Компьютерные инструменты в образовании, 2024
№ 1: 18–31
УДК: 512.77:519.111.1:004.43
http://cte.eltech.ru
doi:10.32603/2071-2340-2024-1-18-31

ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРОПИЧЕСКИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ СОМОСА, В ПАКЕТЕ GFAN

Михайлов Ф.[1], аспирант, ✉ mifa_98@mail.ru

[1]Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина), ул. Профессора Попова, 5, корп. 3, 197022, Санкт-Петербург, Россия

Аннотация

В настоящей работе исследуются тропические рекуррентные последовательности, ассоциированные с последовательностями Сомоса. Классические последовательности Сомоса имеют приложения в теории эллиптических кривых. Из лорановости классических последовательностей можно вывести закономерность между классическими последовательностями и их тропическими аналогами.

Наибольший интерес представляет рост размерности пространства решений тропических последовательностей в зависимости от длины конечной последовательности. Для множества тропических последовательностей, описываемых тропическими рекуррентными соотношениями, Д. Ю. Григорьевым была высказана гипотеза о стабилизации максимальных размерностей компонент соответствующих тропических предмногообразий. Эта гипотеза доказана для тропических линейных рекуррентных последовательностей. В рамках данной работы для тропических рекуррентных последовательностей, ассоциированных с последовательностями Сомос-4 и Сомос-5, были исследованы соответствующие тропические предмногообразия с помощью пакета Gfan с целью проверки гипотезы Григорьева.

Ключевые слова: *тропическое полукольцо, тропикализация, тропическое предмногообразие, тропическая рекуррентная последовательность, тропическая энтропия, пакет Gfan.*

Цитирование: Михайлов Ф. Вычисление тропических последовательностей, ассоциированных с последовательностями Сомоса, в пакете Gfan // Компьютерные инструменты в образовании. 2024. № 1. С. 18–31. doi:10.32603/2071-2340-2024-1-18-31

1. ВВЕДЕНИЕ

Тропическая математика — молодой раздел математики, связанный с изучением полуколец с идемпотентным сложением, возникший в 90-е годы прошлого века. Несмотря на новизну, она уже нашла свое применение в алгебре, геометрии, математической физике, биологии [1], экономике [2], теории нейронных сетей [3], динамическом программировании, а также в других областях современной прикладной и теоретической математики.

Одним из основных объектов тропической математики является *тропическое полукольцо* $(\mathbb{R}\cup\{-\infty\},\oplus,\otimes)$. Это множество состоит из вещественных чисел с дополнительным элементом — минус бесконечностью. В тропическом полукольце классические операции сложения и умножения над вещественными числами заменяются на операции взятия максимума и классическое сложение соответственно: $x\oplus y := \max(x,y)$, $x\otimes y := x+y$. В тропической математике есть свои аналоги полиномиальной алгебры, линейной алгебры и других разделов математики [4]. Также можно построить теорию тропических рекуррентных соотношений.

Эта работа является продолжением работы [5], которая была посвящена тропическим линейным рекуррентным последовательностям. В рамках этой работы вычисляются тропические рекуррентные последовательности, ассоциированные с последовательностями Сомоса в пакете Gfan. Целью данной работы, как и предыдущей, является проверка гипотезы Григорьева о стабилизации максимальных размерностей решений систем тропических уравнений, заданных полиномами, которые зависят от длины рассматриваемой последовательности. Эта гипотеза доказана для тропических линейных рекуррентных последовательностей [6]. Справедливость такой гипотезы позволяла бы вычислять размерности этих решений для систем произвольной длины.

Gfan — это программный пакет для вычисления универсальных базисов Грёбнера, некоторых связанных с ними геометрических объектов (вееров Грёбнера) и тропических многообразий, разработанный в 2005 году А. Йенсеном на основе его алгоритмов, описанных в диссертации [7]. Пакет Gfan позволяет вычислять универсальные базисы Грёбнера, веера Грёбнера, тропические предмногообразия, многообразия, заданные системой тропических полиномов, и другие объекты тропической геометрии и теории базисов Грёбнера. В настоящий момент пакет Gfan является самым мощным программным средством для таких вычислений. Gfan распространяется в качестве стандартного пакета Linux, входит в состав дистрибутива Debian.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $k \ge 2$ — натуральное число и

$$\alpha = \left\{\alpha_i | 1 \le i \le [k/2]\right\}, \quad x = \{x_j | -k/2 < j \le [k/2]\}$$

— два множества независимых формальных переменных в количестве $[k/2]$ в первом случае и k во втором. Последовательность рациональных функций Сомос-k от переменных α и x, $S_k(n) = S_k(n;\alpha;x)(n\in\mathbb{Z})$, определяется рекуррентным соотношением

$$S_k\left(n+\left[\frac{k+1}{2}\right]\right)S_k\left(n-\left[\frac{k}{2}\right]\right) = \sum_{1\le i\le k/2}\alpha_i S_k\left(n+\left[\frac{k+1}{2}\right]-i\right)S_k\left(n-\left[\frac{k}{2}\right]+i\right).$$

Впервые эту последовательность при $k=6$, $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=1$, $x_{-2}=x_{-1}=x_0=x_1=x_2=x_3=1$ рассмотрел Майкл Сомос в связи с изучением свойств эллиптических тэта-функций.

