Отсутствие такого понимания я видел в одной хорошей американской школе. Студенты лихо строили на графических калькуляторах графики кривых второго порядка. И когда я предложил им построить график уравнения $x^2+y^2=a$, они сразу же начали жать на кнопки.

В процессе работы с компьютером ученики начинают улавливать особенности работы используемого программного пакета и со временем приноравливаются к ним.

Пример 3. Попросим компьютер построить в стандартном окне (от - 10 до 10 или что-то подобное) график функции $y=\dfrac{1}{x-1000}$. И что же увидим? Прямую...

Пример 4. Иногда компьютер выдавал ответ в уравнении в виде 1/0. Как это толковать?

2.2. Как должен восприниматься компьютер школьником ? Разумеется, как его учителем. Но есть еще момент. К учителю математики школьник имеет по части математики доверие практически безграничное. С компьютером так не получается, ибо компьютер не всегда делает то, что нужно, и не всегда делает правильно. Вот примеры. (*От редактора: напоминаем, что все перечисленные примеры относятся к возможностям программы Derive; "компьютер" следует читать как "программа Derive".*)

1. Компьютер плохо справляется с тождественными преобразованиями. Почему? Ясно. А что такое, собственно, “упростить”? Как формализовать такое задание?

2. Компьютер не “работает” с двумя модулями, например, не может выдать аналитического решения уравнения типа
$|x - 1|+ |x - 3| = 2$.

3. Компьютер не выдает аналитических решений уравнений с обратными тригонометрическими функциями.

4. При решении уравнения $\sin x = 0$ на промежутке [10;20] компьютер выдает не все ответы.

5. При решении уравнения
$(1+ \cos x) (\operatorname{cosec} x-1) = 0$ компьютер выдает в качестве одного из корней число π.

6. При решении уравнения

$$\lg_2(x+5)\lg_3(3-x)\sqrt{(x+5)(3-x)}=0$$

компьютер выдал один из ответов такой: x=-5.

7. При решении уравнения

$$x+\sqrt{x(-5-x)}=1$$

компьютер не выдает корень -0,5.

8. Компьютер не может вычислить некоторые пределы функций и последовательностей, например такие

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+4+2^x}{x^2+x+1+2^x},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!+(n+1)!}{(n+2)!+(n+3)!}$$

8. При вычисления предела

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt[3]{8x^3+x}}{\sqrt{x^2+5}}$$

ответ был выдан вовсе странный, именно - $\sqrt{3}$.

2.3. В процессе работы с компьютером ученики начинают улавливать особенности работы используемого программного пакета и со временем приноравливаются к ним. Учитывая “своенравие” компьютера, ученик должен овладеть искусством “прикидки”: на дисплее еще нет графика, а ученик уже должен его “видеть”. Именно “видеть”, а не строить, иначе пропадает весь смысл работы с компьютером. Тренировке такого “видения” стоит посвятить много времени. Задание выглядит так: ученикам дается ряд функций, за определенное (весьма небольшое) время они должны нарисовать эскизы их графиков, а затем проверить полученные результаты с помощью компьютера.

2.4. Можно ли освободить ученика от владения техникой? В принципе - нет, но в таком объеме, как она требуется сейчас - бесспорно.

И теорию равносильности, и получение ответов типа $x = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ (я уже не говорю о монстрах вида $x = \lg_3 7$) можно спокойно похоронить, если работаешь с компьютером. Такого рода записи чисел важны в некоторых теоретических вопросах, например, число вида $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ взято из "золотого сечения". И только. Ученик должен владеть методом разве что в простейших ситуациях или только иметь представление о нем. Но виртуозность в решении логарифмических уравнений - это в конечном счете "выкинутые на воздух деньги налогоплательщика". И сколько детского времени убито впустую...

2.5. Важно учитывать, что программные средства разнятся и совершенствуются. Поэтому важно усвоение компьютерной идеологии, глубокое понимание того, что и как он делает в принципе, независимо от того, с каким конкретным программным обеспечением имеем дело.

3. Школьник - учитель.

Какие же возможности дает компьютер для учителя в непосредственной преподавательской работе?

3.1. Оперативный контроль. Имея заранее готовые батареи тестов, можно практически моментально определять уровень знаний учеников и отыскивать в них пробелы. Разумеется, такой вид контроля не стоит делать единственным. Но его преимущества в скорости и экономии времени очевидны.

