



ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ПРЕПОДАВАНИИ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ БУДУЩИМ УЧИТЕЛЯМ МАТЕМАТИКИ

Абрамович С.¹, кандидат физ.-мат. наук, ✉ abramovs@potssdam.edu,
orcid.org/0000-0003-0340-1689

¹Факультет педагогики и профессиональных наук, Нью-Йоркский государственный университет в Потсдаме, Авеню Пьерпон, 44, 13676 Потсдам, штат Нью-Йорк, США

Аннотация

В статье представлены вычислительные задачи с треугольными, квадратными и другими многоугольными числами, запись которых в унарной системе может быть структурирована в виде симметричных геометрических фигур — равносторонних и равнобедренных треугольников, квадратов и пр. Были разработаны и проанализированы вычислительные алгоритмы суммирования таких чисел для каждой геометрической структуры. В некоторых случаях алгебраические тождества между числовыми представлениями фигур были сформулированы и доказаны путем символьных вычислений. Эти задачи, поддерживаемые *WolframAlpha* и *Maple*, рекомендуются к использованию при чтении математических курсов, ориентированных на будущих учителей математики. В статье подчеркивается важность интеграции формальных рассуждений и компьютерных вычислений при преподавании теории чисел в современных условиях. В статье утверждается, что такой подход позволяет будущим учителям математики на примере элементарной теории чисел понять и оценить возможность использования простых алгоритмов для достижения сложных вычислительных результатов.

Ключевые слова: теория чисел, педагогическое образование, многоугольные числа, технологии.

Цитирование: Абрамович С. Об использовании компьютерных технологий в преподавании теории чисел будущим учителям математики // Компьютерные инструменты в образовании. 2023. № 3. С. 60-80. doi: 10.32603/2071-2340-2023-3-60-80

1. ВВЕДЕНИЕ

Прошло почти столетие, с тех пор как Годфри Гарольд Харди, выдающийся британский специалист по теории чисел, рекомендовал темы элементарной теории чисел для раннего обучения математике [13]. В цифровую эпоху эта рекомендация нашла отражение в аналогичных высказываниях математиков и преподавателей математики, распростиравших обучение с начальных классов на все учебные уровни K-16 [3, 16, 21, 27]. Один из разделов элементарной теории чисел посвящен многоугольным (фигурным) числам. Представление чисел в виде простых геометрических фигур восходит к древности, когда

определенные комбинации целых чисел использовались для описания различных форм, и было обнаружено, что формы отображают как явные, так и скрытые свойства целых чисел. Эта статья написана, чтобы показать, как численный подход к концепциям теории элементарных чисел, ставший возможным с помощью моделирования электронных таблиц (как обсуждалось в [3]), может быть расширен, чтобы включить символичный подход, который, в свою очередь, стал возможным с помощью цифровых инструментов, таких как *WolframAlpha*, разработанный WolframResearch [26], и *Maple* от WatcomProducts [8] — математическое программное обеспечение для образования и исследований предметов STEM (science, technology, engineering and mathematics — естественные науки, технология, инженерия и математика). Это позволяет использовать символичные вычисления в контексте обучения учителей математики; то есть использовать простое программирование без обучения сложным вычислительным алгоритмам.

WolframAlpha и *Maple* являются примерами цифровых инструментов, способных заменить традиционные алгебраические преобразования с карандашом и бумагой, например нахождение суммы первых n треугольных чисел. В прошлом преподаватели математики использовали численный подход к нахождению этой суммы, предполагая ее общую форму (в виде кубического многочлена по числу членов) с помощью числовых доказательств. В настоящее время численный подход может быть дополнен символьным подходом, с помощью которого такой многочлен генерируется программным обеспечением. В то же время числовой подход все еще может использоваться, поскольку цифровые инструменты, дополненные онлайн-энциклопедией целочисленных последовательностей [20], способны трансформировать числовые последовательности в алгебраическую форму, которая, в свою очередь, может быть численно моделирована электронной таблицей, позволяя, таким образом, проверить трансформацию методом вычислительной триангуляции [2], другими словами, привлекая более чем один компьютерный инструмент для проверки математического результата.

