



ВЛИЯНИЕ ПРИЛИВНЫХ СИЛ НА ДВИЖЕНИЕ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ. МОДЕЛЬ ТОРОИДАЛЬНОГО СПУТНИКА

Ляпцев А. В.¹, доктор физ.-мат. наук, ✉ upm_eno@mail.ru

¹Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена,
набережная реки Мойки, д. 48, 191186, Санкт-Петербург, Россия

Аннотация

Рассматривается модель тороидального спутника в предельном случае, когда большой радиус тора (расстояние от центра образующей окружности до оси вращения) много больше его малого радиуса (радиуса образующей окружности). На основе метода Лагранжа проводится вывод уравнений движения. Показано, что полученные математические уравнения, описывающие вращательное движение, не содержат малых параметров, откуда следует, что приливные силы оказывают существенное влияние на вращательное движение спутника. Численные решения полученных уравнений могут быть исследованы учащимися на основе использования процедур решения дифференциальных уравнений, имеющихся в средах MATLAB и Octave. Численный эксперимент в сочетании с аналитическими методами исследования этих уравнений показывает, что при достаточно быстром вращении спутника вокруг оси симметрии, его ориентационное движение стабилизируется и становится квазипериодическим.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, математическая модель, приливные силы, искусственные спутники Земли, устойчивость движения.

Цитирование: Ляпцев А. В. Влияние приливных сил на движение космических аппаратов. Модель тороидального спутника // Компьютерные инструменты в образовании. 2023. № 4. С. 5–16. doi:10.32603/2071-2340-2023-4-5-16

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из тем школьного курса астрономии является тема, связанная с движением искусственных космических аппаратов. Несмотря на полувековое развитие космонавтики, космические аппараты, на которых присутствует экипаж, в основном движутся по орбитам Земли. Естественно, такие аппараты совершенствуются и усложняются. Еще более интересными являются проекты разнообразных космических станций. К таким проектам, относятся, в частности, «Космические города-бублики» (см., например, [1]). Подобные станции представляют собой конструкцию из обитаемого тороидального отсека, связанного радиальными переходами с центральной частью станции. С виду станция похожа на велосипедное колесо (рисунки см. в [1]). Смысл такой конструкции заключается в том, что при вращении станции вокруг оси симметрии на его периферии (в бублике)

возникает центробежная сила, действие которой на человека эквивалентно силе гравитации. Величина такой силы равна массе человека, умноженной на центростремительное ускорение $\Omega^2 r$, где Ω — угловая скорость вращения станции вокруг оси симметрии, а r — большой радиус тора. Если центростремительное ускорение оказывается сравнимым с ускорением свободного падения, человек ощущает ту же силу тяжести, что и на Земле.

Несложные оценки показывают, что подобную станцию можно было бы построить и при современном развитии технологий. Действительно, если принять для оценки радиус станции равным километру, то при центростремительном ускорении, равном ускорению свободного падения g , то есть когда человек будет ощущать такую же гравитацию, как на Земле, получим: $\Omega = \sqrt{g/r} = 0,1 \text{ с}^{-1}$. Соответственно, период обращения равен $T = 2\pi/\Omega \approx 62,8 \text{ с} \approx 1 \text{ мин}$. Таким образом, величины, характеризующие подобную станцию, оказываются вполне приемлемыми.

Вторая особенность подобной станции в том, что, возможно, подобно гироскопу, будет сохраняться плоскость вращения станции. Вдали от тяготеющих тел такое свойство обеспечивалось бы законом сохранения момента импульса. Однако приливные силы, то есть силы, возникающие вследствие неоднородности гравитационного поля тяготеющих тел, оказывают существенное влияние на ориентацию несферических космических объектов. Для простейших моделей станции, например, модели ротатора, подобное влияние может быть исследовано в рамках учебного процесса в курсе математического моделирования [2]. Исследование движений более сложных космических тел в рамках изучения компьютерного моделирования можно найти в работе [3]. Безусловно приливные силы будут влиять и на движение тороидальных станций. Возможно, при достаточно большой угловой скорости вращения станции вокруг оси, подобное влияние будет малым. Однако, понять, насколько малым, можно только при исследовании модели. Проводя аналогию с обычным волчком, можно заметить, что при большой скорости вращения его ось сохраняет вертикальную ориентацию. Однако при постепенном замедлении скорости ось начинает раскачиваться (прецессировать). Если вращение обычного волчка хорошо исследовано (см., например, [4]) и может быть проведено аналитическими методами, то для исследования вращения станции-бублика требуется уже использование численных методов. Тем не менее, данная задача вполне посильна студентам, изучающим математическое моделирование. Для вывода соответствующих формул достаточно знаний вузовского курса механики, а необходимые вычисления могут быть проведены при использовании вычислительных сред, таких как MATLAB и Octave. Цель данной работы показать возможность и некоторые предварительные результаты такого рода исследования.

