

ДИНАМИЧЕСКИЕ КООПЕРАТИВНЫЕ ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ МНЕНИЯМИ

Галиева Н. М.¹, бизнес-аналитик, shaihulova.n@gmail.com

Королёв А. В.², доктор физ.-мат. наук, доцент, danitschi@gmail.com

Угольницкий Г. А.³, доктор физ.-мат. наук, профессор, gaugolnickiy@sfnedu.ru

¹ ПАО «Татнефть» имени В. Д. Шашина,

ул. Ленина, д. 75, 423450, Альметьевск, Республика Татарстан, Россия

² Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»

им. В. И. Ульянова (Ленина), ул. Профессора Попова, 5, корп. 3, 197022, Санкт-Петербург, Россия

³ Южный федеральный университет, ул. Мильчакова, д. 8А, 344090, Ростов-на-Дону, Россия

Аннотация

В статье рассматриваются динамические кооперативные теоретико-игровые модели управления мнениями на сетях. Предполагается, что на этапе анализа оргграфа влияний выделены его сильные подгруппы, и управленческие воздействия оказываются только на членов этих подгрупп, определяющих все устойчивые финальные мнения. Мнение агента интерпретируется как его затраты на покупку товаров (услуг) некоторой фирмы. Показано, что при модельных предположениях характеристические функции Неймана-Моргенштерна, Петросяна-Заккура и Громовой-Петросяна совпадают. Найден вектор Шепли для этой единой характеристической функции, показана его динамическая неустойчивость и построена процедура распределения дележа. Проведено сравнение компонент вектора Шепли с выигрышами игроков при различных формах некооперативного поведения.

Ключевые слова: вектор Шепли, динамические кооперативные игры, модели влияния и управления на сетях, неэффективность равновесий.

Цитирование: Галиева Н. М., Королев А. В., Угольницкий Г. А. Динамические кооперативные теоретико-игровые модели управления мнениями // Компьютерные инструменты в образовании. 2025. № 1. С. 5–26. doi:10.32603/2071-2340-2025-1-5-26

1. ВВЕДЕНИЕ

Базовая модель влияния в социальной группе впервые рассмотрена в [1, 2] и более детально изучена в [3]. Дальнейшие результаты приведены в [4, 5]. Подробный анализ моделей влияния и управления на сетях представлен в [6, 7]. Естественно выделять модели оптимального (единственный субъект управления) и конфликтного управления (несколько взаимодействующих субъектов, имеющих различные интересы). Математическая формализация моделей второй группы приводит к игровым постановкам на сетях [8, 9]. Дифференциально-игровым моделям маркетинга посвящены монография [10] и обзор [11]. Динамические теоретико-игровые модели иерархического управления мнениями в маркетинге исследованы в [12, 13].

Авторский подход к моделированию управления мнениями и распределения ресурсов в маркетинговых сетях представлен в [14–19]. Построены и исследованы дифференциальные и разностные теоретико-игровые модели в нормальной форме. Проведен сравнительный анализ выигрышей при равноправном поведении, иерархии и кооперации, в том числе с учетом дополнительных требований устойчивого развития в виде фазовых ограничений.

Хорошо известно, что суммарный выигрыш общества при кооперации всегда не меньше, чем при любом другом способе взаимодействия игроков. Обычно для количественной оценки неэффективности иных равновесий используется цена анархии [20–22]. Более широкий набор показателей предложен в [23]. Здесь важно отметить, что следует сравнивать выигрыши не только общества в целом, но и отдельных игроков, поскольку для них кооперация уже не обязательно окажется оптимальным вариантом поведения.

Замысел настоящей работы состоит в сравнительном анализе выигрышей игроков в кооперативном распределении и при различных способах некооперативного поведения. Для этого строится динамическая кооперативная игра управления мнениями в маркетинге.

Обычно для построения кооперативной игры используется характеристическая функция фон Неймана-Моргенштерна [24]. Известны также характеристические функции Петросяна-Заккура [25] и Громовой-Петросяна [26]. В качестве решения игры удобно брать вектор Шепли [27]. Динамические кооперативные игры с сетевой структурой и ключевые проблемы динамической устойчивости и построения процедуры распределения дележа рассмотрены в [28–30].

В [19] мы рассматривали аналогичную, но сильно упрощенную динамическую модель в дискретном времени с ограничениями в виде равенств и сравнивали только индивидуальное поведение игроков и кооперацию. В данной работе рассмотрение ведется в непрерывном времени, ограничения имеют вид неравенств. Кроме того, в данной работе рассматриваются кооперативные игры в форме характеристической функции. Компоненты вектора Шепли как решение кооперативной игры сравниваются с выигрышами игроков при индивидуальном поведении, кооперации и иерархии.

Результаты настоящей статьи состоят в следующем:

- построена динамическая кооперативная игра управления мнениями в маркетинге;
- показано, что при сделанных модельных предположениях характеристические функции фон Неймана-Моргенштерна, Петросяна-Заккура и Громовой-Петросяна совпадают;
- для этой общей характеристической функции вычислен вектор Шепли, показана его динамическая неустойчивость и предложена процедура распределения дележа;
- проведено сравнение компонент вектора Шепли с выигрышами игроков при различных формах некооперативного поведения.

2. КООПЕРАТИВНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ УПРАВЛЕНИЯ МНЕНИЯМИ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

Рассмотрим сначала задачу максимизации суммы мнений членов целевой аудитории за весь плановый период за вычетом затрат на маркетинг и рекламу за тот же период. В целевой аудитории имеется n агентов. Коалиция из m фирм решает следующую оптимизационную задачу:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T e^{-\rho t} \left(\sum_{j=1}^n x_j(t) - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n s_j^i u_j^i(x_j(t)) \right) dt \rightarrow \max, \\
 & u_j^i(x_j(t)) \geq 0, \quad s_j^i = \begin{cases} 1, & \text{если } b_j^i \neq 0, \\ 0, & \text{если } b_j^i = 0 \end{cases}, \\
 & \dot{x}_j = \sum_{i=1}^m b_j^i \sqrt{u_j^i(x_j(t))} + \sum_{l=1}^n a_{lj} x_l(t), \quad x_j(0) = x_{j0}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\
 & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_j^i(x_j(t)) = R^t, \quad \int_0^T e^{-\rho t} R^t dt \leq \mathfrak{R} = \sum_{i=1}^m \mathfrak{R}_i,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где T — горизонт планирования, ρ — коэффициент дисконтирования, $x_j(t)$ — мнение агента j в момент времени t , $u_j^i(x_j(t))$ — управляющее воздействие i -й фирмы на j -го агента в момент времени t . Эта величина положительна, так же, как и коэффициент, выражающий силу влияния, $b_j^i > 0$, если j -й агент является одним из тех агентов, на которых i -я фирма считает нужным влиять. В противном случае $u_j^i(x_j) = 0$ и, соответственно, $b_j^i = 0$. В частном случае коалиция может состоять из единственной фирмы.

Расходы коалиции в течение всего планового периода ограничены сверху величиной $\mathfrak{R}$. Распределение суммарных затрат коалиции между отдельными моментами времени $\{R^t\}_{t \in [0, T]}$ должно осуществляться оптимальным образом и поэтому будет найдено из решения задачи распределения ресурсов.

Предложение 2.1. *Оптимальные стратегии фирм определяются выражением*

$$u_j^i = \frac{R(b_j^i \alpha_j(t))^2}{\int_0^T e^{-\rho t} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(t))^2 dt}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n, \tag{2}$$

где R определяется следующим образом:

$$R = \begin{cases} \frac{1}{4} \int_0^T e^{-\rho \tau} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(\tau))^2 d\tau, & \text{если } \int_0^T e^{-\rho \tau} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(\tau))^2 d\tau < 4\mathfrak{R}, \\ \mathfrak{R}, & \text{если } \int_0^T e^{-\rho \tau} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(\tau))^2 d\tau \geq 4\mathfrak{R}, \end{cases} \tag{3}$$

а $\alpha_j(t)$ есть j -я компонента вектора

$$\alpha(t) = (e^{(A-\rho I)(T-t)} - I)(A - \rho I)^{-1} \varepsilon, \tag{4}$$

где A — матрица влияний, $A = (a_{ij})_{i=1,2,\dots,m}^{j=1,2,\dots,n}$.

Общий выигрыш равен

$$\sum_{j=1}^n x_{j0} \alpha_j(0) + \sqrt{R} \sqrt{\int_0^T e^{-\rho \tau} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(\tau))^2 d\tau} - R \tag{5}$$

(доказательство приведено в Приложении).

Другими словами, мы оптимизировали платежеспособный спрос за плановый период в предположении, что, кроме данной коалиции, никакая другая коалиция и никакая фирма, не входящая в эту коалицию, на мнение покупателей не влияет. При этом первое слагаемое в (5) представляет собой не что иное, как тот спрос, который в течение плано-

вого периода существует сам по себе благодаря начальным условиям и взаимовлиянию агентов спроса. Действительно, решая систему уравнений (1) без управляющих воздействий, то есть

$$\dot{x}_j = \sum_{l=1}^n \alpha_{lj} x_l(t), \quad x_j(0) = x_{j0}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

получаем в матричном виде

$$x(t) = x(0)e^{At},$$

откуда величина платежеспособного спроса за плановый период равна

$$\int_0^T x(0)e^{At-\rho I t} \varepsilon dt = x(0)(A - \rho I)^{-1} e^{At-\rho I t} \Big|_0^T = x(0)(A - \rho I)^{-1} [e^{(A-\rho I)T} - I] \varepsilon = \sum_{j=1}^n x_{j0} \alpha_j(0),$$

где $x(0)$ и $x(t)$ — n -мерные вектор-строки, ε — n -мерный вектор-столбец, составленный из единиц, I — единичная $n \times n$ -матрица. Обозначим эту независимую от действий фирм компоненту через J_0 .