Используя инструменты символических вычислений, в статье демонстрируются различные задачи с многоугольными числами, которые могут быть использованы в университетских курсах, читаемых на кафедре математики или на кафедре педагогики для учителей математики. Это могут быть следующие курсы: «Темы по математике для учителей начальных классов», «Современная общая математика», «Компьютерное обучение математике», «Преподавание математики в средней школе», «Исследования в математическом образовании», «История математики» (тут используются названия курсов, преподававшихся автором за последние три десятилетия в программах магистратуры в штатах Джорджия, Иллинойс и Нью-Йорк). Один из видов задач, обсуждаемый ниже, имеет дело с многоугольными числами, расположенными в виде равносторонних треугольников, равнобедренных треугольников и квадратов. В зависимости от компоновки будет разработан и обсужден ряд вычислительных алгоритмов для суммирования таких чисел — треугольных, квадратных, пятиугольных и, в общем случае, m -угольных. Кроме того, будут сформулированы и доказаны тождества между квадратными числами.

В статье подчеркивается ценность решения математических задач, основанных на интеграции формальных рассуждений и компьютерных вычислений (technology-immune/technology-enabled (TITE) — технологически независимая/технологически зависимая) [1] в современном преподавании элементарных глав теории чисел, что позволяет интегрировать формальные рассуждения и цифровые вычисления в различные курсы математического образования взаимодополняющим образом. Идея TITE, используемая в настоящей статье в качестве концептуальной основы, объясняется в следующем

разделе. Эта структура обеспечивает основу для исследований и методов создания задач, направленных на изучение методов обучения многоугольным числам с использованием различных образовательных инструментов, включая цифровые. В статье предполагается, что мощь современных цифровых инструментов позволяет будущим учителям математики понять и оценить, как с помощью простых алгоритмов можно достичь сложных вычислительных результатов.

2. МЕТОДОЛОГИЯ TITE

Методы решения задач и концептуальная методология, используемые в этой статье, соответствуют структуре TITE (интеграция формальных рассуждений и компьютерных вычислений), представленной в [1]. Задача типа TITE не может быть автоматически решена программным средством одним нажатием кнопки (таким образом, она защищена (иммунна) от прямого использования технологии), однако роль программного обеспечения в решении проблемы остается критической (таким образом, ее решение зависит от использования технологии). Важным аспектом идеи TITE является то, что при решении задачи, когда TI-часть предшествует TE-части, в зависимости от задачи возможны, по крайней мере, два исхода: ошибка в TI-части будет либо проигнорирована, либо распознана в результате действия TE-части. В качестве простого примера представим, что первоклассники, разбившись на небольшие группы, бросают два шестигранных кубика и записывают сумму выпавших чисел. Их учитель хочет, чтобы дети использовали технологии, и просит их найти сумму с помощью калькулятора. Бросание кубиков вручную также может рассматриваться как TE (тактильная) часть действия, за которой следует часть TI — запись чисел, появляющихся на верхних гранях кубиков, скажем, 5 и 6. Далее учащимся нужно ввести числа в калькулятор и выбрать кнопку арифметической операции. По ошибке ребенок выбирает кнопку «÷», которая похожа на «+», и нажимает ее. За этим сразу следует TE (работа калькулятора, и результат выводится на экран (рис. 1).

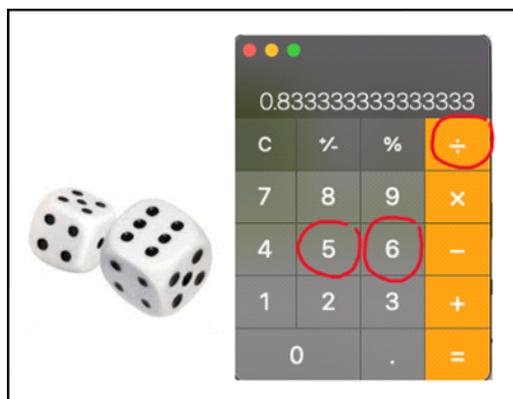


Рис. 1. Ошибочный выбор кнопки приводит к контекстуально некорректному ответу

Твердо веря в технологию, первоклассники могут принять странное число с дисплея за сумму 5 и 6, таким образом не распознав ошибку, возникшую в результате TI-части из-за неправильного выбора клавиши. Они могут даже заподозрить, что при сложении чисел 8 и 3, почему-то выбранных калькулятором и отображенных на дисплее весьма странным образом, получится ответ 11 (который некоторые из них знают как сумму 5 и 6 без помощи калькулятора, возможно, с помощью счета на пальцах). Это можно рассматри-