При $k=2, \alpha=\{\alpha_1\},\ x=\{x_0,x_1\}$

$$S_2(n+1)S_2(n-1) = \alpha_1 S_2^2(n),$$

с помощью индукции по n можно получить равенство

$$S_2(n) = \alpha_1^{n(n-1)/2} x_0^{1-n} x_1^n.$$

При $k = 3, \alpha = \{\alpha_1\}, x = \{x_{-1}, x_0, x_1\}$

$$S_3(n+2)S_3(n-1) = \alpha_1 S_3(n+1)S_3(n),$$

с помощью индукции по n можно получить равенство

$$S_3(n) = \begin{cases} \alpha_1^{n^2/4} x_{-1}^{-n/2} x_0 x_1^{n/2}, \text{если } n \text{ – чётное}, \\ \alpha_1^{(n^2-1)/4} x_{-1}^{(1-n)/2} x_1^{(1+n)/2}, \text{если } n \text{ – нечётное}. \end{cases}$$

При $k \geq 4$ ситуация усложняется. В работах [8, 9] были найдены явные выражения общего члена последовательностей Сомос-4 и Сомос-5 через сигма-функцию Вейерштрасса, ассоциированную с некоторой эллиптической кривой. В работе [10] найдено представление общего члена последовательности Сомос-6 через сигма-функцию Клейна на гиперэллиптической кривой 2-го рода.

В настоящей работе исследуются ассоциированные с $S_k(n)$ тропические последовательности $p_k(n)$, удовлетворяющие рекуррентному соотношению

$$p_k\left(n + \left[\frac{k+1}{2}\right]\right) + p_k\left(n - \left[\frac{k}{2}\right]\right) = \min_{1 \leq i \leq k/2} \left\{ p_k\left(n + \left[\frac{k+1}{2}\right] - i\right) + p_k\left(n - \left[\frac{k}{2}\right] + i\right) \right\}. \qquad (1)$$

Интересным является факт, что тропический аналог таких последовательностей связан с классическими последовательностями Сомоса некоторым соотношением. В работе [11] доказано, что $S_k(n)$ является полиномом Лорана от начальных переменных x_j и классическим полиномом от α_i над кольцом целых чисел. Поэтому его можно записать в виде

$$S_k(n) = \left(\prod_{-k/2 < j \leq [k/2]} x_j^{p_k^{(j)}(n)} \right) P_k(n),$$

где $P_k(n) = P_k(n; \alpha; x)$ — полином с целыми коэффициентами, а $p_k^{(j)}(n)$ — целочисленные последовательности.

Последовательность $p_k^{(j)}(n)$ является тропической рекуррентной последовательностью, удовлетворяющей соотношению 1 с начальными условиями:

$$p_k^{(j)}(i) = \begin{cases} 1, \text{ если } i = j, \\ 0, \text{ если } i \neq j. \end{cases}$$

В настоящей работе рассматриваются все решения последовательности $p_k(n)$ для конечного $0 \leq n \leq s$ при $k = 4$ и $k = 5$. Для этого тропическая рекуррентная последовательность преобразуется в систему тропических полиномов. Для решения системы тропических полиномов вычисляется тропическое предмногообразие системы с помощью пакета Gfan. Определим тропическое предмногообразие.

Пусть задан некоторый вектор $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$, который используется как весовой вектор некоторого мономиального упорядочивания. Отрицательные значения весов также допускаются. При сравнении двух мономов $m_1 = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$ и $m_2 = x_1^{j_1} x_2^{j_2} \ldots x_n^{j_n}$ весовым вектором w сравниваются взвешенные суммы степеней мономов $w_1 i_1 + \cdots + w_n i_n$ и $w_1 j_1 + \cdots + w_n j_n$. Моном m_1 старше многома m_2, если его взвешенная сумма больше.

Начальной формой $in_w(f)$ полинома f называют сумму старших мономов этого полинома при взвешивании степеней мономов вектором w. Например, если $g = x+2y+z+1$, то $in_{(0,0,1)}(g) = z$ и $in_{(0,0,-1)}(g) = x + 2y + 1$. Старших мономов при некоторых весовых векторах может быть несколько. Это является частью описания тропической гиперповерхности. *Тропическая гиперповерхность*, определяемая полиномом f, — это множество

$$T(f) = \left\{ w \in \mathbb{R}^n : in_w(f) \text{ не является мономом} \right\}.$$

Понятие тропической гиперповерхности является тропикализацией понятия классической гиперповерхности, связанной с полиномом, то есть множества нулей тропического полинома f. *Тропикализация* — переход от объектов классической математики к объектам тропической математики, который осуществляется следующим образом: классические сложение, умножение и возведение в степень заменяются на их тропические аналоги.

В случае с тропикализацией классических полиномов $\mathrm{Trop}(f)$, помимо замены классических операций на их тропические аналоги, коэффициенты при мономах полагаются равными нулю. В примере выше тропикализацией полинома g является $\mathrm{Trop}(g) = 0 \otimes x \oplus 0 \otimes y \oplus 0 \otimes z \oplus 0 = x \oplus y \oplus z \oplus 0$. В данном случае тропическая гиперповерхность является множеством нулей тропического полинома, то есть является множеством негладкости получившегося полинома. Как и с тропическими линейными рекуррентными соотношениями, негладкость полинома возникает в тех точках, в которых достигается максимум на двух или более мономах.