Второе слагаемое в (5) представляет собой решение неоднородной линейной системы уравнений с нулевыми начальными условиями, соответствующей (1), где $u(t)$ выражается (2):

$$\dot{x}_j = \sum_{i=1}^m b_j^i \sqrt{u_j^i(x_j(t))} = \frac{\sum_{i=1}^m (b_j^i)^2 \alpha_j(t)}{\sqrt{\int_0^T e^{-\rho t} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(t))^2 dt}} \sqrt{R}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (7)$$

а $\alpha(t)$ выражается (4). Третье слагаемое в (5) — это затраты, которые выражаются (3).

Если же на спрос покупателей влияет множество коалиций или отдельных фирм, то решение вида (5) будет содержать несколько слагаемых такого же вида, как второе и третье слагаемые в (5). Действие любой коалиции отличается от совместных независимых действий входящих в нее фирм более эффективным использованием общих ресурсов, чем при случайном распределении тех же ресурсов Природой между фирмами.

Для того чтобы как-то делить этот совместно достигнутый выигрыш, то есть спрос, нужно ввести понятие собственности на полученное увеличение спроса. Представляется наиболее естественным считать увеличение спроса, достигнутое той или иной коалицией, то есть решение ее уравнения (7), принадлежащим данной коалиции. Тогда решение уравнения (6) придется или считать не принадлежащим никому из рассматриваемых игроков, или делить между всеми рассматриваемыми фирмами, что не очень хорошо, потому что в мире могут существовать и другие фирмы, также воздействующие или не воздействующие на спрос покупателей, однако пользующиеся этим общим покупательским спросом.

2.1. Характеристическая функция фон Неймана-Моргенштерна

Рассмотрим коалицию K , включающую k фирм, $k \leq m$. Большую коалицию, включающую все m фирм, будем обозначать через M . Обозначим через v_K^{N-M} характеристическую функцию фон Неймана-Моргенштерна [24]. Ее значение для коалиции K определяется решением следующей задачи оптимального управления:

$$v_K^{N-M}(0) = \int_0^T e^{-\rho t} \left(\sum_{j=1}^n x_j(t) - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n s_j^i u_j^i(x_j(t)) \right) dt - J_0 \rightarrow \max,$$

$$u_j^i(x_j(t)) \geq 0, \quad s_j^i = \begin{cases} 1, & \text{если } b_j^i \neq 0, \\ 0, & \text{если } b_j^i = 0 \end{cases},$$

$$\dot{x}_j = \sum_{i=1}^k b_j^i \sqrt{u_j^i(x_j(t))} + \sum_{l=1}^n a_{lj} x_l(t), \quad x_j(0) = x_{j0}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n u_j^i(x_j(t)) = R^t, \quad \int_0^T e^{-\rho t} R^t dt \leq \mathfrak{R} = \sum_{i=1}^k \mathfrak{R}_i,$$

где j — номер агента, i — номер фирмы, n — количество агентов, k — количество фирм в коалиции. При этом считаем, что если i -я фирма не влияет на j -го агента, то $b_j^i = 0$. В рассматриваемой модели фирмы могут только увеличивать спрос, инвестируя в маркетинг и рекламу, но не могут его уменьшать. Повлиять на увеличение спроса для коалиции K антикоалиция $M \setminus K$ никак не может, поэтому худшее, что она может сделать для коалиции K , — это ничего не делать, не инвестировать вовсе.

Из Предложения 2.1 и принятого понимания прав собственности на спрос вытекает следующее предложение.

Предложение 2.2. Стратегии фирм, максимизирующие выигрыш коалиции K , определяются выражением

$$u_j^i = \frac{R(b_j^i \alpha_j(t))^2}{\int_0^T e^{-\rho t} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(t))^2 dt}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где R определяется следующим образом:

$$R = \begin{cases} \frac{1}{4} \int_0^T e^{-\rho \tau} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(\tau))^2 d\tau, & \text{если } \frac{1}{4} \int_0^T e^{-\rho \tau} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(\tau))^2 d\tau < \mathfrak{R}, \\ \mathfrak{R}, & \text{если } \frac{1}{4} \int_0^T e^{-\rho \tau} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(\tau))^2 d\tau \geq \mathfrak{R}, \end{cases}$$

а $\alpha_j(t)$ есть j -я компонента вектора $\alpha(t) = (e^{(A-\rho I)(T-t)} - I)(A - \rho I)^{-1} \epsilon$.

Значение характеристической функции коалиции K равно

$$v_K^{N-M}(0) = \sqrt{R} \sqrt{\int_0^T e^{-\rho \tau} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(\tau))^2 d\tau - R}.$$

2.2. Характеристические функции Петросяна-Заккура и Громовой-Петросяна

Обозначим через v_K^{P-Z} характеристическую функцию Петросяна-Заккура, через v_K^{G-P} характеристическую функцию Громовой-Петросяна [25, 26]. При нашем понимании собственности коалиции на достигнутое ею увеличение спроса в линейной модели действия антикоалиции никак не влияют на выигрыш коалиции, поэтому характеристическая функция Петросяна-Заккура для нашей модели совпадает с характеристической функцией фон Неймана-Моргенштерна. Характеристическая функция Громовой-Петросяна при ее незначительной модификации также совпадает в нашей модели с характеристической функцией фон Неймана-Моргенштерна. Дело в том, что буквально сохранить на втором этапе в подходе Громовой-Петросяна стратегии игроков, входящих в коалицию K , полученные на первом этапе, то есть в максимальной

коалиции, мы не можем, потому что в нашей модели стратегия коалиции зависит от ее ресурсов. Ресурсы же у коалиции K отличаются от ресурсов большой коалиции. Поэтому единственный вред, который в подходе Громовой-Петросяна может нанести коалиции K антикоалиция, — это не дать ей пользоваться своими ресурсами. Но при этом вновь получаем полное совпадение с характеристической функцией фон Неймана-Моргенштерна. Итак, имеем:

$$v_K = v_K^{N-M} = v_K^{P-Z} = v_K^{G-P},$$

и будем поэтому обозначать характеристическую функцию в нашей модели просто v .

3. ВЕКТОР ШЕПЛИ

В качестве решения кооперативной игры примем вектор Шепли, поскольку он всегда существует и единствен. Запишем выражение для i -й ($i = 1, 2, \dots, m$) компоненты вектора Шепли ϕ_i . Пусть Y — множество всех m фирм. Обозначим через Y_i множество всех фирм, кроме i -й фирмы. Зафиксируем число k ($1 \leq k \leq m$). Обозначим через $S_{i,k}$ множество всех наборов, содержащих $k-1$ фирм из Y_i . Очевидно, $|S_{i,k}| = C_{m-1}^{k-1}$.

Пусть h — произвольный набор из $S_{i,k}$, тогда компоненты вектора h , то есть $h_i(1), h_i(2), \dots, h_i(k-1)$ — это фирмы из множества Y_i , а $\bar{h}_i(k+1), \bar{h}_i(k+2), \dots, \bar{h}_i(m)$ — набор фирм из Y_i , не вошедших в набор h .

Из Предложения 2.2 непосредственно следует, что i -я компонента вектора Шепли равна

$$\begin{aligned} \phi_i(v, x(0), 0) = & \sum_{k=1}^m \sum_{h \in S_{i,k}} \frac{(k-1)! (m-k)!}{m!} \times \\ & \times \left\{ \sqrt{R_i + \sum_{\kappa=1}^{k-1} R_{h_i(\kappa)}} \sqrt{\int_0^T e^{-\rho\tau} \left[\sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(\tau))^2 + \sum_{\kappa=1}^{k-1} \sum_{j=1}^n (b_j^{h_i(\kappa)} \alpha_j(\tau))^2 \right] d\tau} - \right. \\ & \left. - \sqrt{\sum_{\kappa=1}^{k-1} R_{h_i(\kappa)}} \sqrt{\int_0^T e^{-\rho\tau} \sum_{\kappa=1}^{k-1} \sum_{j=1}^n (b_j^{h_i(\kappa)} \alpha_j(\tau))^2 d\tau} - R_i \right\}. \quad (8) \end{aligned}$$

Для того чтобы ответить на вопрос о временной состоятельности (слабой динамической устойчивости или неустойчивости) данного дележа, рассмотрим сначала вопрос о динамической устойчивости / неустойчивости найденного в Предложении 2.2 решения. Рассмотрение проведем на примере большой коалиции. Поскольку стратегии коалиций в нашей модели зависят от имеющихся у них ресурсов, то нужно прежде всего оптимальным образом распределить ресурсы во времени. Из доказательства Предложения 2.1 (из формулы (П8)) непосредственно вытекает следующая лемма.