2. ФОРМУЛИРОВКА МОДЕЛИ

Рассмотрим модель спутника, движущегося по круговой орбите вокруг Земли и представляющего собой тор. Будем считать, что тор бесконечно тонкий, то есть большой радиус тора (расстояние от центра образующей окружности до оси вращения) много больше его малого радиуса (радиуса образующей окружности). В таком случае спутник можно моделировать окружностью радиуса r . Будем считать, что спутник вращается вокруг Земли по круговой орбите с радиусом R , причем $r/R \ll 1$.

Поступательное движение спутника по круговой орбите описывается простыми формулами, изучаемыми в школьном курсе физики. Приравнивая гравитационную силу к центростремительному ускорению, можно получить равенство:

$$\frac{GM_{\oplus}}{R^2} = \omega^2 R, \quad (1)$$

где G — гравитационная постоянная, M_{\oplus} — масса Земли, ω — угловая скорость вращения спутника по орбите.

Для описания вращательного движения спутника введем систему координат, связанную со спутником, обозначив оси этой системы через (x_1, x_2, x_3) (рис. 1). Оси неподвижной системы координат, в центре которой находится Земля, обозначим через (x, y, z) . Чтобы определить ориентацию спутника, совместим начала этих систем координат, как указано на рисунке. Эта ориентация определяется углами Эйлера θ, φ, ψ . Выберем подвижную систему координат так, чтобы плоскость спутника лежала в плоскости (x_1, x_2) , а ось x_3 была направлена по оси симметрии спутника. Угол ψ описывает вращение спутника вокруг оси симметрии. Он отсчитывается от линии узлов AB , которая является линией пересечения плоскости (x, y) неподвижной системы отсчета и плоскости (x_1, x_2) подвижной системы отсчета, до некоторой фиксированной точки на спутнике. Два других угла Эйлера определяют ориентацию оси симметрии спутника относительно неподвижной системы отсчета. Угол θ , изменяющийся в интервале от 0 до π , определяет наклон оси симметрии спутника относительно нормали к орбите вращения спутника вокруг Земли (ось z). Угол φ отсчитывается от оси x неподвижной системы отсчета до линии узлов и принимает значения от 0 до 2π . Углы θ и $\pi/2 - \varphi$ представляют собой соответственно полярный угол и азимут направления оси x_3 по отношению к осям неподвижной системы отсчета (см., например, [4]).

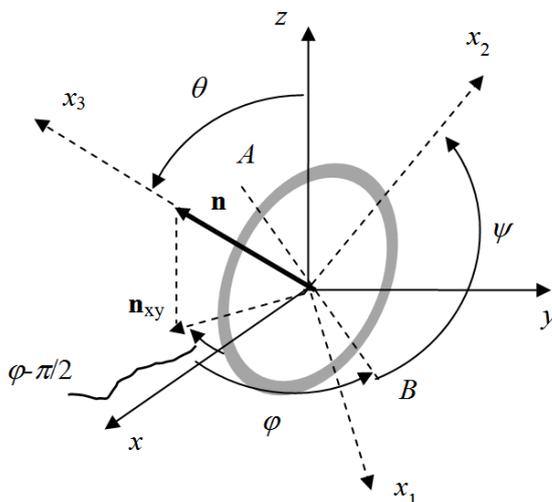


Рис. 1. Переменные, описывающие вращательное движение спутника

Уравнения движения, определяющие изменение ориентации спутника со временем, есть совокупность трёх дифференциальных уравнений относительно переменных θ, φ, ψ . При заданных начальных условиях (углы и их производные по времени в начальный момент времени) численное решение этих уравнений позволяет получить функции $\theta(t), \varphi(t), \psi(t)$. Вывод этих уравнений может быть основан на использовании уравнений Эйлера для вращения твердого тела или получен при помощи уравнений Лагранжа. В данном случае метод с использованием уравнений Лагранжа, на наш взгляд, является более простым.

3. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Метод основан на использовании функции Лагранжа (лагранжиана), представляющей собой разность кинетической и потенциальной энергии тела, выраженных через обобщенные координаты q_i и их производные по времени \dot{q}_i :

$$L(\{q_i, \dot{q}_i\}) = E_k(\{q_i, \dot{q}_i\}) - U(\{q_i, \dot{q}_i\}).$$

Общий вид уравнений можно записать так:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1 \dots n.$$

где n — число обобщенных координат.