вать как честную попытку изменить результат, чтобы он соответствовал реальности (см. ниже, например, Раздел 5, символьные модификации *Maple* вычислений, чтобы соответствовать результату, полученному с помощью *WolframAlpha*), а также как подсознательную попытку проверить результат, предоставленный технологией. Вот почему в случае использования программного обеспечения для символьных вычислений проверка результата, зависящего от правильности части ТИ, в специальном случае, точность которого достаточно очевидна, должна быть включена в решение задачи ТТЕ (см. разделы 3–5).

Аналогично ТИ-часть (размышление о смысле проделанных вычислений) может следовать за ТЕ-частью решения задачи, и в то время, как последняя не будет содержать ошибок, первая при отсутствии концептуального понимания происходящего может включать ошибочную интерпретацию результатов последней. Например, некоторые будущие учителя начальных классов считают, что при виртуальном броске двух кубиков с использованием электронной таблицы в качестве генератора случайных чисел (рис. 2, столбцы А и В в обеих электронных таблицах) одинаковое количество бросков (скажем, 2000) должно дать одинаковый результат, а если нет, то разница в экспериментальных вероятностях получить, например, сумму 11 после двух серий бросков, указывает на ошибку в использовании электронной таблицы как части эксперимента (ячейки F2 в обеих электронных таблицах на рис. 2).

	A	B	C	D	E	F
1	Die 1	Die 2		sum	casting 11	Exp. Prob.
2	5	5		10	101	0.0505
3	4	2		6		
1999	1	5		6		
2000	1	1		2		
2001	4	2		6		
2002						

	A	B	C	D	E	F
1	Die 1	Die 2		sum	casting 11	Exp. Prob.
2	4	1		5	95	0.0475
3	2	2		4		
1999	6	2		8		
2000	3	6		9		
2001	1	1		2		

Рис. 2. Две серии бросания кубиков с использованием электронных таблиц

Другой важный аспект идеи ТТЕ связан с ее двойственностью в том смысле, что, хотя часть ТЕ может информировать часть ТИ, последняя, без концептуального понимания первой, может привести желаемую абстракцию к ошибке. Например, будущий учитель, обнаружив, что четыре целых числа 2, 3, 5, 8 представляют, соответственно, количество способов, которыми можно выстроить одну, две, три и четыре двусторонние фишки так, чтобы две красные фишки не располагались вплотную друг к другу (см. рис. 3, сверху), и, получив запрос на индуктивное продолжение последовательности путем распознавания закономерности, ввел четыре целых числа в поле ввода *WolframAlpha* (см. рис. 3, внизу). В результате программа сгенерировала (вместо чисел Фибоначчи) числовую последовательность, в которой каждый член, начиная со второго, на два больше треугольного числа ($3 = 1 + 2$; $5 = 3 + 2$; $8 = 6 + 2$). Будущий учитель продолжил последовательность числами $12 (= 10 + 2)$, $17 (= 15 + 2)$, $23 (= 21 + 2)$ и предоставил замкнутую форму для бесконечной последовательности $a_n = \frac{n^2 - n + 4}{2}$. Сразу заметим, что, для того чтобы связать a_n с треугольным числом t_n , нужно сделать простое преобразование

$$a_n = \frac{n^2 - n + 4}{2} = \frac{n^2 - n}{2} + 2 = \frac{(n-1)n}{2} + 2 = t_{n-1} + 2$$

(подобно наивной попытке первоклассников связать 0,83 с 11).