Лемма 3.1. *Оптимальное распределение дисконтированной суммы ресурсов $\mathfrak{R}$, выделенных коалиции фирм (или одной фирме при $m = 1$) на весь плановый период $[0, T]$, между периодами $[0, t]$ и $[t, T]$ при любом $t \in [0, T]$ имеет вид:*

$$\mathfrak{R}_t = \mathfrak{R} \frac{\int_0^t e^{-\rho\tau} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(\tau))^2 d\tau}{\int_0^T e^{-\rho\tau} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(\tau))^2 d\tau}, \quad \mathfrak{R}_{t-T} = \mathfrak{R} \frac{\int_t^T e^{-\rho(\tau-t)} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(\tau))^2 d\tau}{\int_0^T e^{-\rho\tau} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(\tau))^2 d\tau}.$$

С не зависящей от инвестиций компонентой спроса (общим решением (1), то есть решением (6)) все обстоит благополучно. Действительно, имеем:

$$\begin{aligned}
 \int_0^t x(0)e^{(A-\rho I)\tau} \varepsilon d\tau &= x(0)(A-\rho I)^{-1} [e^{(A-\rho I)t} - I] \varepsilon, \\
 \int_t^T x(0)e^{(A-\rho I)\tau} \varepsilon d\tau &= x(0)(A-\rho I)^{-1} e^{(A-\rho I)t} \varepsilon \Big|_t^T = \\
 &= x(0)(A-\rho I)^{-1} [e^{(A-\rho I)T} - e^{(A-\rho I)t}] \varepsilon = \\
 &= x(0)e^{(A-\rho I)t} (A-\rho I)^{-1} [e^{(A-\rho I)(T-t)} - I] \varepsilon = \\
 &= x(t)e^{-\rho I t} (A-\rho I)^{-1} [e^{(A-\rho I)(T-t)} - I] \varepsilon = x(t)\alpha(t)e^{-\rho t}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Тогда, складывая выражения (9) и (10), получаем

$$x(0)(A-\rho I)^{-1} [e^{(A-\rho I)T} - I] \varepsilon = x(0)\alpha(0),$$

где $x(0)$ — строка, $\alpha(0)$ — столбец.

Выясним, является ли динамически устойчивой вторая составляющая решения, связанная с усилиями коалиции фирм, то есть решение неоднородной системы (7) минус затраты коалиции. Из доказательства Предложения 2.1:

$$V(x, t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(t)x_j + \beta(t),$$

где

$$\beta(t) = \int_t^T e^{-\rho(\tau-t)} \sqrt{R^T \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\alpha_j(\tau)b_j^i)^2} d\tau - \int_t^T e^{-\rho(\tau-t)} R^T d\tau.$$

Таким образом, с учетом леммы 3.1 (и (П9)),

$$\begin{aligned}
 v_K(0) &= \sqrt{R} \sqrt{\int_0^T e^{-\rho\tau} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(\tau))^2 d\tau} - R, \\
 e^{-\rho t} v_K(t) &= \frac{\sqrt{R} \int_t^T e^{-\rho\tau} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(\tau))^2 d\tau}{\sqrt{\int_0^T e^{-\rho\tau} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(\tau))^2 d\tau}} - \frac{R \int_t^T e^{-\rho\tau} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(\tau))^2 d\tau}{\int_0^T e^{-\rho\tau} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(\tau))^2 d\tau}.
 \end{aligned}$$

Следовательно, для слабой динамической устойчивости решения необходимо и достаточно, чтобы величина

$$v_K(0) - e^{-\rho t} v_K(t) - \frac{R \int_t^T e^{-\rho\tau} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(\tau))^2 d\tau}{\int_0^T e^{-\rho\tau} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(\tau))^2 d\tau} = \frac{R \int_0^t e^{-\rho\tau} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(\tau))^2 d\tau}{\int_0^T e^{-\rho\tau} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(\tau))^2 d\tau}$$

представляла собой

$$\int_0^t e^{-\rho\tau} \sum_{j=1}^n \hat{x}_j(\tau) d\tau,$$

где $\hat{x}_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, n$ — решение системы (7), то есть чтобы выполнялось условие

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(t))^2 \right) = 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (b_j^i) \alpha_j(t) \alpha_j'(t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (b_j^i)^2 \alpha_j(t),$$

что для $\alpha(t)$, заданного (4), неверно. Следовательно, решение не обладает слабой динамической устойчивостью. Тогда динамической устойчивостью не обладает и дележ (вектор Шепли), и следует воспользоваться процедурой распределения дележа по Л. А. Петросяну.

3.1. Процедура распределения дележа

Если каждой из фирм хватает ресурсов, то есть она имеет возможность инвестировать в маркетинг и рекламу оптимальную за плановый период величину ресурсов, оставляя излишек у себя, то ресурсов хватает и любой коалиции. В этом случае при любом разумном определении характеристической функции она аддитивна и любой дележ совпадает с выигрышами фирм в равновесии Нэша. Если одним фирмам ресурсов хватает, а другим — нет, то, как видно из Предложений 2.1, 2.2, для каждой коалиции возникает дихотомия в зависимости от того, насколько необеспеченным фирмам не хватает ресурсов и насколько ресурсы обеспеченных фирм избыточны. Будем предполагать, что ни одной из фирм Природа не предоставила избытка ресурсов, тогда его нет и ни у одной из коалиций.

В этом случае

$$\begin{aligned} \phi_i(v, x(0), 0) &= \sum_{k=1}^m \sum_{h \in S_{i,k}} \frac{(k-1)! (m-k)!}{m!} \times \\ &\times \left\{ \sqrt{\mathfrak{R}_i + \sum_{\kappa=1}^{k-1} \mathfrak{R}_{h_i(\kappa)}} \sqrt{\int_0^T e^{-\rho\tau} \left[\sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(\tau))^2 + \sum_{\kappa=1}^{k-1} \sum_{j=1}^n (b_j^{h_i(\kappa)} \alpha_j(\tau))^2 \right] d\tau} - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\sum_{\kappa=1}^{k-1} \mathfrak{R}_{h_i(\kappa)}} \sqrt{\int_0^T e^{-\rho\tau} \sum_{\kappa=1}^{k-1} \sum_{j=1}^n (b_j^{h_i(\kappa)} \alpha_j(\tau))^2 d\tau} - \mathfrak{R}_i \right\}, \\ \phi_i(v, x(t), t) &= \sum_{k=1}^m \sum_{h \in S_{i,k}} \frac{(k-1)! (m-k)!}{m!} \times \\ &\times \left\{ \frac{\sqrt{\mathfrak{R}_i + \sum_{\kappa=1}^{k-1} \mathfrak{R}_{h_i(\kappa)}} \int_t^T e^{-\rho\tau} \left[\sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(\tau))^2 + \sum_{\kappa=1}^{k-1} \sum_{j=1}^n (b_j^{h_i(\kappa)} \alpha_j(\tau))^2 \right] d\tau}{\sqrt{\int_0^T e^{-\rho\tau} \left[\sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(\tau))^2 + \sum_{\kappa=1}^{k-1} \sum_{j=1}^n (b_j^{h_i(\kappa)} \alpha_j(\tau))^2 \right] d\tau}} - \right. \\ &\quad - \frac{\sqrt{\sum_{\kappa=1}^{k-1} \mathfrak{R}_{h_i(\kappa)}} \int_t^T e^{-\rho\tau} \left[\sum_{\kappa=1}^{k-1} \sum_{j=1}^n (b_j^{h_i(\kappa)} \alpha_j(\tau))^2 \right] d\tau}{\sqrt{\int_0^T e^{-\rho\tau} \left[\sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(\tau))^2 + \sum_{\kappa=1}^{k-1} \sum_{j=1}^n (b_j^{h_i(\kappa)} \alpha_j(\tau))^2 \right] d\tau}} - \\ &\quad - \frac{\left(\mathfrak{R}_i + \sum_{\kappa=1}^{k-1} \mathfrak{R}_{h_i(\kappa)} \right) \int_t^T e^{-\rho\tau} \left[\sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(\tau))^2 + \sum_{\kappa=1}^{k-1} \sum_{j=1}^n (b_j^{h_i(\kappa)} \alpha_j(\tau))^2 \right] d\tau}{\int_0^T e^{-\rho\tau} \left[\sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(\tau))^2 + \sum_{\kappa=1}^{k-1} \sum_{j=1}^n (b_j^{h_i(\kappa)} \alpha_j(\tau))^2 \right] d\tau} + \\ &\quad \left. + \frac{\sum_{\kappa=1}^{k-1} \mathfrak{R}_{h_i(\kappa)} \int_t^T e^{-\rho\tau} \sum_{\kappa=1}^{k-1} \sum_{j=1}^n (b_j^{h_i(\kappa)} \alpha_j(\tau))^2 d\tau}{\int_0^T e^{-\rho\tau} \sum_{\kappa=1}^{k-1} \sum_{j=1}^n (b_j^{h_i(\kappa)} \alpha_j(\tau))^2 d\tau} \right\}. \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}\phi_i(v, x(t), t) = & \sum_{k=1}^m \sum_{h \in S_{i,k}} \frac{(k-1)! (m-k)!}{m!} \times \\
 & \times \left\{ \frac{\sqrt{\sum_{\kappa=1}^{k-1} \Re_{h_i(\kappa)} e^{-\rho t} \left[\sum_{j=1}^{k-1} \sum_{j=1}^n (b_j^{h_i(\kappa)} \alpha_j(t))^2 \right]}}{\sqrt{\int_0^T e^{-\rho \tau} \left[\sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(\tau))^2 + \sum_{\kappa=1}^{k-1} \sum_{j=1}^n (b_j^{h_i(\kappa)} \alpha_j(\tau))^2 \right] d\tau}} - \right. \\
 & \frac{\sqrt{\Re_i + \sum_{\kappa=1}^{k-1} \Re_{h_i(\kappa)} e^{-\rho t} \left[\sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(t))^2 + \sum_{\kappa=1}^{k-1} \sum_{j=1}^n (b_j^{h_i(\kappa)} \alpha_j(t))^2 \right]}}{\sqrt{\int_0^T e^{-\rho \tau} \left[\sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(\tau))^2 + \sum_{\kappa=1}^{k-1} \sum_{j=1}^n (b_j^{h_i(\kappa)} \alpha_j(\tau))^2 \right] d\tau}} \\
 & - \frac{\sum_{\kappa=1}^{k-1} \Re_{h_i(\kappa)} e^{-\rho t} \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{j=1}^n (b_j^{h_i(\kappa)} \alpha_j(t))^2}{\int_0^T e^{-\rho \tau} \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{j=1}^n (b_j^{h_i(\kappa)} \alpha_j(\tau))^2 d\tau} + \\
 & \left. + \frac{\left(\Re_i + \sum_{\kappa=1}^{k-1} \Re_{h_i(\kappa)} \right) e^{-\rho t} \left[\sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(t))^2 + \sum_{\kappa=1}^{k-1} \sum_{j=1}^n (b_j^{h_i(\kappa)} \alpha_j(t))^2 \right]}{\int_0^T e^{-\rho \tau} \left[\sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(\tau))^2 + \sum_{\kappa=1}^{k-1} \sum_{j=1}^n (b_j^{h_i(\kappa)} \alpha_j(\tau))^2 \right] d\tau} \right\}. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Тогда процедура распределения деляжа $\beta_i(t) (i = 1, 2, \dots, m)$ имеет вид

$$\beta_i(t) = \rho \phi_i(v, x(t), t) - \frac{d}{dt} \phi_i(v, x(t), t), \quad (13)$$

где выражения для $\phi_i(v, x(t), t)$ и $\frac{d}{dt} \phi_i(v, x(t), t)$ определяются (11) и (12).