В нашей модели три обобщенные координаты q_i — это углы Эйлера θ, φ, ψ . Для вывода уравнений Лагранжа необходимо получить выражения для кинетической и потенциальной энергии как функции от переменных $\theta, \varphi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$. Выражение для кинетической энергии симметричного волчка, частным случаем которого является наша модель, выводится в ряде учебных пособий по курсу механики (см., например, [4, 5]):

$$E_k = \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2.$$

В этих формулах I_3 — момент инерции симметрического волчка относительно оси симметрии, а I_1 — момент инерции относительно оси, перпендикулярной оси симметрии. Введем обозначение $I = mr^2$, где m — масса спутника. Для нашей модели получим: $I_3 = I, I_1 = I/2$ (подробности см. [4]). В результате для нашей модели выражение для кинетической энергии принимает вид:

$$E_k = \frac{I}{4} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2.$$

Для вывода выражения для потенциальной энергии разобьем окружность спутника на отдельные элементы массы dm , найдем потенциальную энергию элемента и просуммируем по всем элементам.

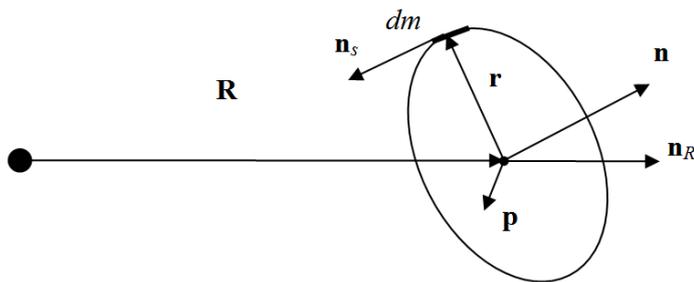


Рис. 2. Схема для нахождения выражения для потенциальной энергии

На рис. 2 через \mathbf{R} обозначен радиус-вектор центра масс спутника (начало этого вектора в центре Земли), через \mathbf{r} — радиус-вектор, определяющий положение элемента dm в системе, связанной со спутником.

Потенциальная энергия элемента массы dm в гравитационном поле Земли вычисляется по формуле:

$$dU = -\frac{GM_{\oplus} dm}{|\mathbf{R} + \mathbf{r}|}.$$

Преобразуем выражение в знаменателе, учитывая малость r/R :

$$\begin{aligned} |\mathbf{R} + \mathbf{r}|^{-1} &= (\mathbf{R} + \mathbf{r})^2)^{-1/2} = (R^2 + r^2 + 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{r})^{-1/2} = R^{-1} \left(1 + 2\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}}{R^2} + \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right)^{-1/2} \approx \\ &\approx R^{-1} \left(1 - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}}{R^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{3}{8} \left(2\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}}{R^2}\right)^2 \right). \end{aligned}$$

где символом « \cdot » обозначено скалярное произведение векторов и сохранены слагаемые не выше 2-го порядка по параметру r/R . Для дальнейших вычислений учтем, что при суммировании по элементам dm наряду с элементом, характеризуемым вектором \mathbf{r} , в выражение будет входить элемент, характеризуемый вектором $-\mathbf{r}$. В результате линейное по параметру r/R слагаемое в сумме дает нулевой вклад, так что выражение для потенциальной энергии элемента можно записать в виде:

$$dU = \frac{GM_{\oplus} dm}{2R} \left(\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 3\left(\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}}{R^2}\right)^2 \right).$$

Первое слагаемое в этом выражении при суммировании по всем элементам спутника даст константу, не зависящую от ориентации спутника. Подобные константы не дают вклад в уравнение Лагранжа и могут не учитываться. В результате потенциальную энергию элемента можно выразить через векторы \mathbf{n}_r и \mathbf{n}_R :

$$dU = -\frac{3GM_{\oplus} r^2 dm}{2R^3} (\mathbf{n}_r \cdot \mathbf{n}_R)^2, \quad (2)$$

где через \mathbf{n}_r и \mathbf{n}_R обозначены единичные векторы, направленные по векторам \mathbf{r} и \mathbf{R} соответственно.

Для дальнейших вычислений введем дополнительные обозначения (рис. 2): \mathbf{n} — единичный вектор нормали к окружности спутника и \mathbf{n}_s — единичный вектор, направленный по касательной к окружности спутника на участке с массой dm . Векторы \mathbf{n} , \mathbf{n}_s и \mathbf{n}_r взаимно ортогональны и связаны соотношением: $\mathbf{n}_r = \mathbf{n}_s \times \mathbf{n}$, где использовано стандартное обозначение для векторного произведения. Для скалярного произведения в выражении (2) получим:

$$\mathbf{n}_r \cdot \mathbf{n}_R = \mathbf{n}_R \cdot (\mathbf{n}_s \times \mathbf{n}) = \mathbf{n}_s \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{n}_R) = \mathbf{n}_s \cdot \mathbf{p},$$

где вектор $\mathbf{p} = \mathbf{n} \times \mathbf{n}_R$, как и вектор \mathbf{n}_s , лежит в плоскости окружности спутника. Обозначим через α угол между векторами \mathbf{n}_s и \mathbf{p} . При суммировании по различным элементам dm этот угол пробегает значения от 0 до 2π . Выражая $dm = \frac{m}{2\pi} d\alpha$ и интегрируя по α получим:

$$U = -\int_0^{2\pi} \frac{3GM_{\oplus} r^2}{2R^3} (p \cos \alpha)^2 \frac{m d\alpha}{2\pi} = -\frac{3GM_{\oplus} m r^2}{4R^3} p^2 = -\frac{3GM_{\oplus} I}{4R^3} p^2.$$