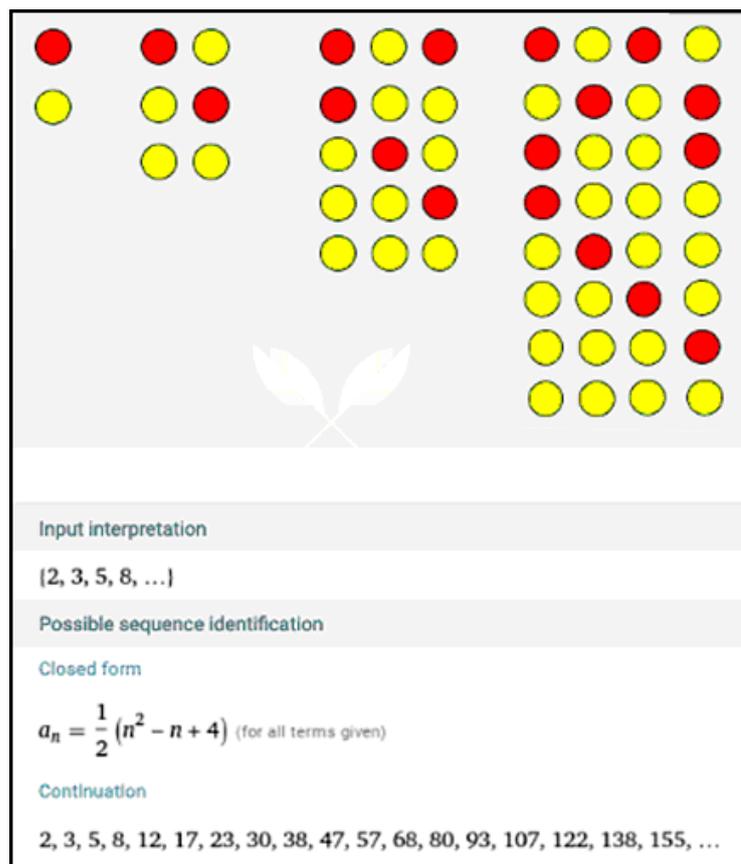


Рис. 3. От тактильной активности к цифровой ТЕ

Аналогичная ситуация возникла, когда будущий учитель нашел числа 2, 3, 5, 8 и, не видя чисел Фибоначчи, дал им следующую интерпретацию: среди двоичных чисел, в которых единицы всегда разделены по, по крайней мере, одним нулем, есть ровно два (0, 1) числа, состоящих из одной цифры, три (00, 01, 10) числа из двух цифр, пять (000, 001, 010, 100, 101) из трех цифр и восемь (0000, 0001, 0010, 0100, 1000, 1001, 1010, 0101) из четырех.

Эти два случая, когда числа Фибоначчи остались незамеченными, предполагают, что переход от визуального к символическому (или от числового к символическому) был бы менее ошибочным, если бы студент обладал некоторым начальным пониманием того, как должен выглядеть ответ [4]. С другой стороны, принятие вышеупомянутого продолжения четырех чисел, которые для некоторых, впрочем, “очевидны” как четыре последовательных числа Фибоначчи, подтверждает педагогическую рекомендацию, что при работе со студентами, чье мышление отличается от ожидаемого, следует обладать интеллектуальной смелостью, чтобы признать неожиданное “as strength and resources upon which to build (как силу и ресурсы, на которых можно строить)” [6, с. 22].

В то же время ТИ-часть может использоваться для повышения эффективности части ТЕ, что, в свою очередь, поддерживает продвижение части ТИ на уровне абстракции. Например, при решении уравнений $x + y + z = 9$ и $x + y + z = 10$, используя *WolframAlpha*, в связи с вопросом, сформулированным в контексте азартных игр, на который ответил Галилео Галилей — почему десятка появляется чаще, чем девятка, при бросании трех кубиков. В то время, как ТЕ-частью является решение этих уравнений, включение неравенств

$7 > x \geq y \geq z > 0$ в случае каждого решения значительно повышает эффективность вычислений, позволяя в конечном итоге выяснить, что существует 27 и 25 упорядоченных разбиений для 10-и и 9-и, соответственно, что приводит к теоретическим вероятностям, равным $\frac{27}{216} \approx 0,125$ и $\frac{25}{216} \approx 0,116$, соответственно.