Пересечение конечного числа тропических гиперповерхностей называют *тропическим предмногообразием*.

Для рассмотрения задачи стабилизации максимальных размерностей решений систем тропических рекуррентных уравнений будем говорить о тропической энтропии. Для определения тропической энтропии будем рассматривать конечную тропическую последовательность $y = (y_0, \dots, y_s)$, которая описывается рекуррентным соотношением. Обозначим через $D_s \in \mathbb{R}^s$ набор из всех конечных тропических последовательностей y, и $d_s := \dim D_s$. Функция d_s названа тропической функцией Гильберта в [6]. В этой работе доказано, что тропическая функция Гильберта от линейных тропических рекуррентных соотношений квазилинейна для достаточно больших размерностей.

Тропической энтропией называют предел $H := \lim\limits_{s \to \infty} \frac{d_s}{s}$. Существование этого предела доказано в работе [12]. Вычисление значения тропической энтропии — трудная задача. В настоящей работе формулируются гипотезы о значениях, которые может принимать тропическая энтропия. Для этого вычисляются значения d_s, а затем соответствующие тропические предмногообразия. Подробные вычисления будут приведены ниже.

3. ВЫЧИСЛЕНИЯ В ПАКЕТЕ GFAN

3.1. Сомос-4

При $k = 4$ тропическая рекуррентная последовательность, ассоциированная с последовательностью Сомоса, выглядит следующим образом

$$p_4(n+2) + p_4(n-2) = \min\left\{ p_4(n+1) + p_4(n-1), 2p_4(n) \right\}.$$

Сделаем замену

$$q_4(n) = \Delta^2 p_4(n) = \Delta p_4(n+1) - \Delta p_4(n) = p_4(n+2) - 2p_4(n+1) + p_4(n)$$

и приведём тропическую последовательность к виду

$$q_4(n) + q_4(n-1) + q_4(n-2) = \min\{0, q_4(n-1)\}.$$

При переносе получаем рекуррентное соотношение

$$q_4(n) + q_4(n-1) + q_4(n-2) + \max\{0, q_4(n-1)\} = 0.$$

Пусть $y_n = q_4(n)$. Воспользуемся дистрибутивностью и получим

$$\max\{y_{n-2} + y_{n-1} + y_n, y_{n-2} + 2y_{n-1} + y_n\} = 0,$$

или в тропической форме

$$f_4 = y_{n-2} \otimes y_{n-1} \otimes y_n \oplus y_{n-2} \otimes y_{n-1}^{\otimes 2} \otimes y_n = 0. \tag{2}$$

Таким образом, мы получили тропический полином. Вычисление тропического предмногообразия системы таких полиномов с различными n позволит найти точки, в которых мономы $y_{n-2} \otimes y_{n-1} \otimes y_n$ и $y_{n-2} \otimes y_{n-1}^{\otimes 2} \otimes y_n$ равны. Чтобы найти корни, тропически сложим полином из 2 с 0.

$$\hat{f}_4 = f_4 \oplus 0 = y_{n-2} \otimes y_{n-1} \otimes y_n \oplus y_{n-2} \otimes y_{n-1}^{\otimes 2} \otimes y_n \oplus 0. \tag{3}$$

Тропическая гиперповерхность полинома 3 будет объединением лучей, удовлетворяющих следующим условиям:

1. $0 < y_{n-2} \otimes y_{n-1} \otimes y_n = y_{n-2} \otimes y_{n-1}^{\otimes 2} \otimes y_n$,
2. $y_{n-2} \otimes y_{n-1}^{\otimes 2} \otimes y_n < y_{n-2} \otimes y_{n-1} \otimes y_n = 0$,
3. $y_{n-2} \otimes y_{n-1} \otimes y_n < y_{n-2} \otimes y_{n-1}^{\otimes 2} \otimes y_n = 0$,
4. $y_{n-2} \otimes y_{n-1} \otimes y_n = y_{n-2} \otimes y_{n-1}^{\otimes 2} \otimes y_n = 0$.

Для решения уравнения 2 подходят все условия, кроме первого. Точки, удовлетворяющие первому условию, можно найти, вычислив тропические предмногообразия системы этих полиномов до тропического сложения с 0 для различных n. Следовательно, ход решения имеет вид: вычислить тропическое предмногообразие системы полиномов f_4 (2), вычислить тропическое предмногообразие системы полиномов $\hat{f}_4$ (3) и вычесть из второго предмногообразия те лучи и конусы, которые не удовлетворяют уравнению.

Пакет Gfan позволяет вычислить тропическое предмногообразие для конечного количества полиномов в системе. Поэтому систему тропических полиномов будем составлять из $s-1$ полинома при $2 \le n \le s$:

$$\begin{cases} h_0 = y_0 \otimes y_1 \otimes y_2 \oplus y_0 \otimes y_1^{\otimes 2} \otimes y_2, \\ \ldots, \\ h_{s-2} = y_{s-2} \otimes y_{s-1} \otimes y_s \oplus y_{s-2} \otimes y_{s-1}^{\otimes 2} \otimes y_s. \end{cases}$$

Затем будем увеличивать s для наблюдения изменения роста размерности решений рекуррентного соотношения.