Квадрат модуля вектора \mathbf{p} можно выразить через скалярное произведение векторов \mathbf{n} и \mathbf{n}_R :

$$p^2 = \sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = 1 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_R)^2,$$

где β — угол между векторами \mathbf{n} и \mathbf{n}_R . В результате для потенциальной энергии получим выражение:

$$U = -\frac{3GM_{\oplus} I}{4R^3} (1 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_R)^2).$$

Учитывая, что потенциальная энергия определяется с точностью до аддитивной константы, можно оставить только слагаемое с квадратом скалярного произведения:

$$U = \frac{3GM_{\oplus}I}{4R^3}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_R)^2.$$

Размерный коэффициент в этом уравнении можно записать в более простом виде, используя константу угловой скорости из выражения (1):

$$U = \frac{3\omega^2 I}{4}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_R)^2. \quad (3)$$

Как следует из этого выражения, потенциальная энергия зависит как от ориентации спутника (вектор \mathbf{n}), так и от положения спутника в пространстве (вектор \mathbf{n}_R). Для вычисления скалярного произведения в выражении (3) используем проекции векторов в неподвижной системе координат. Как следует из рис. 1, проекции вектора \mathbf{n} можно представить в виде:

$$\mathbf{n} = \begin{Bmatrix} \sin\theta \cos(\varphi - \pi/2) \\ \sin\theta \sin(\varphi - \pi/2) \\ \cos\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sin\theta \cos\varphi \\ -\sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \end{Bmatrix}.$$

При вращении спутника по круговой орбите, лежащей в плоскости (x, y) , радиус-вектор \mathbf{R} , определяющий положение центра масс спутника, можно представить в виде:

$$\mathbf{R} = R \begin{Bmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Соответственно для вектора \mathbf{n}_R получим:

$$\mathbf{n}_R = \begin{Bmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Вычисляя скалярное произведение векторов \mathbf{n} и \mathbf{n}_R , выражение для лагранжиана:

$$L = \frac{I}{4}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi) + \frac{I}{2}(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos\theta)^2 - \frac{3\omega^2 I}{4}(\sin\theta \sin(\varphi - \omega t))^2. \quad (4)$$

Заметим, что константа I , характеризующая момент инерции, входит в выражение для лагранжиана общим множителем, и, как несложно показать, не появляется в окончательных выражениях для уравнений движения.

Как видно из (4), лагранжиан не зависит от переменной ψ . Такие переменные называются циклическими [4]. Соответственно, величина $\partial L / \partial \dot{\psi}$ не изменяется со временем. Таким образом, получаем равенство:

$$\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos\theta = \Omega_{\psi}, \quad (5)$$

где константа Ω_{ψ} определяется начальными условиями. Проведя вычисления для переменных θ и φ , получим уравнения:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + \dot{\varphi} \sin\theta(2\Omega_{\psi} - \dot{\varphi} \cos\theta) + 3\omega^2 \sin\theta \cos\theta \sin^2(\varphi - \omega t) &= 0, \\ \ddot{\varphi} \sin\theta + 2\dot{\theta}(\dot{\varphi} \cos\theta - \Omega_{\psi}) + 3\omega^2 \sin\theta \sin(\varphi - \omega t) \cos(\varphi - \omega t) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Система уравнений (6) является нелинейной и в общем случае может быть решена только численными методами. С этой целью удобно сделать преобразование масштаба времени:

$$t' = \omega t.$$

Это означает, что за единицу времени принимается период обращения спутника по орбите, деленный на 2π . Систему уравнений (6) можно переписать в виде, удобном для применения процедур численного решения дифференциальных уравнений, имеющихся в таких вычислительных средах, как MATLAB, Octave и др.:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \dot{\varphi} \sin \theta (\dot{\varphi} \cos \theta - 2\Omega) - 3 \sin \theta \cos \theta \sin^2(t - \varphi), \\ \ddot{\varphi} \sin \theta &= 2\dot{\theta}(\Omega - \dot{\varphi} \cos \theta) + 3 \sin \theta \sin(t - \varphi) \cos(t - \varphi). \end{aligned} \quad (7)$$

где $\Omega = \Omega_{\psi} / \omega$ и для краткости записи опущены штрихи у переменной t .