Различные задачи типа ТПТЕ будут рассмотрены в разделах 3–5 ниже.

3. ПОСТРОЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТРЕУГОЛЬНЫХ ЧИСЕЛ КАК ЗАДАЧА ТПТЕ

ТПТЕ решение математических задач может включать использование нескольких программных средств в поддержку одной задачи для обеспечения строгости решения с помощью вычислительной триангуляции [2]. Во многих случаях использование различных инструментов — числовых, символьных, графических — не только обеспечивает строгость при решении задачи, но и побуждает к глубокому осмыслению полученных с помощью вычислений результатов, которые могут привести к формулированию новых задач. Кроме того, разнообразие программных средств способствует развитию вычислительного мышления [25], которое, среди прочих «передаваемых навыков... [пользуется] высоким спросом в современном глобально связанном мире с его беспрецедентным развитием технологий» [17, с. 30]. В то же время, поскольку, по словам преподавателей математики в Южной Африке [12, с. 78], «учителя математики, а не средства ИКТ, являются ключом к качественному образованию», для развития вычислительного мышления учащихся и осознания технологического разнообразия требуется «более знающий другой» [23] при изучении математики в школе.

В этом разделе числовые и символьные действия с треугольными числами будут интегрированы с их расположением в треугольных формах с использованием подхода ТПТЕ. Одна из таких интеграций заключается в том, что усиление визуального с помощью числового позволяет перейти к исследованию теории чисел на уровне символьного обобщения. Однако из-за двойственности ТПТЕ подхода, как было упомянуто в разделе 2, следует иметь в виду, что без концептуального понимания того, что должна обеспечивать технология, ТП часть может завести в тупик на уровне обобщения. В качестве первого примера ТПТЕ задачи теории чисел рассмотрим равносторонний треугольник (рис. 4), который представляет собой формирование треугольных чисел в виде частичных сумм последовательных натуральных чисел. Здесь каждое натуральное число представлено рядом кружков, так что частичные суммы равны $1 = 1$; $3 = 1 + 2$; $6 = 1 + 2 + 3$; ...; $21 = 1 + 2 + \dots + 6$. Представление числа 21 как 6-й частичной суммы может быть интерпретировано в предположении, что каждый кружок имеет числовое значение, равное единице. Но в качестве альтернативных числовых значений для кружков можно рассматривать частичные суммы чисел как значения, присваиваемые кружкам. Каждому кружку можно присвоить треугольное число, чтобы весь треугольник был заполнен последовательными треугольными числами. На рисунке 4 показано такое сопоставление для равностороннего треугольника, состоящего из шести строк. Пусть $S_{n,1}^3$ — сумма чисел в первых n строках (расширенного) треугольника показанного на рис. 4. В обозначении $S_{n,1}^3$ верхний индекс 3 указывает на треугольные числа, нижние индексы n и 1 указывают, соответственно, на количество строк в треугольнике и разницу между количеством кружков в двух соседних строках. Нахождение формулы для $S_{n,1}^3$ и вычисление ее символьного выражения представляют собой ТПТЕ задачу.

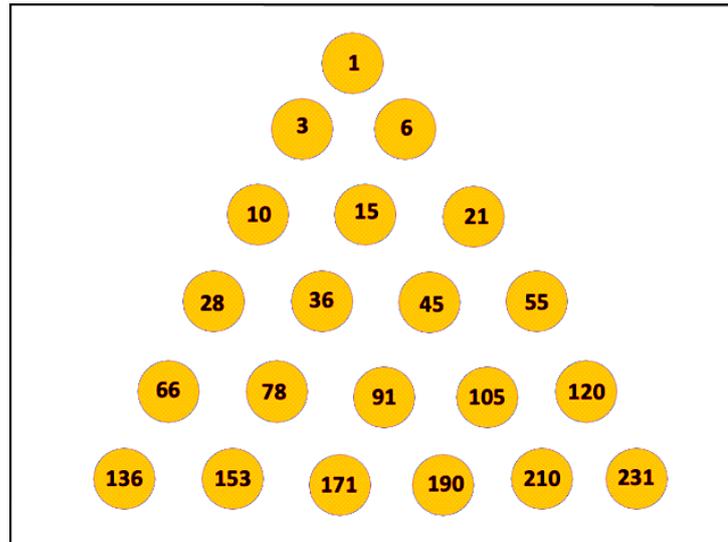


Рис. 4. Равносторонний треугольник, заполненный последовательными треугольными числами