В качестве примера рассмотрим вычисления при $s = 10$. Входные данные функции **gfan_tropicalintersection** пакета Gfan [13] для полинома f_4 представлены в листинге 1.

Листинг 1. Пример входных данных без добавления нуля при $k = 4$ и $s = 10$

```
Q[y00,y01,y02,y03,y04,y05,y06,y07,y08,y09,y10]
{
y00y01y02+y00y01y01y02, y01y02y03+y01y02y02y03, y02y03y04+y02y03y03y04, y03y04y05+
    y03y04y04y05, y04y05y06+y04y05y05y06, y05y06y07+y05y06y06y07, y06y07y08+
    y06y07y07y08, y07y08y09+y07y08y08y09, y08y09y10+y08y09y09y10}
```

Пример выходных данных представлен в листинге 2. По этим данным можно заметить, что у этого полинома только два решения: $y_0 = \text{const}, y_i = 0$ $(1 \le i \le 10)$ и $y_{10} = \text{const}, y_i = 0$ $(0 \le i \le 9)$. Для выполнения условия $y_{n-2} \otimes y_{n-1}^{\otimes 2} \otimes y_n = y_{n-2} \otimes y_{n-1} \otimes y_n \ge 0$ получаем два луча $y_0 \ge 0, y_i = 0$ $(1 \le i \le 10)$ и $y_{10} \ge 0, y_i = 0$ $(0 \le i \le 9)$. Это означает, что в тропическом предмногообразии для систем полиномов $\hat{f}_4$ нужно будет вычесть эти лучи, чтобы найти решения уравнения и их размерность.

Листинг 2. Пример выходных данных без добавления нуля при $k = 4$ и $s = 10$

```
_application fan
_version 2.2
_type SymmetricFan

AMBIENT_DIM
11

DIM
2

LINEALITY_DIM
2

RAYS

N_RAYS
0

LINEALITY_SPACE
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1

CONES
{}      # Dimension 2
```

Входные данные для полинома $\hat{f}_4$ представлены в листинге 3.

Листинг 3. Пример входных данных с добавлением нуля при $k = 4$ и $s = 10$

```
Q[y00,y01,y02,y03,y04,y05,y06,y07,y08,y09,y10]
{
y00y01y02+y00y01y01y02+0, y01y02y03+y01y02y02y03+0, y02y03y04+y02y03y03y04+0,
    y03y04y05+y03y04y04y05+0, y04y05y06+y04y05y05y06+0, y05y06y07+y05y06y06y07+0,
    y06y07y08+y06y07y07y08+0, y07y08y09+y07y08y08y09+0, y08y09y10+y08y09y09y10+0}
```

Часть выходных данных представлена в листинге 4. По данным заметим, что тропическое предмногообразие образуется 27-ю различными лучами, среди которых есть лучи, не соответствующие уравнению 2: № 8 и № 26. Конусами наибольшей степени являются конусы размерности 4, образованные лучами (№ 2, № 3, № 8, № 26), (№ 3, № 8, № 12, № 26) или (№ 8, № 12, № 25, № 26). Такие конусы не подходят в качестве решений уравнения 2, так как в первом и последнем уравнении получается значение большее 0, а не равное 0.

Листинг 4. Пример выходных данных с добавлением нуля при $k = 4$ и $s = 10$

```
_application fan
_version 2.2
_type SymmetricFan

AMBIENT_DIM
11

DIM
4

LINEALITY_DIM
0

RAYS
-2 1 0 -1 1 -1 0 1 -2 1 0          # 0
-2 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0   # 1
-1 0 1 -2 1 0 -1 1 -1 0 1          # 2
-1 0 1 -2 1 0 0 0 0 0 0 # 3
-1 1 -1 0 1 -2 1 0 -1 1 -1         # 4
-1 1 -1 0 1 -2 1 0 0 0 0           # 5
0 -1 1 -1 0 1 -2 1 0 -1 1          # 6
0 -1 1 -1 0 1 -2 1 0 0 0           # 7
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1    # 8
0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 -2   # 9
0 0 0 0 0 0 0 0 1 -2 1   # 10
0 0 0 0 0 0 0 1 -2 1 0   # 11
0 0 0 0 0 0 1 -2 1 0 -1 # 12
0 0 0 0 0 1 -2 1 0 -1 1 # 13
0 0 0 0 0 1 -2 1 0 0 0   # 14
0 0 0 0 1 -2 1 0 -1 1 -1           # 15
0 0 0 0 1 -2 1 0 0 0 0   # 16
0 0 0 1 -2 1 0 -1 1 -1 0           # 17
0 0 0 1 -2 1 0 0 0 0 0   # 18
0 1 -2 1 0 -1 1 -1 0 1 -2          # 19
0 1 -2 1 0 0 0 0 0 0 0   # 20
1 -2 1 0 -1 1 -1 0 1 -2 1          # 21
1 -2 1 0 0 0 0 0 0 0 0   # 22
1 -1 0 1 -2 1 0 -1 1 -1 0          # 23
1 -1 0 1 -2 1 0 0 0 0 0 # 24
1 0 -1 1 -1 0 1 -2 1 0 -1          # 25
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0    # 26
```

В этом случае среди конусов размерности 3 можно найти конусы, которые не содержат лучей № 8 и № 26. Например, конус, образованный лучами (№ 11, № 18, № 24), или конус, образованный лучами (№ 17, № 18, № 23, № 24), имеют размерность 3.