Система уравнений (7) содержит лишь один параметр Ω , физический смысл которого — проекция угловой скорости вращения спутника на ось симметрии. В соответствии с выражением (5), которое после масштабирования переменной времени принимает вид: $\Omega = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta$, Ω связана с угловой скоростью вращения спутника вокруг оси симметрии $\dot{\psi}$. Следует отметить, что в уравнениях (7) Ω представлена в единицах ω . Поэтому фактически эта величина обратно пропорциональна отношению соответствующих периодов: $\Omega = T_{\text{орб}} / T_{\text{ос}}$, где $T_{\text{орб}}$ — период обращения спутника по орбите вокруг Земли, $T_{\text{ос}}$ — период обращения спутника вокруг оси симметрии. Для примера, который приведен в начале статьи, $T_{\text{ос}} \approx 1$ мин, $T_{\text{орб}} \approx 1,5$ час, так что $\Omega \approx 90$.

Чтобы решение системы уравнений (7) было единственным, необходимо задать помимо параметра Ω начальные условия, определяющие ориентацию и угловую скорость вращения спутника:

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\theta}(0) = \theta_{t0}, \quad \dot{\varphi}(0) = \varphi_{t0}.$$

Как показывают расчеты, характер решения существенно зависит от этих констант.

4. АНАЛИЗ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ

Численные расчеты показывают, что характер решений существенно различается в зависимости от величины параметра Ω . При малых значениях Ω , то есть при медленном вращении спутника вокруг оси симметрии, решения, как правило, являются хаотическими, подобно тому, как это имеет место для моделирования спутника ротатором [2]. Достаточно быстрое вращение спутника приводит к регулярным решениям, примеры которых будут приведены ниже. Как и в модели ротатора, частные решения возникают при постоянных значениях θ равных 0 и $\pi/2$.

Рассмотрим вначале случай постоянного значения $\theta(t) = \pi/2$. Система уравнений (7) принимает вид:

$$\begin{aligned} 0 &= -2\Omega\dot{\varphi}, \\ \ddot{\varphi} &= 3 \sin(t - \varphi) \cos(t - \varphi). \end{aligned}$$

Несложно показать, что при $\Omega \neq 0$ полученная система не имеет решений. При нулевом значении Ω второе уравнение в точности соответствует частному случаю, рассмотренному для модели ротатора [2]. Система уравнений имеет два решения в зависимости от начальных условий. Первое решение $\varphi(t) = t$ реализуется при начальных условиях:

$\theta(0) = \pi/2$, $\varphi(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 1$ и является устойчивым. Второе решение $\varphi(t) = t + \pi/2$ реализуется при начальных условиях: $\theta(0) = \pi/2$, $\varphi(0) = \pi/2$, $\dot{\theta}(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 1$ и является неустойчивым. Неустойчивость означает, что при малом отклонении начальных условий от вышеуказанных, система в дальнейшем уходит далеко от начального состояния. Численные расчеты подтверждают выводы об устойчивости или неустойчивости соответствующих решений.

Первому устойчивому решению, исходя из определения угла φ (см. рис. 1), соответствует состояние спутника 1 на рис. 3. Ось вращения спутника лежит в плоскости его орбиты и перпендикулярна направлению на Землю. Второй случай неустойчивого решения соответствует спутнику 2 на рис. 3. Ось вращения спутника всегда направлена на Землю.

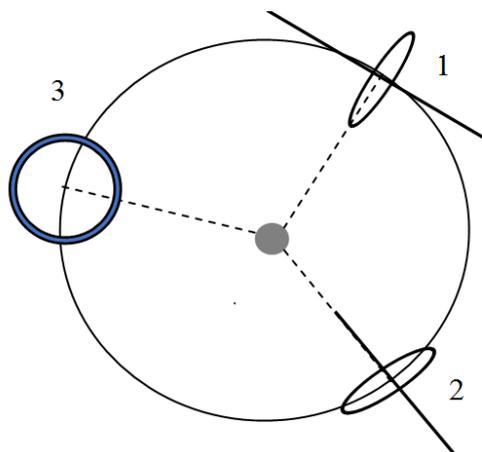


Рис. 3. Частный случай решения системы уравнений (7)

Существует также ещё одно аналитическое решение, при котором угол θ остается равным нулю при всех значениях времени. На рис. 3 этому решению соответствует спутник 3. Плоскость окружности спутника в этом случае совпадает с плоскостью его орбиты, а значения угла φ могут быть любыми. Это решение имеет место при начальных условиях $\theta(0) = 0$, $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\theta}(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = \varphi_{t0}$, где значения φ_0, φ_{t0} , а также значения параметра Ω могут быть любыми. Однако, как показывают расчеты, при малых значениях параметра Ω решения являются неустойчивыми. На рис. 4а приведены графики зависимости величин $\theta(t)$, $\varphi(t)$, $\dot{\theta}(t)$, $\dot{\varphi}(t)$, $\psi(t)$ при начальных значениях $\theta(0) = 0,01^\circ$, $\varphi(0) = \dot{\theta}(0) = \dot{\varphi}(0) = \Omega = 0$. На самом нижнем графике приведены значения проекции вектора \mathbf{n}_R на ось x .