Согласно (2) и (3) в [25], построенный нами в (13) вектор $(\beta_1(t), \beta_2(t), \dots, \beta_m(t))$, $t \in [0, T]$, представляет собой динамически устойчивую процедуру распределения деляжа (time-consistent IDR [25]).

4. СРАВНЕНИЕ ДОЛЕЙ ИГРОКОВ СОГЛАСНО ВЕКТОРУ ШЕПЛИ И ВЫИГРЫШЕЙ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР В НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Сравним индивидуальные доли игроков согласно вектору Шепли и выигрыши для дифференциальных игр в нормальной форме. Разумеется, доля игрока согласно вектору Шепли всегда больше или равна его выигрышу при независимом поведении. Это соответствует условию индивидуальной рациональности деляжа и также следует непосредственно из леммы Гёльдера:

$$\begin{aligned}
 \phi_i(v, x(0), 0) &= \sum_{k=1}^m \sum_{h \in S_{i,k}} \frac{(k-1)! (m-k)!}{m!} \times \\
 &\times \left\{ \sqrt{\Re_i + \sum_{\kappa=1}^{k-1} \Re_{h_i(\kappa)}} \sqrt{\int_0^T e^{-\rho\tau} \left[\sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(\tau))^2 + \sum_{\kappa=1}^{k-1} \sum_{j=1}^n (b_j^{h_i(\kappa)} \alpha_j(\tau))^2 \right] d\tau} - \right. \\
 &\quad \left. - \sqrt{\sum_{\kappa=1}^{k-1} \Re_{h_i(\kappa)}} \sqrt{\int_0^T e^{-\rho\tau} \sum_{\kappa=1}^{k-1} \sum_{j=1}^n (b_j^{h_i(\kappa)} \alpha_j(\tau))^2 d\tau} - \Re_i \right\} \geq \\
 &\geq \sum_{k=1}^m \sum_{h \in S_{i,k}} \frac{(k-1)! (m-k)!}{m!} \times \left\{ \sqrt{\sum_{\kappa=1}^{k-1} \Re_{h_i(\kappa)}} \sqrt{\int_0^T e^{-\rho\tau} \sum_{\kappa=1}^{k-1} \sum_{j=1}^n (b_j^{h_i(\kappa)} \alpha_j(\tau))^2 d\tau} + \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{\Re_i} \sqrt{\int_0^T e^{-\rho\tau} \sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(\tau))^2 d\tau} - \sqrt{\sum_{\kappa=1}^{k-1} \Re_{h_i(\kappa)}} \sqrt{\int_0^T e^{-\rho\tau} \sum_{\kappa=1}^{k-1} \sum_{j=1}^n (b_j^{h_i(\kappa)} \alpha_j(\tau))^2 d\tau} - \Re_i \right\} = \\
 &= \sum_{k=1}^m \sum_{h \in S_{i,k}} \frac{(k-1)! (m-k)!}{m!} \sqrt{\Re_i} \sqrt{\int_0^T e^{-\rho\tau} \sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(\tau))^2 d\tau} - \Re_i = \\
 &= \sqrt{\Re_i} \sqrt{\int_0^T e^{-\rho\tau} \sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(\tau))^2 d\tau} - \Re_i = v_{\{i\}},
 \end{aligned}$$

так как

$$m C_{m-1}^{k-1} \frac{(k-1)! (m-k)!}{m!} = 1.$$

Суммарный выигрыш при кооперации (выигрыш большой коалиции) равен суммарному выигрышу фирм при иерархическом управлении (разд. 2.3, 3.3 в [31]), равен сумме компонент вектора Шепли и не меньше суммарного выигрыша фирм при независимом поведении. При этом величина суммарного выигрыша фирм при кооперации (или при иерархии) строго больше суммарного выигрыша фирм при независимом поведении во всех случаях, кроме тех ситуаций, когда Природа столь же рационально распределяет ресурсы между фирмами, как ведущий игрок при иерархии или общественный оптимизатор в большой коалиции. Это имеет место, в частности, если всем фирмам хватает ресурсов для того, чтобы инвестировать в маркетинг и рекламу оптимальную для этих целей величину ресурсов. В случае же нехватки ресурсов вероятность рационального распределения ресурсов Природой равна нулю (одна точка из континуума).

Рассмотрим индивидуальные выигрыши игроков в дифференциальных играх и их доли согласно вектору Шепли. Можем ли мы утверждать, что верны следующие предположения?

1. Доля игрока согласно вектору Шепли $\phi_i(v, x(0), 0)$ не меньше (не больше) его выигрыша при иерархическом управлении $v_{\{i\}}^{reason}$, когда общие ресурсы коалиции делятся рациональным образом между фирмами.

2. Доля игрока согласно вектору Шепли $\phi_i(v, x(0), 0)$ не меньше (не больше) его выигрыша при кооперации (то есть в большой коалиции) при разделении кооперативного выигрыша между всеми игроками поровну $v_{\{i\}}^{coop}$.
3. Выигрыш игрока при иерархии $v_{\{i\}}^{reason}$ не меньше (не больше) его выигрыша при независимом поведении $v_{\{i\}}$.
4. Выигрыш игрока при кооперации (когда его делят между игроками поровну) $v_{\{i\}}^{coop}$ не меньше (не больше) его выигрыша при независимом поведении $v_{\{i\}}$.
5. Выигрыш игрока при иерархии $v_{\{i\}}^{reason}$ не меньше (не больше) его выигрыша при кооперации (то есть в большой коалиции) при разделении кооперативного выигрыша между всеми игроками поровну $v_{\{i\}}^{coop}$.

Разумеется, ответ на все 5 перечисленных вопросов отрицательный. Контрпримером на все приведенные предположения служит рассмотренный в разделе 5 числовой пример, в котором получаются следующие значения выигрышей и долей:

$$\begin{aligned} \phi_1(v, x(0), 0) &= 25,1773, & \phi_2(v, x(0), 0) &= 13,3653, & \phi_3(v, x(0), 0) &= 24,2092, \\ v_{\{1\}}^{reason} &= 24,7266, & v_{\{2\}}^{reason} &= 13,2559, & v_{\{3\}}^{reason} &= 24,7693, \\ v_{\{1\}}^{coop} &= 20,9173, & v_{\{2\}}^{coop} &= 20,9173, & v_{\{3\}}^{coop} &= 20,9173, \\ v_{\{1\}} &= 25,0923, & v_{\{2\}} &= 13,3459, & v_{\{3\}} &= 24,0848. \end{aligned}$$

Единственная зависимость между индивидуальными выигрышами игроков и их долями в общем выигрыше следующая: доля любого игрока согласно вектору Шепли не меньше его выигрыша при независимом поведении.

Можно рассмотреть только симметричные фирмы, надеясь, что ответ хоть на один из перечисленных пяти вопросов тогда будет положительным. Именно, пусть все фирмы имеют одни и те же коэффициенты эффективности управляющих воздействий на покупателей $b_j^i, j = 1, 2, \dots, n$, то есть индекс фирмы i можно опустить. Различаются фирмы только запасами ресурсов. В этом случае, очевидно, верна будет только пятая гипотеза, а именно, выигрыш игрока при иерархии $v_{\{i\}}^{reason}$ будет не меньше (и не больше) его выигрыша при кооперации (то есть в большой коалиции) при разделении кооперативного выигрыша между всеми игроками поровну $v_{\{i\}}^{coop}$.

Дело в том, что если все фирмы идентичны, то рациональным размещением общих ресурсов между ними при иерархическом управлении будет равномерное распределение ресурсов. А поскольку общие выигрыши при кооперации и при иерархическом управлении совпадают, то и выигрыши каждой фирмы в этих случаях также совпадут. Остальные же четыре гипотезы попрежнему неверны, что подтверждает контрпример в подразделе 5.1.

5. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Есть три субъекта влияния (фирмы $k = 1, 2, 3$) и 9 агентов, которые образуют две сильные подгруппы ($i = 1$, агенты 3, 4 и $i = 2$, агенты 5, 6, 7) и четыре спутника (агенты 1, 2, 8, 9) (рис. 1). Влияние осуществляется только на агентов сильных подгрупп, и то не на всех: $u_j^{i,k}$ — затраты влияния k -й фирмы на j -го агента i -й сильной подгруппы. Для удобства и сокращения формул использована сквозная нумерация агентов независимо от того, в какую сильную подгруппу входит тот или иной агент, поэтому обозначим u_j^i — затраты влияния i -й фирмы на j -го агента при сквозной нумерации последних.