При других s есть такие же два луча, которые нужно исключать для достижения равенства 3. Размерности решений для других значений s представлены в таблице 1. Можно заметить, что при увеличении количества членов последовательности на 4, размерность пространства решений увеличивается на 1. Естественно предположить, что тропическая энтропия будет равна 1/4.

Таблица 1. Вычисленные размерности пространства решений уравнения 2

s	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
d_s	2	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6

3.2. Сомос-5

При $k = 5$ тропическая рекуррентная последовательность, ассоциированная с последовательностью Сомоса, выглядит следующим образом:

$$p_5(n+3) + p_5(n-2) = \min\left\{p_5(n+2) + p_5(n-1), p_5(n+1) + p_5(n)\right\}.$$

Сделаем замену

$$q_5(n) = \Delta^2 p_5(n)$$

и получим соотношение

$$q_5(n-2) + q_5(n-1) + q_5(n) + q_5(n+1) + \max\{0, q_5(n-1) + q_5(n)\} = 0.$$

Пусть $y_n = q_5(n)$. Воспользуемся дистрибутивностью и получим

$$f_5 = y_{n-2} \otimes y_{n-1} \otimes y_n \otimes y_{n+1} \oplus y_{n-2} \otimes y_{n-1}^{\otimes 2} \otimes y_n^{\otimes 2} \otimes y_{n+1} = 0. \tag{4}$$

По аналогии с предыдущим случаем в этом случае тропически добавляем 0, получив тропический полином

$$\hat{f}_5 = f_5 \oplus 0 = y_{n-2} \otimes y_{n-1} \otimes y_n \otimes y_{n+1} \oplus y_{n-2} \otimes y_{n-1}^{\otimes 2} \otimes y_n^{\otimes 2} \otimes y_{n+1} \oplus 0. \tag{5}$$

В качестве примера рассмотрим вычисления при $s = 10$. Входные данные функции **gfan_tropicalintersection** пакета Gfan для полинома f_5 представлены в листинге 5.

Листинг 5. Пример входных данных без добавления нуля при $k = 5$ и $s = 10$

```
Q[y00,y01,y02,y03,y04,y05,y06,y07,y08,y09,y10]
{
y00y01y02y03+y00y01y01y02y02y03, y01y02y03y04+y01y02y02y03y03y04, y02y03y04y05+
    y02y03y03y04y04y05, y03y04y05y06+y03y04y04y05y05y06, y04y05y06y07+
    y04y05y05y06y06y07, y05y06y07y08+y05y06y06y07y07y08, y06y07y08y09+
    y06y07y07y08y08y09, y07y08y09y10+y07y08y08y09y09y10}
```

Пример выходных данных представлен в листинге 6. По этим данным можно заметить, что у этого полинома только три решения: $y_0 = \text{const}, y_i = 0$ $(1 \le i \le 10)$, чередующие одинаковые значения членов последовательности $y_i (1 \le i \le 9)$ с $y_0 = y_{10} = 0$ и $y_{10} = \text{const}, y_i = 0$ $(0 \le i \le 9)$. Первое и третье решения не подходят под условие 5. Чередующиеся члены последовательности из-за чётности слагаемых будут всегда давать 0. Следовательно, из тропического предмногообразия системы полиномов с добавлением 0 убираем два луча.

Листинг 6. Пример выходных данных без добавления нуля при $k = 5$ и $s = 10$

```
_application fan
_version 2.2
_type SymmetricFan

AMBIENT_DIM
11

DIM
3

LINEALITY_DIM
3

RAYS

N_RAYS
0

LINEALITY_SPACE
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 1 −1 1 −1 1 −1 1 −1 1 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1

CONES
{}      # Dimension 3
```

Входные данные для полинома 5 представлены в листинге 7.

Листинг 7. Пример входных данных с добавлением нуля при $k = 5$ и $s = 10$

```
Q[y00,y01,y02,y03,y04,y05,y06,y07,y08,y09,y10]
{
y00y01y02y03+y00y01y01y02y02y03+0, y01y02y03y04+y01y02y02y03y03y04+0, y02y03y04y05
    +y02y03y03y04y04y05+0, y03y04y05y06+y03y04y04y05y05y06+0, y04y05y06y07+
    y04y05y05y06y06y07+0, y05y06y07y08+y05y06y06y07y07y08+0, y06y07y08y09+
    y06y07y07y08y08y09+0, y07y08y09y10+y07y08y08y09y09y10+0}
```

Часть выходных данных представлена в листинге 8. Можно заметить, что тропическое предмногообразие образуется 22-я различными лучами, среди которых есть лучи, не соответствующие уравнению 4: № 10 и № 21. Это те лучи, которые нужно исключить, так как при них значения последнего и первого полинома соответственно становятся больше 0. Помимо лучей есть линейное пространство с чередующимися одинаковыми членами последовательности.