3.2. Электронный учебник. Такой учебник не является механическим перенесением на экран дисплея некоего теоретического текста. Напротив, он может моделировать деятельность любого учителя. Теорема Пифагора, к примеру, появляется перед школьником не как пункт или параграф теории, а в живом представлении, таком, которое устраивает конкретного учителя, ведущего урок на эту тему. Но при этом к любому учебному фрагменту ученик может получить доступ когда захочет и сколько угодно раз. Понятно, какое значение этот фактор может иметь для детей, пропустивших занятие и тем более для тех, кто долгое время не имеет возможности ходить в школу.

Компьютер позволяет оживить перед школьником мир геометрических фигур, причем показать их происхождение, становление в динамике. Например, квадрат получается движением отрезка параллельно самому себе в соответствующем направлении. Я полагаю, что с помощью компьютера можно выстроить особый курс геометрии ("динамическая геометрия"), который будет более близок ребенку особенно в начале курса.

Еще одна особенность такого учебника - очень важная - возможность для школьника работать с компьютером в интерактивном режиме, то есть в диалоге. Например, можно спросить себя: " А что будет, если...?" и с помощью компьютера себя проверить.

3.3. Компьютер позволяет учителю эффективно организовать исследовательскую деятельность школьника.

Пример 1. Нас интересует влияние параметра на ход кривой. Всего за один урок можно получить полное об этом представление. Вот какие кривые я предлагал для исследования своим ученикам реально:

$y = x^3 - ax$, $y = ax + x^{-2}$, $y = x + ax^{-2}$, $y = \cos x \cos ax$, $r = a^{\varphi}$ (в полярной системе координат, $a > 0$).

Пример 2. Мне удалось познакомить учеников со многими кривыми третьего и четвертого порядков, что без компьютера я никогда не делал. Появление графика с самого начала исследования такой кривой направляло всю дальнейшую работу ученика. В том-то и дело. Если при "нормальном" ходе работы мы по уравнению кривой сначала ищем ее свойства, а в финале рисуем картинку, то теперь все переворачивается: глядя на картинку, ученик начинает "видеть" то, что ему надо доказывать. Более общо - он начинает продуцировать гипотезы. И бывало так, что никакая аналитика не подсказывала ему то свойство кривой, которое он узрел на дисплее. Например, изучается частный случай декартова листа, уравнение которого $x^3+y^3=3xy$. Из картинки видно, что в первой четверти есть точка, наиболее удаленная от начала координат, что кривая симметрична относительно прямой $y=x$, что есть наклонная асимптота.

Случалось и так, что некоторые ученики самостоятельно придумывали темы для достаточно оригинальных исследований - математических или программистских.

Пример 3. Требуется выяснить, как влияет на график функции появление некой "добавки" (пусть другой функции). Простейший пример - "навешивание модуля" на перменную или на саму функцию. Другой пример - воздействие на функцию $\sin 1/x$ множителя x^n ($n\in$ N), то есть рассмотрение функции $y=x^n\sin(1/x)$. Еще интереснее подействовать функцией x^α ($\alpha\in$ R) и попытаться доопределить ее в нуле до непрерывной или гладкой. Такое задание я считаю в некотором смысле идеальным. Дело в том, что в окрестности нуля компьютер бессилен выдать что-либо разумное и "без головы" тут не обойтись в принципе.

Замечу, что в качестве "добавок" я использовал такие функции как e^x, e^{-x}, $\sin x$...

Пример 4. Пусть мы имеем несколько линейных функций: $f_1, f_2, \dots f_n$. Рассмотрим теперь такую :

$|f_1|+|f_2|+..+|f_n|$. Найти зависимость числа точек излома графика этой функции от n.

Пример 5. На дисплее - роза с уравнением в полярных координатах $r = \sin k\varphi$ при k - иррациональном закрашивает весь экран полностью. Так ли это на самом деле?

3.4. Довольно тонкое место - использование компьютера на самостоятельных, контрольных и экзаменационных работах. Не разрешать? А зачем же тогда учились этому? Разрешить? А что скажет "Марья Алексевна"? И не так все просто по содержанию. Однажды я провел небольшой эксперимент. Взял стандартную экзаменационную работу для математического класса и "дал ее компьютеру". Из шести задач пять он сделал за 10 минут. (Шестая была текстовой задачей и ее просто нельзя было предлагать) Отсюда ясно, что если компьютер разрешить, то придется менять содержание экзамена.