Коэффициент интенсивности воздействия i -й фирмы на j -го агента обозначен b_j^i . Таким образом, если затраты влияния i -й фирмы на j -го агента равны u_j^i , то предпочтения j -го агента x_j в результате влияния на него i -й фирмы увеличатся на величину $b_j^i \sqrt{u_j^i}$. Рассматриваемый численный пример представляет собой развитие примера, приведенного в разд. 4 [31].

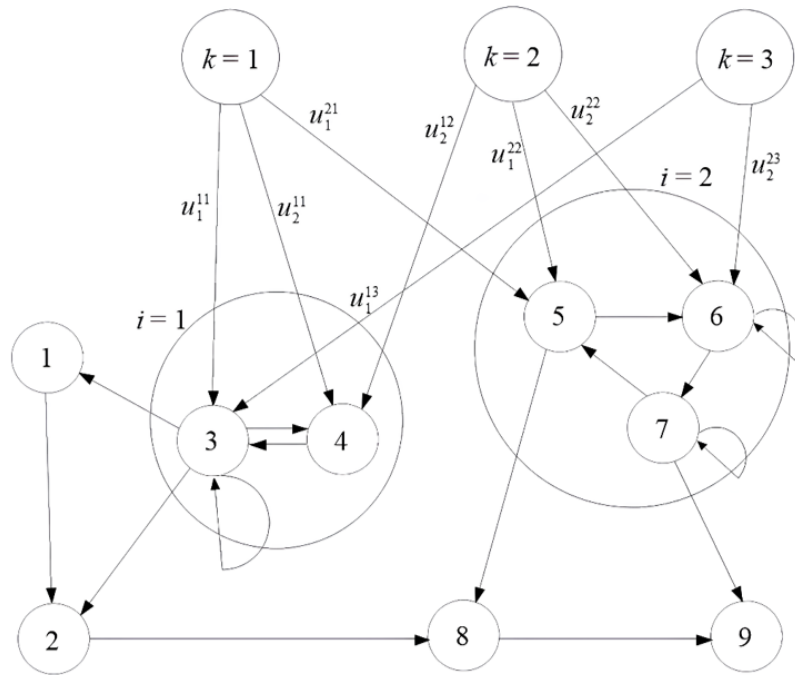


Рис. 1. Численный пример

Если i -я фирма не влияет на j -го агента, то $b_j^i = 0$. В нашем примере $b_3^1 = b_4^1 = b_5^1 = b_4^2 = b_5^2 = b_6^2 = b_3^3 = b_6^3 = 1$, все остальные $b_j^i = 0$. Кроме влияния фирм, имеет место также влияние агентов друг на друга, которое задается стохастической слева матрицей влияний агентов A . В нашем примере

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

при дискретном описании. При рассматриваемом непрерывном описании под матрицей влияний агентов A на самом деле понимается матрица $\tilde{A} = A - I$, где A — матрица влияний агентов при дискретном описании, а I — единичная матрица. Однако для удобства и сокращения формул тильду над символом A ставить не будем. Начальные предпочтения агентов

$$x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = x_4^0 = x_5^0 = x_6^0 = x_7^0 = x_8^0 = x_9^0 = 1,$$

коэффициент дисконтирования равен $e^{-\rho t}$, где $\rho = 0,223144$. Длина планового периода $T = 5$, то есть мы рассматривали отрезок времени $[0, 5]$. Фирмы располагали ресурсами, соответственно, $R_1 = 20, R_2 = 10, R_3 = 15$. Оптимальные дисконтированные суммы затрат на управление для первой, второй и третьей фирм, найденные по формуле

$$\tilde{R}_i = \frac{1}{4} \int_0^T e^{-\rho \tau} \sum_{j=1}^n \left(b_j^i \alpha_j(\tau) \right)^2 d\tau$$

(см. формулу (3), где $\alpha_j(t)$ определяется (4)), получились равными:

$$\tilde{R}_1 = 25,4164, \quad \tilde{R}_2 = 13,6258, \quad \tilde{R}_3 = 25,4604.$$

Величина спроса за весь плановый период, который существовал бы при отсутствии каких-либо маркетинговых действий фирм, то есть величина

$$\int_0^T e^{-\rho t} \sum_{j=1}^n x_j(t) dt,$$

где $x_j(t)$ — решение однородной системы уравнений (6), равна $I_0 = 27,1165$.

Увеличения суммарной величины спроса за весь плановый период, вызванные маркетинговыми усилиями фирм и всевозможных коалиций, то есть величины интегралов

$$\int_0^T e^{-\rho t} \sum_{j=1}^n \hat{x}_j(t) dt,$$

где $\hat{x}_j(t)$ — решение неоднородной системы уравнений (7) для соответствующих случаев, равны соответственно: $I_1 = 101,6657, I_2 = 54,5031, I_3 = 101,8414, I_{12} = 156,1688, I_{23} = 156,3445, I_{13} = 203,5071, I_{123} = 258,0102$.

Тогда значения характеристической функции для фирм и коалиций равны соответственно:

$$\begin{aligned} v_{\{1\}} &= 25,0923, & v_{\{2\}} &= 13,3459, & v_{\{3\}} &= 24,0848, \\ v_{\{1,2\}} &= 38,4475, & v_{\{2,3\}} &= 37,5189, & v_{\{1,3\}} &= 49,3964, & v_{\{1,2,3\}} &= 62,7518. \end{aligned}$$

Вычислим компоненты вектора Шепли. Из (8) получаем:

$$\begin{aligned} \phi_1(v, x(0), 0) &= \frac{1}{3} v_{\{1\}} + \frac{1}{6} (v_{\{1,2\}} - v_{\{2\}}) + \frac{1}{6} (v_{\{1,3\}} - v_{\{3\}}) + \frac{1}{3} (v_{\{1,2,3\}} - v_{\{2,3\}}), \\ \phi_2(v, x(0), 0) &= \frac{1}{3} v_{\{2\}} + \frac{1}{6} (v_{\{1,2\}} - v_{\{1\}}) + \frac{1}{6} (v_{\{2,3\}} - v_{\{3\}}) + \frac{1}{3} (v_{\{1,2,3\}} - v_{\{1,3\}}), \\ \phi_3(v, x(0), 0) &= \frac{1}{3} v_{\{3\}} + \frac{1}{6} (v_{\{2,3\}} - v_{\{2\}}) + \frac{1}{6} (v_{\{1,3\}} - v_{\{1\}}) + \frac{1}{3} (v_{\{1,2,3\}} - v_{\{1,2\}}). \end{aligned}$$

Тогда

$$\phi_1(v, x(0), 0) = 25,1773, \quad \phi_2(v, x(0), 0) = 13,3653, \quad \phi_3(v, x(0), 0) = 24,2092.$$

При кооперации выигрыш каждой фирмы равен

$$v_{\{1\}}^{coop} = v_{\{2\}}^{coop} = v_{\{3\}}^{coop} = \frac{v_{\{1,2,3\}}}{3} = 20,9173.$$

При иерархическом управлении общие ресурсы $R = R_1 + R_2 + R_3 = 45$ делятся рациональным образом, согласно правилу, которое мгновенно следует из доказательства Предложения 2.1:

$$R_i^{reason} = \frac{\int_0^T e^{-\rho t} \sum_{j=1}^n \left(b_j^i \alpha_j(t)\right)^2 dt}{\int_0^T e^{-\rho t} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(b_j^i \alpha_j(t)\right)^2 dt} R,$$

а именно:

$$R_1^{reason} = 17,7317, \quad R_2^{reason} = 9,5060, \quad R_3^{reason} = 17,7623.$$

В этом случае выигрыши фирм будут равны соответственно:

$$v_{\{1\}}^{reason} = 24,7266, \quad v_{\{2\}}^{reason} = 13,2559, \quad v_{\{3\}}^{reason} = 24,7693.$$

5.1. Модификация численного примера для случая симметричных фирм

Изменим численный пример, сделав все три фирмы идентичными, то есть положив $b_3^1 = b_4^1 = b_5^1 = b_3^2 = b_4^2 = b_5^2 = b_3^3 = b_4^3 = b_5^3 = 1$, а все остальные коэффициенты эффективности управляющих воздействий $b_j^i = 0$. Все прочие условия, включая и распределение ресурсов отрасли между фирмами $R_1 = 20, R_2 = 10, R_3 = 15$ при независимом поведении, сохраняются как в разделе 5.

В этом случае получаем:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_1 &= 25,4161, & \tilde{R}_2 &= 25,4161, & \tilde{R}_3 &= 25,4161, \\ \phi_1(v, x(0), 0) &= 25,5704, & \phi_2(v, x(0), 0) &= 22,4354, & \phi_3(v, x(0), 0) &= 24,1473, \\ v_{\{1\}}^{reason} &= 24,0511, & v_{\{2\}}^{reason} &= 24,0511, & v_{\{3\}}^{reason} &= 24,0511, \\ v_{\{1\}}^{coop} &= 24,0511, & v_{\{2\}}^{coop} &= 24,0511, & v_{\{3\}}^{coop} &= 24,0511, \\ v_{\{1\}} &= 25,0923, & v_{\{2\}} &= 21,8851, & v_{\{3\}} &= 24,0511. \end{aligned}$$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С одной стороны, настоящая статья развивает тематику теоретико-игровых моделей управления мнениями и распределения ресурсов в сетях. В предыдущих работах авторов были построены и исследованы динамические теоретико-игровые модели в этой области в нормальной форме. Теперь предложена динамическая игра в форме характеристической функции, которая в силу модельных предположений совпадает для подходов Неймана-Моргенштерна, Петросяна-Заккура и Громовой-Петросяна. Для нее вычислен вектор Шепли, показана его динамическая неустойчивость и описана процедура распределения дележа.