Листинг 8. Пример выходных данных с добавлением нуля при $k = 5$ и $s = 10$

```
_application fan
_version 2.2
_type SymmetricFan

AMBIENT_DIM
11
```

```
DIM
5

LINEALITY_DIM
1

RAYS
-19 8 3 -3 3 -3 3 -3 3 -3 3        # 0
-16 5 6 -6 -5 5 6 -17 6 5 -5       # 1
-6 -5 5 6 -17 6 5 -5 5 -5 5        # 2
-6 6 -6 6 5 -16 5 6 -6 -5 5        # 3
-5 5 6 -17 6 5 -5 -6 6 5 -16       # 4
-4 -7 7 4 -15 4 7 -7 -4 4 7        # 5
-4 4 -4 4 -4 4 -4 4 7 -18 7        # 6
-4 4 -4 4 -4 4 7 -18 7 4 -4        # 7
-4 4 -4 4 7 -18 7 4 -4 4 -4        # 8
-4 4 7 -18 7 4 -4 4 -4 4 -4        # 9
-1 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 1 10        # 10
3 -3 -8 8 3 -14 3 8 -8 -3 3        # 11
3 -3 3 -3 3 -3 3 -3 3 8 -19        # 12
4 -4 4 -4 4 -4 4 7 -18 7 4         # 13
4 7 -18 7 4 -4 4 -4 4 -4 4         # 14
5 -16 5 6 -6 -5 5 6 -17 6 5        # 15
5 -5 -6 6 5 -16 5 6 -6 6 -6        # 16
5 -5 5 -5 5 6 -17 6 5 -5 -6        # 17
5 6 -17 6 5 -5 -6 6 5 -16 5        # 18
7 -18 7 4 -4 4 -4 4 -4 4 -4        # 19
7 4 -4 -7 7 4 -15 4 7 -7 -4        # 20
10 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1        # 21

N_RAYS
22

LINEALITY_SPACE
1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 1
```

Наибольшая размерность конусов в данном случае равна 5 (включая линейное пространство). Такие конусы образованы лучами (№ 2, № 5, № 10, № 21) или (№ 10, № 17, № 20, № 21). Эти конусы не подходят в качестве решения уравнения 4, так как содержат лучи № 10 и № 21.

Для этого примера среди конусов размерности 4 можно найти такие, которые не содержат лучи № 10 и № 21. Например, конус, образованный лучами (№ 0, № 1, № 7), или конус, образованный лучами (№ 3, № 8, № 11, № 16), имеют размерность 4.

При других s есть такие же два луча, которые нужно исключать для достижения равенства 5. Размерности решений для других значений s представлены в таблице 2. Можно заметить, что при увеличении количества членов последовательности на 7, размерность пространства решений увеличивается на 2. Можно предположить, что тропическая энтропия будет равна 2/7.

Таблица 2. Вычисленные размерности пространства решений уравнения 4

s	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
d_s	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	6	6	6	6	6	7	7	8	8	8

3.3. Сомос-6

При $k = 6$ вычисления усложняются. Тропическая рекуррентная последовательность, ассоциированная с поледовательностью Сомоса, выглядит следующим образом:

$$p_6(n+3) + p_6(n-3) = \min\left\{p_6(n+2) + p_6(n-2), p_6(n+1) + p_6(n-1), 2p_6(n)\right\}.$$

После замены $y_n = q_6(n) = \Delta^2 p_6(n)$ получаем уравнение

$$f_6 = y_{n-3} \otimes y_{n-2} \otimes y_{n-1} \otimes y_n \otimes y_{n+1} \oplus y_{n-3} \otimes y_{n-2}^{\otimes 2} \otimes y_{n-1}^{\otimes 2} \otimes y_n^{\otimes 2} \otimes y_{n+1} \oplus \\ \oplus y_{n-3} \otimes y_{n-2}^{\otimes 2} \otimes y_{n-1}^{\otimes 3} \otimes y_n^{\otimes 2} \otimes y_{n+1} = 0.$$

По аналогии с предыдущим случаем в этом случае тропически добавляем 0, получив тропический многочлен

$$\hat{f}_6 = y_{n-3} \otimes y_{n-2} \otimes y_{n-1} \otimes y_n \otimes y_{n+1} \oplus y_{n-3} \otimes y_{n-2}^{\otimes 2} \otimes y_{n-1}^{\otimes 2} \otimes y_n^{\otimes 2} \otimes y_{n+1} \oplus \\ \oplus y_{n-3} \otimes y_{n-2}^{\otimes 2} \otimes y_{n-1}^{\otimes 3} \otimes y_n^{\otimes 2} \otimes y_{n+1} \oplus 0.$$

Дальнейшее решение по описаному алгоритму усложняется тем, что количество лучей в тропическом предмногообразии систем полиномов $\hat{f}_6$ увеличивается с ростом s. Например, для $s = 10$ количество лучей составляет 21, а для $s = 15$ лучей 36. Иными словами, тропическая энтропия этой рекуррентной последовательности больше 0.

Размерности тропических предмногообразий систем полиномов f_6 и полиномов $\hat{f}_6$ для различных s представлены в таблице 3. Найти решение тропического уравнения, ассоциированого с последовательностью Сомос-6, в этом случае затруднительно. Однако для систем полиномов f_6 можем наблюдать рост размерности тропического предмногообразия каждые 2 шага, а для систем полиномов $\hat{f}_6$ — каждые 4 шага. Можно предположить, что тропическая энтропия этих рекуррентных последовательностей равна 1/2 и 1/4 соответственно.