Как видно из графиков, через время, равное приблизительно двум периодам орбитального вращения спутника, его ориентация становится отличной от ориентации начального состояния. Это отличие наглядно проявляется на рис. 4б, где приведен трехмерный график траектории конца вектора \mathbf{n} .

Вращение спутника вокруг оси симметрии приводит к стабилизации состояния с $\theta = 0$. Как показывают расчеты, эта стабилизация наступает уже при значении $\Omega > 0.5$. Однако вращение спутника вокруг оси симметрии в некотором смысле стабилизирует его движение и при начальных углах θ , отличных от нуля. Стабилизация в данном случае сказывается на переходе от хаотического вращения к регулярному, квазипериодически зависящему от времени.

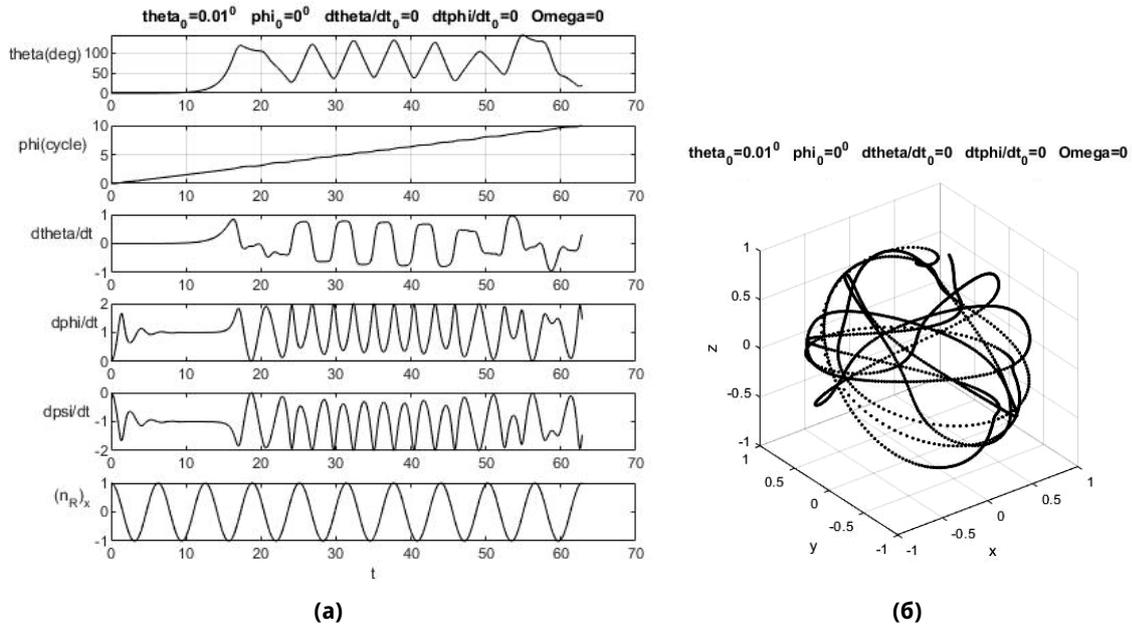


Рис. 4. Графики, характеризующие ориентационное движение спутника при начальных условиях $\theta(0) = 0,01^\circ$, $\varphi(0) = \dot{\theta}(0) = \dot{\varphi}(0) = \Omega = 0$

5. РЕГУЛЯРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ПРИ БЫСТРОМ ВРАЩЕНИИ ВОКРУГ ОСИ СИММЕТРИИ

Характерные графики в этом случае приведены на рис. 5. Расчет проводился при начальных значениях $\theta(0) = 30^\circ$, $\varphi(0) = \dot{\theta}(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0,2$, $\Omega = 10$.