С другой стороны, предпринята попытка сравнительного анализа компонент вектора Шепли и выигрышей игроков в исходной динамической игре в нормальной форме при различных способах некооперативного поведения. К сожалению, единственная выявленная зависимость между индивидуальными выигрышами игроков и их долями в общем выигрыше следующая: доля любого игрока согласно вектору Шепли не меньше его выигрыша при независимом поведении. Как показывает численный пример, получить другие общие результаты сравнения в рамках данной модели не удастся.

В дальнейшем предполагается продолжить работу по сравнительному анализу эффективности способов организации экономических агентов и методов управления ими в динамических теоретико-игровых моделях в нормальной форме и в форме характеристической функции.

Список литературы

1. French J. R. A formal theory of social power // *The Psychological Review*. 1956. Vol. 63. P. 181–194.
2. Harary F. A Criterion for Unanimity in French's Theory of Social Power // *Studies in Social Power*. Michigan: Institute of Sociological Research. 1959. P. 168–182.
3. DeGroot M. H. Reaching a Consensus // *J. of American Statistical Association*. 1974. Vol. 69. P. 118–121. doi:10.1080/01621459.1974.10480137
4. Jackson M. *Social and Economic Networks*. NJ: Princeton University Press, 2008. 504 p.
5. Jackson M., Wolinsky A. A strategic model of social and economic networks // *J. Economic Theory*. 1996. Vol. 71(1). P. 44–74. doi:10.1006/jeth.1996.0108
6. Gubanov D. A., Novikov D. A., Chkhartishvili A. G. Models of influence in social networks (a survey) // *Large-Scale Systems Control*. 2009. Vol. 27. P. 205–281.
7. Chkhartishvili A., Gubanov D., Novikov D. *Social Networks: Models of Information Influence, Control, and Confrontation*. Springer Publishers, 2019. doi:10.1007/978-3-030-05429-8
8. Novikov D. A. Games and networks // *Automation and Remote Control*. 2014. Vol. 75. P. 1145–1154.
9. Jackson M., Zenou Y. Games on networks / *Handbook of game theory*. Eds. Young P., Zamir S. Amsterdam: Elsevier Science, 2015. P. 95–163. doi:10.1016/b978-0-444-53766-9.00003-3
10. Jorgensen S., Zaccour G. *Differential Games in Marketing*. Totnes: Kluwer Academic Publishers, 2004. 176 p.
11. Jorgensen S., Zaccour G. A Survey of Game-Theoretic Models of Cooperative Advertising // *European J. of Operations Research*. 2014. Vol. 237(1). P. 1–14. doi:10.1016/j.ejor.2013.12.017
12. Sedakov A., Zhen M. Opinion dynamics game in a social network with two influence nodes // *Vestnik SPb Gos. Univ. Ser. Appl. Math. Inform. Sci. Contr. Proc.* 2019. Vol. 15, № 1. P. 118–125.
13. Zhen M. Stackelberg equilibrium in opinion dynamics game in social network with two influence nodes / *Contributions to game theory and management*. 2019. Vol. 12. P. 366–386.
14. Agieva M. T., Korolev A. V., Ougolnitsky G. A. Modeling and Simulation of Impact and Control in Social Networks // *Modeling and Simulation of Social-Behavioral Phenomena in Creative Societies*. 2019. P. 29–40. doi:10.1007/978-3-030-29862-3_3
15. Korolev A. V., Ougolnitsky G. A. Optimal resource allocation in the difference and differential Stackelberg games on marketing networks // *J. of Dynamics and Games*. 2020. Vol. 7(2). P. 141–162.
16. Agieva M. T., Korolev A. V., Ougolnitsky G. A. Modeling and Simulation of Impact and Control in Social Networks with Application to Marketing // *Mathematics*. 2020. Vol. 8(9). P. 1529.
17. Agieva M. T., Korolev A. V., Ougolnitsky G. A. Game Theoretic Models of Sustainable Management in Marketing Networks // *Contributions to Game Theory and Management*. 2020. Vol. 13. P. 24–56.
18. Agieva M. T., Gorbaneva O. I., Ougolnitsky G. A. Dynamic SPICE-Model of Resource Allocation in Marketing Networks with Co-Directed Interests // *Proc. of 2020 2nd International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA)*. 2020. P. 161–165. doi:10.1109/summa50634.2020.9280699
19. Agieva M., Korolev A., Ougolnitsky G. Static and Dynamic Game Theoretic Models of Opinion Control in Marketing Network // *Contributions to Game Theory and Management*. 2021. Vol. 14. P. 8–19.
20. Nisan N., Roughgarden T., Tardos E., Vazirany V., eds. *Algorithmic Game Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. 754 p.
21. Roughgarden T. *Selfish Routing and the Price of Anarchy*. Cambridge: MIT Press, 2005.
22. Papadimitriou C. H. Algorithms, games, and the Internet // *Proc. 33rd Symp. Theory of Computing*. 2001. P. 749–753.
23. Basar T., Zhu Q. Prices of Anarchy, Information, and Cooperation in Differential Games // *Dynamic Games and Applications*. 2011. Vol. 1(1). P. 50–73.
24. von Neumann J., Morgenstern O. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton: Princeton University Press, 1953.

25. Petrosjan L., Zaccour G. Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction // J. of Economic Dynamics and Control. 2003. Vol. 27 (3). P. 381–398.
26. Gromova E. V., Petrosyan L. A. On an approach to constructing a characteristic function in cooperative differential games // Automation and Remote Control. 2017. Vol. 78. P. 1680–1692.
27. Shapley L. A Value for n-person Games // Contributions to the Theory of Games (AM-28). 1953. Vol. 2. P. 307–318. doi:10.1515/9781400881970-018
28. Tur A., Petrosyan L. Cooperative optimality principles in differential games on networks // Mathematical Game Theory and Applications. 2020. Vol. 12 (4). P. 93–111. doi 10.17076/mgta_2020_4_27
29. Petrosyan L. A., Yeung D. W. K. Shapley value for differential network games: theory and application // J. of Dynamics and Games. 2021. Vol. 8 (2). P. 151–166. doi:10.3934/jdg.2020021
30. Tur A., Petrosyan L. Strong Time-Consistent Solution for Cooperative Differential Games with Network Structure // Mathematics. 2021. Vol. 9, № 7. P. 755. doi:10.3390/math9070755
31. Galieva N. M., Korolev A. V., Ougolnitsky G. A. Dynamic Resource Allocation Networks in Marketing: Comparing the Effectiveness of Control Methods // Dynamic Games and Applications. 2023. Vol. 14, № 2. P. 362–395. doi:10.1007/s13235-023-00494-y

Приложение

Доказательство Предложения 2.1. Для того чтобы решить задачу, сформулированную в параграфе 2 с ограничениями-неравенствами, рассмотрим множество задач с ограничениями-равенствами следующего вида:

$$J = \int_0^T e^{-\rho t} \left(\sum_{j=1}^n x_j(t) - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n s_j^i u_j^i(x_j(t)) \right) dt \rightarrow \max,$$

$$\dot{x}_j = \sum_{i=1}^m b_j^i \sqrt{u_j^i(x_j(t))} + \sum_{l=1}^n a_{lj} x_l(t), \quad x_j(0) = x_{j0}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_j^i(x_j(t)) = R^t, \quad \int_0^T e^{-\rho t} R^t dt = R$$

при произвольном R , $0 \leq R \leq \Re$, и затем выберем то значение R , при котором достигается оптимальное решение.

Выпишем уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана:

$$\rho V - \frac{\partial V}{\partial t} = \max_{\substack{u_j^i, 1 \leq j \leq n, \\ 1 \leq i \leq m}} \left\{ \sum_{j=1}^n x_j(t) - R^t + \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} \left[\sum_{i=1}^m b_j^i \sqrt{u_j^i(x_j)} + \sum_{l=1}^n a_{lj} x_l \right] \right\}, \quad (\Pi 1)$$

при условии $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_j^i(x_j(t)) = R^t$. Максимизируя по u_j^i , $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, получаем

$$\frac{\partial V}{\partial x_j} b_j^i \frac{1}{2} (u_j^i)^{-\frac{1}{2}} = \mu,$$

где μ — множитель Лагранжа. Тогда для любых $1 \leq i_1$, $i_2 \leq m$, $1 \leq j_1$, $j_2 \leq n$ верно, что

$$\frac{u_{j_1}^{i_1}}{\left(b_{j_1}^{i_1} \frac{\partial V}{\partial x_{j_1}} \right)^2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(b_j^i \frac{\partial V}{\partial x_j} \right)^2 = R^t$$

и поэтому

$$u_j^i = \frac{R^t \left(b_j^i \frac{\partial V}{\partial x_j} \right)^2}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(b_j^i \frac{\partial V}{\partial x_j} \right)^2}. \quad (\text{П2})$$

Поскольку функцию Беллмана мы считаем линейной,

$$V(x, t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(t) x_j + \beta(t),$$

то можем записать уравнение (П1) в виде

$$\begin{aligned} & \rho \sum_{j=1}^n \alpha_j(t) x_j + \rho \beta(t) - \sum_{j=1}^n \alpha'_j(t) x_j + \beta'(t) = \\ & = \sum_{j=1}^n x_j(t) - R^t + \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^n \alpha_j(t) a_{lj} x_l + \sqrt{R^t} \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\alpha_j(t) b_j^i \right)^2}. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x_j , получаем дифференциальные уравнения

$$\alpha'_j(t) - \rho \alpha_j(t) + \sum_{l=1}^n \alpha_l(t) a_{jl} = -1 \quad (\text{П3})$$