Таблица 3. Размерности тропических предмногообразий f_6 и $\hat{f}_6$

s	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$\dim(T(f_6))$	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11
$\dim(T(\hat{f}_6))$	4	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6	7	7	7	7

3.4. Сомос-7

При $k = 7$ ситуация схожа с $k = 6$. Тропическая рекуррентная последовательность, ассоциированная с последовательностью Сомоса, выглядит следующим образом:

$$p_7(n+4) + p_7(n-3) = \min\left\{p_7(n+3) + p_7(n-2), p_7(n+2) + p_7(n-1), p_7(n+1) + p_7(n)\right\}.$$

После замены $y_n = q_7(n) = \Delta^2 p_7(n)$ получаем уравнение

$$f_7 = y_{n-4} \otimes y_{n-3} \otimes y_{n-2} \otimes y_{n-1} \otimes y_n \otimes y_{n+1} \oplus y_{n-4} \otimes y_{n-3}^{\otimes 2} \otimes y_{n-2}^{\otimes 2} \otimes y_{n-1}^{\otimes 2} \otimes y_n^{\otimes 2} \otimes y_{n+1} \oplus \\ \oplus y_{n-4} \otimes y_{n-3}^{\otimes 2} \otimes y_{n-2}^{\otimes 3} \otimes y_{n-1}^{\otimes 3} \otimes y_n^{\otimes 2} \otimes y_{n+1} = 0.$$

По аналогии с предыдущими случаями в этом случае тропически добавляем 0, получив тропический полином

$$\hat{f}_7 = y_{n-4} \otimes y_{n-3} \otimes y_{n-2} \otimes y_{n-1} \otimes y_n \otimes y_{n+1} \oplus y_{n-4} \otimes y_{n-3}^{\otimes 2} \otimes y_{n-2}^{\otimes 2} \otimes y_{n-1}^{\otimes 2} \otimes y_n^{\otimes 2} \otimes y_{n+1} \oplus$$
$$\oplus y_{n-4} \otimes y_{n-3}^{\otimes 2} \otimes y_{n-2}^{\otimes 3} \otimes y_{n-1}^{\otimes 3} \otimes y_n^{\otimes 2} \otimes y_{n+1} \oplus 0.$$

В этом случае в тропическом предмногообразии систем полиномов $\hat{f}_7$ количество лучей также увеличивается с ростом s. Например, для $s = 10$ количество лучей составляет 17, а для $s = 15$ — 31 луч.

Размерности тропических предмногообразий систем полиномов f_7 и полиномов $\hat{f}_7$ для различных s представлены в таблице 4. Найти решение тропического уравнения, ассоциированого с последовательностью Сомос-7, в этом случае затруднительно. Однако для систем полиномов $\hat{f}_7$ можем наблюдать рост размерности тропического предмногообразия на 2 при увеличении длины последовательности на 7, из чего можно сделать предположение, что тропическая энтропия в этом случае равна $2/7$. Вычисленных значений для предположения тропической энтропии систем полиномов f_7 недостаточно.

Таблица 4. Размерности тропических предмногообразий f_7 и $\hat{f}_7$

s	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$\dim(T(f_7))$	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	10	10	11
$\dim(T(\hat{f}_7))$	5	5	6	6	6	6	6	7	7	8	8	8	8	8	9

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Среди вычисленных последовательностей присутствуют последовательности, найденные в работе [14].

Полученные размерности тропических предмнообразий согласуются с гипотезой Григорьева о стабилизации максимальных размерностей решений систем тропических последовательностей. Полное доказательство гипотезы Григорьева об энтропии позволило бы построить тропический аналог классического полинома Гильберта.

В рамках продолжения работы можно рассмотреть последовательности Сомоса с α отличными от нуля.

Список литературы

1. *Sturmfels B.* Algebraic statistics for Computational Biology. Cambridge University Press, 2005.
2. *Baldwin E.A., Klemperer P.D.* Tropical Geometry to Analyse Damand. Grantham Research Institute, Nuffield College, 2014.
3. *Zhang L., Naitzat G., Lim L.* Tropical Geometry of Deep Neural Neworks // Proceedings of the 35th International Conference on Machine Learnin. 2018. Vol. 80. P. 5824–5832.
4. *Maclagan D., Sturmfels B.* Introduction to Tropical Geometry. Providence: American Mathematical Society, 2015.
5. *Михайлов Ф.* Вычисление размерностей компонент тропических предмногообразий, описываемых линейными тропическими рекуррентными соотношениями // Компьютерные инструменты в образовании. 2023. № 1. С. 40–54.
6. *Elizarov N., Grigoriev D.* A tropical version of Hilbert polynomial (in dimension one). arXiv:2111.14742, 2022.
7. *Jensen A. N.* Algorithmic Aspects of Gröbner Fans and Tropical Varieties / Ph.D. Theses. Department of Mathematical Sciences, Aarhus, 2007.
8. *Swart C.S., Hone A.N.W.* Integrality and the Laurent phenomenon for Somos 4 sequences. arXiv:math/0508094, 2005.