Первый такой (человек + компьютер, тобишь пакет "Derive") экзамен я провел в 10 классе. Ученики могли, получив вполне традиционное задание, сразу "выходить на компьютер" и брать с него ответ. Затем они должны были на бумаге придти к этому ответу. Другой вариант - решить задачу самому, а затем проверить результат на компьютере. Любопытно, что часть учеников предпочла вообще не обращаться к компьютеру, боясь потерять на этом время или не будучи уверена, что он сможет решить задачу или выдать верный результат.

В следующий раз девятиклассники работали на экзамене с "TI-92". Работа была фактически выполнена ими за 4 часа. Я просил их указать, где в процессе решения ими использовался компьютер. Приведу задачи этого экзамена.

1. $y(x)=2/(x^2+12x+36)+12/(x^2-36)$

1.1. Приведите $y(x)$ к виду $p/(q^2r)$, где $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ - двучлены.

1.2. Решите уравнение $y(x) = 1/(x-6)$.

1.3. Решите неравенство $y(x) \geq 0$.

1.4. Пусть N(a) - число корней уравнения $y(x) = a$ ($a\in$ R). Нарисуйте график N(a).

1.5. Имеет ли функция $y(x)$ экстремумы?

1.6. Равны ли площади криволинейных трапеций, ограниченных графиком $y(x)$ и осью x на любых отрезках [a, b] и [$-b$,$-a$],если $6 < a < b$?

2. $y(x)=(4|x|-x^2)^{0,5}$

2.1. Решите уравнение $y(x) = - x + 2$.

2.2. Решите неравенство $y(x) > - 5$.

2.3. Пусть N(a) - число корней уравнения $y(x) = a$ ($a\in$ R). Нарисуйте график N(a).

2.4. При каких значениях a решением неравенства $y(x) \leq a$ является отрезок?

2.5. Чему равна площадь, ограниченная графиком $y(x)$ и прямыми $y = x$ и $x = - 4$?

2.6. Найдутся ли такие точки на графике $y(x)$, что касательные к графику в этих точках взаимно перпендикулярны?

3. $y(x) = \cos(2x) + \cos(x) - 4\cos^2(x/2)$

3.1. Пусть $t = \cos x$. Докажите, что $y(x) = 2t^2 - t - 3$.

3.2. Решите уравнение $y(x) = -3$ на $[-\pi, \pi]$.

3.3. Докажите, что при любом $x \in R$ выполняется неравенство $y(x) \leq 0$.

3.4. Выразите $y((\pi/2 - x))$ как квадратный трехчлен от синуса x.

3.5. Существует ли такое значение x, при котором $y(x) + y((\pi/2 - x)) = 4$?

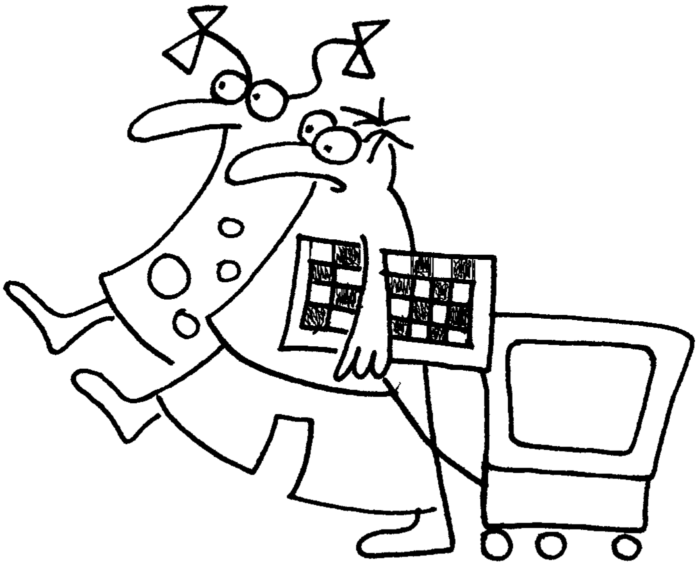
3.6. Пусть $y(x) = a$. Можно ли найти (то есть выразить через a) $y((\pi/2 - x))$?

3.5. Компьютер меняет качество диалога с учеником. Школьника уже не интересует, правильно ли он решил уравнение, его вопросы становятся куда более содержательными и гораздо более "математическими".

Несколько слов в заключение. Создание "компьютерной математики" - дело уже назревшее. Мне известно существование публикаций с такой тематикой. Необходимо однако объединение усилий - слишком велика проблема. Почему бы здесь, в Питере, этим не заняться?

Рыжик Валерий Идельевич,
учитель математики лицея
"Физико-техническая школа".

НАШИ АВТОРЫ



Улыбка художника