для коэффициентов при x_j , $j = 1, 2, \dots, n$, и

$$\beta'(t) - \rho \beta(t) = R^t - \sqrt{R^t \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\alpha_j(t) b_j^i \right)^2}, \quad (\text{П4})$$

для свободного члена. Систему уравнений (П3) перепишем в матричной форме

$$\alpha' = (\rho I - A) \alpha - \varepsilon, \quad (\text{П5})$$

где A — матрица влияний, α — вектор-столбец коэффициентов α_j , $j = 1, 2, \dots, n$, I — единичная матрица, ε — n -мерный столбец единиц. Решая систему дифференциальных уравнений (П5), получаем:

$$\bar{\alpha} = (\rho I - A)^{-1} \varepsilon, \quad \alpha(t) = e^{(\rho I - A)t} C + (\rho I - A)^{-1} \varepsilon.$$

С учетом граничных условий $\alpha(T) = 0$, имеем

$$C = e^{(A - \rho I)T} (A - \rho I)^{-1} \varepsilon, \quad \alpha(t) = \left(e^{(A - \rho I)(T-t)} - I \right) (A - \rho I)^{-1} \varepsilon.$$

При $t = 0$ получаем

$$\alpha(0) = \left(e^{(A - \rho I)T} - I \right) (A - \rho I)^{-1} \varepsilon. \quad (\text{П6})$$

Уравнение (П4) решаем методом вариации произвольных постоянных:

$$\beta(t) = e^{\rho t} C(t),$$

откуда

$$C(t) = \int_0^t R^t e^{-\rho \tau} d\tau - \int_0^t e^{-\rho \tau} \sqrt{R^t \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\alpha_j(\tau) b_j^i \right)^2} d\tau + C.$$

Поскольку $C(T) = 0$, имеем

$$C = \int_0^T e^{-\rho\tau} \sqrt{R^t \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(\tau))^2} d\tau - \int_0^T e^{-\rho\tau} R^t d\tau,$$

и, следовательно,

$$C(t) = \int_t^T e^{-\rho\tau} \sqrt{R^t \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\alpha_j(\tau) b_j^i)^2} d\tau - \int_t^T e^{-\rho\tau} R^t d\tau.$$

Поэтому

$$\beta(t) = \int_t^T e^{-\rho(\tau-t)} \sqrt{R^t \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\alpha_j(\tau) b_j^i)^2} d\tau - \int_t^T e^{-\rho(\tau-t)} R^t d\tau.$$

При $t = 0$ имеем

$$\beta(0) = \int_0^T e^{-\rho\tau} \sqrt{R^t \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\alpha_j(\tau) b_j^i)^2} d\tau - \int_0^T e^{-\rho\tau} R^t d\tau.$$

Поскольку $\max_{\substack{u_j^i, 1 \leq j \leq n, \\ 1 \leq i \leq m}} J = V(x(0), 0)$, получаем

$$\max_{\substack{u_j^i, 1 \leq j \leq n, \\ 1 \leq i \leq m}} J = \sum_{j=1}^n \alpha_j(0) x_j(0) + \int_0^T e^{-\rho\tau} \sqrt{R^t \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(\tau))^2} d\tau - R, \quad (\Pi 7)$$

где $\alpha_j(0), j = 1, 2, \dots, n$ — компоненты вектора $\alpha(0)$ (см. (П6)). Теперь осталось решить изопериметрическую задачу — распределить ресурсы во времени так, чтобы максимизировать второе слагаемое в (П7):

$$\int_0^T e^{-\rho\tau} \sqrt{R^t \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(\tau))^2} d\tau \rightarrow \max$$

при условии $\int_0^T e^{-\rho\tau} R^t d\tau = R$.

Запишем лагранжиан:

$$L(t, R^t, (R^t)', \lambda) = e^{-\rho t} \sqrt{R^t \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(t))^2} - \lambda e^{-\rho t} R^t.$$

Уравнение Эйлера принимает вид

$$\frac{\partial L(t, R^t, (R^t)', \lambda)}{\partial R^t} = \frac{e^{-\rho t} \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(t))^2}}{2 \sqrt{R^t}} - \lambda e^{-\rho t} = 0.$$

Значит,

$$R^t = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (b_j^i \alpha_j(t))^2}{4\lambda^2}.$$

Значение множителя Лагранжа найдем из бюджетного ограничения:

$$\frac{\int_0^T e^{-\rho t} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(b_j^i \alpha_j(t)\right)^2 dt}{4\lambda^2} = R.$$

Имеем

$$\frac{1}{4\lambda^2} = \frac{R}{\int_0^T e^{-\rho t} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(b_j^i \alpha_j(t)\right)^2 dt},$$

тогда

$$R^t = \frac{R \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(b_j^i \alpha_j(t)\right)^2}{\int_0^T e^{-\rho t} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(b_j^i \alpha_j(t)\right)^2 dt}. \quad (\Pi 8)$$

Окончательно получаем

$$\beta(t) = \sqrt{R} \sqrt{\int_t^T e^{-\rho(\tau-t)} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(b_j^i \alpha_j(\tau)\right)^2 d\tau} - \frac{\int_t^T e^{-\rho(\tau-t)} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(b_j^i \alpha_j(\tau)\right)^2 d\tau}{\int_0^T e^{-\rho t} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(b_j^i \alpha_j(t)\right)^2 dt} R, \quad (\Pi 9)$$

$$\beta(0) = \sqrt{R} \sqrt{\int_0^T e^{-\rho\tau} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(b_j^i \alpha_j(\tau)\right)^2 d\tau} - R.$$

Общий выигрыш в случае кооперативного управления равен

$$\sum_{j=1}^n x_{j0} \alpha_j(0) + \sqrt{R} \sqrt{\int_0^T e^{-\rho\tau} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(b_j^i \alpha_j(\tau)\right)^2 d\tau} - R,$$

где $\alpha_j(0)$ — компоненты вектора (П6), $j = 1, 2, \dots, n$.

Подставляя выражение для R^t в (П2), получаем окончательный вид оптимального управления:

$$u_j^i = \frac{\left(b_j^i \frac{\partial V}{\partial x_j}\right)^2}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(b_j^i \frac{\partial V}{\partial x_j}\right)^2} \cdot \frac{R \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(b_j^i \alpha_j(t)\right)^2}{\int_0^T e^{-\rho t} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(b_j^i \alpha_j(t)\right)^2 dt} = \frac{R \left(b_j^i \alpha_j(t)\right)^2}{\int_0^T e^{-\rho t} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(b_j^i \alpha_j(t)\right)^2 dt}, \quad (\Pi 10)$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Возвращаясь к постановке задачи с ограничениями в виде неравенств, выясним, при каком значении R из промежутка $[0, \mathfrak{R}]$ общий выигрыш максимален. У нас R^t — это общие затраты в момент времени t , а R — суммарные затраты (с учетом дисконтирования) за весь период, причем распределение общих затрат R во времени, то есть выбор функции R^t , при любом R осуществляется оптимальным образом (мы варьировали полученное решение по R^t при каждом значении R).

Итак, решаем задачу

$$\sum_{j=1}^n x_{j0} \alpha_j(0) + \sqrt{R} \sqrt{\int_0^T e^{-\rho\tau} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(b_j^i \alpha_j(\tau)\right)^2 d\tau} - R \xrightarrow{R} \max$$

при $0 \leq R \leq \Re$. Из условия первого порядка по R находим

$$\frac{\sqrt{\int_0^T e^{-\rho\tau} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(b_j^i \alpha_j(\tau)\right)^2 d\tau}}{2\sqrt{R}} - 1 = 0,$$

или

$$R = \frac{1}{4} \int_0^T e^{-\rho\tau} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(b_j^i \alpha_j(\tau)\right)^2 d\tau.$$

Следовательно, оптимальная величина суммарных затрат

$$R^* = \begin{cases} \frac{1}{4} \int_0^T e^{-\rho\tau} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(b_j^i \alpha_j(\tau)\right)^2 d\tau, & \text{если } \int_0^T e^{-\rho\tau} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(b_j^i \alpha_j(\tau)\right)^2 dt < 4\Re, \\ \Re, & \text{если } \int_0^T e^{-\rho\tau} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(b_j^i \alpha_j(\tau)\right)^2 dt \geq 4\Re. \end{cases}$$

Таким образом, общий выигрыш

$$\sum_{j=1}^n x_{j0} \alpha_j(0) + \sqrt{R^*} \sqrt{\int_0^T e^{-\rho\tau} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(b_j^i \alpha_j(\tau)\right)^2 d\tau} - R^*,$$

равен в первом случае

$$\sum_{j=1}^n x_{j0} \alpha_j(0) + \frac{1}{4} \int_0^T e^{-\rho\tau} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(b_j^i \alpha_j(\tau)\right)^2 d\tau,$$

а во втором случае

$$\sum_{j=1}^n x_{j0} \alpha_j(0) + \sqrt{\Re} \sqrt{\int_0^T e^{-\rho\tau} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(b_j^i \alpha_j(\tau)\right)^2 d\tau} - \Re.$$

Поступила в редакцию 11.02.2025, окончательный вариант — 10.03.2025.