9. *Hone A. N. W.* Sigma function solution of the initial value problem for Somos 5 sequences. arXiv:math/0501554, 2005.
10. *Fedorov Yu.N., Hone A.N.W.* Sigma-function solution to the general Somos-6 recurrence via hyperelliptic Prym varieties. arXiv:1512.00056, 2015.
11. *Fomin S., Zelevinsky A.* The Laurent Phenomenon // Adv. Appl. Math. 2002. Vol. 28. P. 119–144.
12. *Grigoriev D.* Tropical recurrent sequences // Adv. Appl. Math. 2020. Vol. 116. P. 102012.
13. *Jensen A. N.* Gfan version 0.6: A User's Manual. Department of Mathematical Science. University of Aarhus, Denmark, 2017.
14. *Быковский В. А., Романов М. А., Устинов А. В.* Тропические последовательности, ассоциированные с последовательностями Сомоса // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 1. С. 118–132.

Поступила в редакцию 01.03.2024, окончательный вариант — 21.03.2024.

Михайлов Фарид, аспирант, ассистент кафедры алгоритмической математики СПбГЭТУ «ЛЭТИ», ✉ mifa_98@mail.ru

Computer tools in education, 2024
№ 1: 18–31
http://cte.eltech.ru
doi:10.32603/2071-2340-2024-1-18-31

Computing of Tropical Sequences Associated with Somos Sequences in the Gfan Package

Mikhailov F.[1], postgraduate, ✉ mifa_98@mail.ru

[1]Saint Petersburg Electrotechnical University, 5, building 3, st. Professora Popova, 197022, Saint Petersburg, Russi

Abstract

This paper examines tropical recurrent sequences associated with Somos sequences. The classical Somos sequences have applications in the theory of elliptic curves. Due to the Laurent character of the classical sequences, a pattern can be inferred between the classical sequences and their tropical counterparts.

The greatest interest is the increase in the dimension of the solution space of tropical sequences depending on the length of the final sequence. For a set of tropical sequences described by tropical recurrence relations, D.Yu. Grigoriev put forward a hypothesis about the stabilization of the maximum dimensions of the components of the corresponding tropical prevarieties. This hypothesis has been proven for tropical linear recurrent sequences. As part of this work, for tropical recurrent sequences associated with the sequences Somos-4 and Somos-5, the corresponding tropical prevarieties were investigated using the Gfan package in order to test Grigoriev's hypothesis.

Keywords: *tropical semiring, tropicalization, tropical prevariety, tropical recurrent sequence, tropical entropy, Gfan package.*

Citation: F. Mikhailov, "Computing of Tropical Sequences Associated with Somos Sequences in the Gfan Package," *Computer tools in education*, no. 1, pp. 18–31, 2024 (in Russian); doi:10.32603/2071-2340-2024-1-18-31

References

1. B. Sturmfels, *Algebraic statistics for Computational Biology*, Cambridge, England: Cambridge University Press, 2005.
2. E. A. Baldwin and P. D. Klemperer, *Tropical Geometry to Analyse Damand*, London: Grantham Research Institute, 2014.
3. L. Zhang, G. Naitzat, and L. Lim, “Tropical Geometry of Deep Neural Networks,” in *Proc. of the 35th International Conference on Machine Learnin*, vol. 80, pp. 5824–5832, 2018.
4. D. Maclagan and B. Sturmfels, *Introduction to Tropical Geometry*, Providence, USA: American Mathematical Society, 2015.
5. F. Mikhailov, “Computing of the Dimensions of the Components of Tropical Prevarieties Described by Linear Tropical Recurrent Relations,” *Computer tools in education*, no. 1, pp. 40–54, 2023 (in Russian).
6. N. Elizarov and D. Grigoriev, “A tropical version of Hilbert polynomial (in dimension one),” in *arXiv*, 2022. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/2111.14742
7. A. N. Jensen, “Algorithmic Aspects of Gröbner Fans and Tropical Varieties,” Ph.D. Theses, Department of Mathematical Sciences, University of Aarhus, Denmark, 2007.
8. C. S. Swart and A. N. W Hone, “Integrality and the Laurent phenomenon for Somos 4 sequences,” in *arXiv* , 2005. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/math/0508094
9. A. N. W. Hone, “Sigma function solution of the initial value problem for Somos 5 sequences,” in *arXiv*, 2005. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/math/0501554
10. Yu. N. Fedorov and A. N. W. Hone, “Sigma-function solution to the general Somos-6 recurrence via hyperelliptic Prym varieties,” in *arXiv*, 2015. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/1512.00056
11. S. Fomin and A. Zelevinsky, “The Laurent Phenomenon,” Advances in Applied Mathematics,” vol. 28, no. 2, pp. 119–144, 2002; doi:10.1006/aama.2001.0770.
12. D. Grigoriev, “Tropical recurrent sequences,” *Advances in Applied Mathematics*, vol. 116, p. 102012, 2020; doi:10.1016/j.aam.2020.102012
13. A. N. Jensen, *Gfan version 0.6: A User’s Manual*, Department of Mathematical Science, University of Aarhus, Denmark, 2017.
14. V. A. Bykovskii, M. A. Romanov, and A. V. Ustinov, “GTropical sequences associated with Somos sequences,” *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 118–132, 2021 (in Russian); doi:10.22405/2226-8383-2021-22-1-118-132

Received 01-03-2024, the final version — 21-03-2024.

Mikhailov Farid, Postgraduate, Assistant of the Algorithmic Mathematics Department, Saint Petersburg Electrotechnical University, ✉ mifa_98@mail.ru