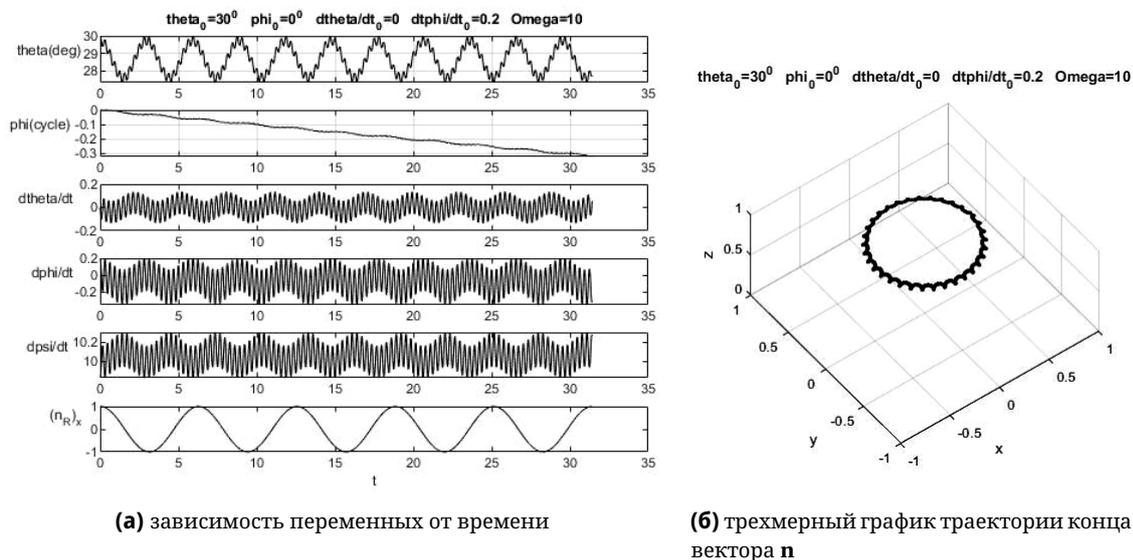


Рис. 5. Графики, характеризующие ориентационное движение спутника при начальных условиях $\theta(0) = 30^\circ$, $\varphi(0) = \dot{\theta}(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0,2$, $\Omega = 10$

Анализ графиков показывает, что спутник совершает медленную прецессию (изменение угла φ на втором сверху графике), на которую накладываются осцилляции нутаций

(изменение угла θ) с частотой 2 и быстрые осцилляции нутаций с частотой 20 (частота орбитального вращения равна 1).

Быстрые осцилляции объясняются так же, как осцилляции обычного быстрого волчка в однородном поле тяжести [4]. Частота таких осцилляций: $\Omega_{>} = \frac{M}{I_1} \approx \frac{I_3 \omega_3}{I_1} = 2\Omega$. Амплитуда осцилляций угловой скорости по порядку величины равна $\sqrt{\dot{\theta}_0^2 + \dot{\varphi}_0^2}$. В частном случае $\dot{\theta}_0 = \dot{\varphi}_0 = 0$ быстрые осцилляции пропадают. Этот частный случай соответствует начальным условиям, когда вектор момента импульса спутника в начальном состоянии направлен по оси симметрии. Для свободного симметрического волчка в этом частном случае также отсутствует прецессия оси вращения, то есть ось вращения сохраняет свою ориентацию [4].

Медленные осцилляции объясняются влиянием приливных сил. Для их объяснения будем считать, что в системе уравнений (7) углы θ и φ в течение нескольких медленных осцилляций остаются приблизительно одинаковыми, равными соответственно θ_0 и φ_0 . Система уравнений принимает вид:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= \dot{\varphi} \sin \theta_0 (\dot{\varphi} \cos \theta_0 - 2\Omega) - 3 \sin \theta_0 \cos \theta_0 \sin^2(t - \varphi_0), \\ \dot{\varphi} \sin \theta_0 &= 2\dot{\theta}(\Omega - \dot{\varphi} \cos \theta_0) + 3 \sin \theta_0 \sin(t - \varphi_0) \cos(t - \varphi_0).\end{aligned}$$

Будем далее считать прецессию медленной по сравнению с вращением вокруг оси симметрии, так что можно пренебречь слагаемым $\dot{\varphi} \cos \theta_0$ по сравнению с Ω . Тогда система уравнений принимает вид:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= -2\Omega \dot{\varphi} \sin \theta_0 - \frac{3}{2} \sin \theta_0 \cos \theta_0 (1 - \cos(2t - 2\varphi_0)), \\ \dot{\varphi} \sin \theta_0 &= 2\Omega \dot{\theta} + \frac{3}{2} \sin \theta_0 \sin(2t - 2\varphi_0).\end{aligned}\tag{8}$$

Несложно понять, что эта система линейных уравнений относительно переменных $\dot{\theta}$ и $\dot{\varphi}$ описывает вынужденные колебания. Частота таких колебаний равна частоте вынуждающего их воздействия, то есть равна 2. Решение линейной системы уравнений (8) может быть получено стандартными аналитическими методами. С учетом неравенства $\Omega \gg 1$ они могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned}\dot{\theta}(t) &= -\frac{3 \sin \theta_0}{4\Omega} \sin(2t - 2\varphi_0), \\ \dot{\varphi}(t) &= \frac{3 \sin \theta_0}{4\Omega} \cos((2t - 2\varphi_0) - 1).\end{aligned}$$

Таким образом, амплитуда таких осцилляций убывает обратно пропорционально Ω . Кроме того, постоянное слагаемое в выражении для $\dot{\varphi}(t)$ дает скорость угловой прецессии, которая обратно пропорциональна Ω .

Из вышеприведенных рассуждений можно сделать вывод об иерархии временных масштабов при $\Omega \gg 1$. Пусть в обычных единицах времени T — период орбитального вращения спутника и τ — период вращения спутника вокруг оси симметрии. Будем считать отношение τ/T малым параметром: $\lambda = \tau/T$. Тогда:

- 1) период высокочастотной нутации равен $\tau/2$, или $\lambda T/2$,
- 2) период низкочастотной нутации равен $T/2$,
- 3) амплитуды нутаций по порядку величины равны τ/T , или λ ,
- 4) период прецессии равен по порядку величины T^2/τ , или T/λ .