Галиева Наиля Мансуровна, бизнес-аналитик, ПАО «Татнефть» имени В. Д. Шашина, shaihulova.n@gmail.com

Королёв Алексей Васильевич, доктор физ.-мат. наук, доцент кафедры алгоритмической математики СПбГЭТУ «ЛЭТИ», danitschi@gmail.com

Угольницкий Геннадий Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и программирования, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича, gaugolnickiy@sfedu.ru

Computer tools in education, 2025

№ 1: 5–26

<http://cte.eltech.ru>

[doi:10.32603/2071-2340-2025-1-5-26](https://doi.org/10.32603/2071-2340-2025-1-5-26)

Dynamic Cooperative Game Theoretic Models of Opinion Control

Galieva N. M.¹, Business Analyst, shaihulova.n@gmail.com
Korolev A. V.², Doctor. Sc., Associate Professor, danitschi@gmail.com
Ougolnitsky G. A.³, Doctor. Sc., Professor, gaugolnitskiy@srfedu.ru

¹Tatneft, 75 Lenina Street, 423450, Almet'yevsk, Republic of Tatarstan, Russian Federation

²Saint Petersburg Electrotechnical University,

5, building 3, Professora Popova st., 197022, Saint Petersburg, Russia

³Southern Federal University, 8A Milchakova st., 344090, Rostov-on-Don, Russia

Abstract

In this paper we consider dynamic cooperative game theoretic models of control on networks. We suppose that all strong subgroups are determined in the stage of analysis of the influence digraph, and the control impact is exerted only to the members of those subgroups because they determine all stable final opinions. An agent's opinion is interpreted as his expenses for buying goods (services) of a firm. We show that due to the model assumptions the characteristic functions by Neumann-Morgenstern, Petrosyan-Zaccour, and Gromova-Petrosyan coincide. We find Shapley value for this common characteristic function, prove its time inconsistency, and built an imputation distribution procedure. We compared the components of Shapley value with players' payoffs for different forms of non-cooperative behavior.

Keywords: *dynamic cooperative games, inefficiency of equilibria, models of influence and control on networks, Shapley value.*

Citation: N. M. Galieva, A. V. Korolev, and G. A. Ougolnitsky, "Dynamic Cooperative Game Theoretic Models of Opinion Control," *Computer tools in education*, no. 1, pp. 5–26, 2025 (in Russian); [doi:10.32603/2071-2340-2025-1-5-26](https://doi.org/10.32603/2071-2340-2025-1-5-26)

References

1. J. R. French, "A formal theory of social power," *The Psychological Review*, vol. 63, pp. 181–194, 1956; [doi:10.1037/h0046123](https://doi.org/10.1037/h0046123)
2. F. Harary, "A Criterion for Unanimity in French's Theory of Social Power," in *Studies in Social Power*, Ann Arbor, MI, USA: Institute of Sociological Research, pp. 168–182, 1959.
3. M. H. DeGroot, "Reaching a Consensus," *J. of American Statistical Association*, vol. 69, pp. 118–121, 1974; [doi:10.1080/01621459.1974.10480137](https://doi.org/10.1080/01621459.1974.10480137)
4. M. Jackson, "Social and Economic Networks," Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 2008.
5. M. O. Jackson and A. Wolinsky, "A Strategic Model of Social and Economic Networks," *Journal of Economic Theory*, vol. 71, no. 1, pp. 44–74, 1996; [doi:10.1006/jeth.1996.0108](https://doi.org/10.1006/jeth.1996.0108)
6. D. A. Gubanov, D. A. Novikov, and A. G. Chkhartishvili, "Models of influence in social networks (a survey)," *Large-Scale Systems Control*, vol. 27, pp. 205–281, 2009.
7. A. Chkhartishvili, D. Gubanov, and D. Novikov, *Social Networks: Models of Information Influence, Control, and Confrontation*, Springer Publishers, 2019; [doi:10.1007/978-3-030-05429-8](https://doi.org/10.1007/978-3-030-05429-8)
8. D. A. Novikov, "Games and networks," *Automation and Remote Control*, vol. 75, pp. 1145–1154, 2014; [doi:10.1134/s0005117914060149](https://doi.org/10.1134/s0005117914060149)
9. M. Jackson and Y. Zenou, "Games on networks," in *Handbook of game theory*, P. Young and S. Zamir, eds., Amsterdam: Elsevier Science, pp. 95–163, 2015; [doi:10.1016/b978-0-444-53766-9.00003-3](https://doi.org/10.1016/b978-0-444-53766-9.00003-3)

10. S. Jorgensen and G. Zaccour, *Differential Games in Marketing*, Totnes, Devon, UK: Kluwer Academic Publishers, 2004.
11. S. Jorgensen and G. Zaccour, "A Survey of Game-Theoretic Models of Cooperative Advertising," *European J. of Operations Research*, vol. 237(1), pp. 1–14, 2014; doi:10.1016/j.ejor.2013.12.017
12. A. Sedakov and M. Zhen, "Opinion dynamics game in a social network with two influence nodes," *Vestnik SPb Gos. Univ. Ser. Appl. Math. Inform. Sci. Contr. Proc.*, vol. 15, no. 1, pp. 118–125, 2019; doi:10.21638/11701/spbu10.2019.109
13. M. Zhen, "Stackelberg equilibrium in opinion dynamics game in social network with two influence nodes," *Contributions to game theory and management*, vol. 12, pp. 366–386, 2019.
14. M. T. Agieva, A. V. Korolev, and G. A. Ougolnitsky, "Modeling and Simulation of Impact and Control in Social Networks" *Modeling and Simulation of Social-Behavioral Phenomena in Creative Societies*, pp. 29–40, 2019; doi:10.1007/978-3-030-29862-3_3
15. A. Korolev and G. Ougolnitsky, "Optimal resource allocation in the difference and differential Stackelberg games on marketing networks," *Journal of Dynamics and Games*, vol. 7, no. 2, pp. 141–162, 2020; doi:10.3934/jdg.2020009
16. M. T. Agieva, A. V. Korolev, and G. A. Ougolnitsky, "Modeling and Simulation of Impact and Control in Social Networks with Application to Marketing," *Mathematics*, vol. 8, no. 9, p. 1529, 2020; doi:10.3390/math8091529
17. M. T. Agieva, A. V. Korolev, and G. A. Ougolnitsky, "Game Theoretic Models of Sustainable Management in Marketing Networks," *Contributions to Game Theory and Management*, vol. 13, pp. 24–56, 2020.
18. M. T. Agieva, O. I. Gorbaneva, and G. A. Ougolnitsky, "Dynamic SPICE-Model of Resource Allocation in Marketing Networks with Co-Directed Interests," in *Proc. of 2020 2nd International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA)*, pp. 161–165, 2020; doi:10.1109/summa50634.2020.9280699
19. M. Agieva, A. Korolev, and G. Ougolnitsky, "Static and Dynamic Game Theoretic Models of Opinion Control in Marketing Network," *Contributions to Game Theory and Management*, vol. 14, pp. 8–19, 2021.
20. N. Nisan et al., eds, *Algorithmic Game Theory*, Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2007.
21. T. Roughgarden, *Selfish Routing and the Price of Anarchy*, Cambridge, UK: MIT Press, 2005.
22. C. H. Papadimitriou, "Algorithms, games, and the Internet," in *Proc. 33rd Symp. Theory of Computing*, pp. 749–753, 2001.
23. T. Basar and Q. Zhu, "Prices of Anarchy, Information, and Cooperation in Differential Games," *Dynamic Games and Applications*, vol. 1(1), pp. 50–73, 2011.
24. J. von Neumann and O. Morgenstern, "Theory of Games and Economic Behavior," Princeton, NJ, US: Princeton University Press, 1953.
25. L. Petrosjan and G. Zaccour, "Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction," *J. of Economic Dynamics and Control*, vol. 27(3), pp. 381–398, 2003.
26. E. V. Gromova and L. A. Petrosyan, "On an approach to constructing a characteristic function in cooperative differential games," *Automation and Remote Control*, vol. 78, 1680–1692, 2017.
27. L. S. Shapley, "17. A Value for n-Person Games," *Contributions to the Theory of Games (AM-28)*, vol. 2, pp. 307–318, 1953; doi:10.1515/9781400881970-018
28. A. Tur and L. Petrosyan, "Cooperative optimality principals in differential games on networks," *Mathematical Game Theory and Applications*, vol. 12, no. 4, pp. 93–111, 2020; doi:10.17076/mgta_2020_4_27
29. L. A. Petrosyan and D. W. K. Yeung, "Shapley value for differential network games: theory and application," *J. of Dynamics and Games*, vol. 8, no. 2, pp. 151–166, 2021; doi:10.3934/jdg.2020021
30. A. Tur and L. Petrosyan, "Strong Time-Consistent Solution for Cooperative Differential Games with Network Structure," *Mathematics*, vol. 9, no. 7, p. 755, 2021; doi:10.3390/math9070755
31. N. M. Galieva, A. V. Korolev, and G. A. Ougolnitsky, "Dynamic Resource Allocation Networks in Marketing: Comparing the Effectiveness of Control Methods," *Dynamic Games and Applications*, vol. 14, no. 2, pp. 362–395, 2023; doi:10.1007/s13235-023-00494-y

Received 11-02-2025, the final version — 10-03-2025.

Nailya Galieva, Business Analyst, Tatneft, shaihulova.n@gmail.com

Aleksey Korolev, Doctor. Sc. (Phys.-Math.), Associate Professor of Algorithmic Mathematics Department, Saint Petersburg Electrotechnical University, danitschi@gmail.com

Gennady Ougolnitsky, Doctor. Sc. (Phys.-Math.), Associate Professor, Head of the Applied Mathematics and Programming Department, Southern Federal University, gaugolnickiy@sfnu.ru