Заметим, что периодическое движение возможно лишь, когда параметр λ равен отношению двух целых чисел, то есть λ — рациональное число. В противном случае движение спутника является квазипериодическим.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе изложены лишь некоторые предварительные результаты исследования модели тороидального спутника. Имеется достаточно большой простор для учебных исследований данной модели при проведении численного эксперимента в зависимости от начальных условий и скорости углового вращения относительно оси симметрии. Предварительные выводы, которые можно сделать, заключаются во влиянии вращения спутника относительно оси симметрии на стабилизацию ориентационного движения. Такая стабилизация проявляется в том, что ориентационное движение спутника становится квазипериодическим. Однако ось симметрии тороидального спутника сохраняет свою ориентацию только в одном частном случае, когда она перпендикулярна плоскости орбиты спутника, то есть, когда плоскость кольца тора совпадает с плоскостью орбиты. В иных случаях приливные силы вызывают прецессию оси вращения спутника.

Список литературы

1. Космические города-бублики. Википедия. URL: https://cyclowiki.org/wiki/Космические_города-бублики (дата обращения 15.12.2022).
2. Ляпцев А. В. Влияние приливных сил на движение космических аппаратов. Модель ротатора на орбите // Компьютерные инструменты в образовании. 2023. № 1. С. 5–17. doi:10.32603/2071-2340-2023-1-5-17
3. Майер Р. В. Изучение влияния приливных сил на движение небесных тел с помощью компьютерных моделей // Дистанционное и виртуальное обучение. 2018. № 3(123). С. 5–11.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика, том 1. М.: Наука, 1973. 208 с.
5. Голдстейн Г. Классическая механика. М.: Наука, 1975. 416 с.

Поступила в редакцию 01.12.2023, окончательный вариант — 21.12.2023.

Ляпцев Александр Викторович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры методики обучения физике РГПУ им. А. И. Герцена, ✉ upm_eno@mail.ru

Computer tools in education, 2023

№ 4: 5–16

<http://cte.eltech.ru>

[doi:10.32603/2071-2340-2023-4-5-16](https://doi.org/10.32603/2071-2340-2023-4-5-16)

The Effect of Tidal Forces on the Motion of Spacecraft. A Model of a Toroidal Satellite

Liapzev A. V.¹, Doctor sc., Professor, ✉ upm_eno@mail.ru

¹ Herzen State Pedagogical University of Russia,
Moika river embankment, 48, 191186, Saint Petersburg, Russia

Abstract

The model of a toroidal satellite is considered in the limiting case when the major radius of the torus (the distance from the center of the tube to the center of the torus) is much larger than its minor radius (the radius of the tube). Based on the Lagrange method, the equations of motion are derived. It is shown that the obtained mathematical equations describing the rotational motion do not contain small parameters, which implies that tidal forces have a significant effect on the rotational motion of the satellite. Numerical solutions of the obtained equations can be studied by students based on the use of differential equation solving procedures available in MATLAB and Octave environments. Numerical experiment in combination with analytical methods for studying these equations shows that with a sufficiently fast rotation of the satellite around the axis of symmetry, its orientation motion stabilizes and becomes quasi-periodic.

Keywords: *computer modeling, mathematical model, tidal forces, artificial Earth satellites, motion stability.*

Citation: A. V. Liapzev, "The Effect of Tidal Forces on the Motion of Spacecraft. A Model of a Toroidal Satellite," *Computer tools in education*, no. 4, pp. 5–16, 2023 (in Russian); [doi:10.32603/2071-2340-2023-4-5-16](https://doi.org/10.32603/2071-2340-2023-4-5-16)

References

1. "Rotating wheel space station," in *wikipedia.org*, 2003. [Online]. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Rotating_wheel_space_station
2. A. Liapzev, "The Influence of Tidal Forces on the Motion of Spacecraft. Rotator Model in Orbit," *Computer Tools in Education*, no. 1, pp. 5–17, 2023 (in Russian); [doi:10.32603/2071-2340-2023-1-5-17](https://doi.org/10.32603/2071-2340-2023-1-5-17)
3. R. V. Mayer, "Study of the tidal forces influence on the heavenly bodies movement with the help of simulation," *Distantcionnoe i virtual'noe obuchenie*, no. 3(123), pp. 5–11, 2018 (in Russian).
4. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics*, vol. 1, Moscow: Nauka, 1973 (in Russian).
5. H. Goldstein, *Classical mechanics*, Moscow: Nauka, 1975 (in Russian).

Received 01-12-2023, the final version — 21-12-2023.

Alexander Liapzev, Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor of the Department of Methods of Teaching Physics at Herzen University, ✉ upm_eno@mail.ru