Чтобы решить задачу с использованием подхода ТТЕ, нужно начать с построения формулы (шаг Т1) для вычисления $S_{n,1}^3$ (шаг ТЕ). На рис. 4 имеется шесть строк, в каждой из которых крайнее правое число является треугольным числом, ранг которого (количество слагаемых или, что то же, порядковый номер этого числа) также является треугольным числом. Например, крайнее правое число в строке 2 равно $6 = t_3 = t_2$, крайнее правое число в строке 3 равно $21 = t_6 = t_3$, крайнее правое число в строке 4 равно $55 = t_{10} = t_4$ и так далее (см. рис. 4).

Если крайнее правое число в строке n (состоящей из n кружков) равно t_{t_n} , то строка $(n+1)$ имеет следующее треугольное число $t_{t_{n+1}}$ в крайнем левом углу и число $t_{t_{n+1}}$ в крайнем правом. Действительно, если крайнее левое число в ряду $n+1$ с $(n+1)$ кружками — это $t_{t_{n+1}}$, то следующим числом в этом ряду является $t_{t_{n+2}}$, затем число $t_{t_{n+3}}$, ..., и, таким образом, крайнее правое число в этом ряду $t_{t_{n+(n+1)}}$. Из соотношения $t_{n+1} - t_n = n+1$ следует, что $t_{t_{n+(n+1)}} = t_{t_{n+1}}$. Итак, крайнее правое число в ряду n — это t_{t_n} . То есть,

$$S_{n,1}^3 = 1 + 3 + 6 + \dots + t_{t_n}. \quad (1)$$

Правая часть соотношения (1) представляет собой сумму первых t_n треугольных чисел. Но сначала нужно найти сумму первых n треугольных чисел. В настоящее время такая сумма

$$1 + 3 + 6 + \dots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \quad (2)$$

может быть найдена с помощью *WolframAlpha* (рис. 5) и формулы (1).

Чтобы завершить суммирование в (1), можно либо использовать формулу (2), в которой n необходимо заменить на $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$ (шаг Т1, предполагающий, что сумма представляет собой многочлен шестой степени), чтобы получить $S_{n,1}^3 = \frac{n(n+1)(n^2+n+2)(n^2+n+4)}{48}$, или сделать это с помощью компьютера (шаг ТЕ), введя в поле ввода *WolframAlpha* команду "sum i(i+1)/2 for i=1 to n(n+1)/2". (Обратите внима-

ние, что каждый снимок экрана программы, изображенный в этой статье, включает выражение суммирования, такое как $i(i+1)/2$, а также его границы, 1 и $n(n+1)/2$, что облегчает аналогичные вычисления). Как показано на рис. 6, этап ТЕ быстро обрабатывает соответствующий этап ТИ и выдает соотношение

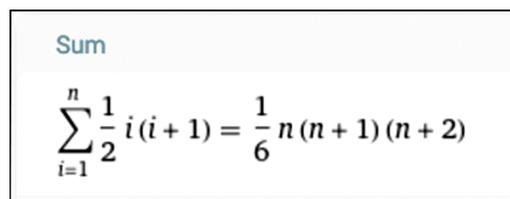
$$S_{n,1}^3 = \sum_{i=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n^2+n+2)(n^2+n+4)}{48}. \quad (3)$$

В качестве своеобразной проверки точности решения вышеупомянутой задачи ТИТЕ, когда на шаге ТЕ просто выполняется предыдущий шаг ТИ, можно показать, что формула (3) генерирует число 10, в случае $n = 2$. Действительно, $S_{n,1}^3 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 10}{48} = 10$ — сумма чисел в первых двух строках (рис. 4). Другие ТИТЕ задачи будут рассмотрены в разделах 4 и 5 ниже.

Замечание 1. Как отмечают преподаватели математики в Японии, «алгебраические выражения ... могут быть преобразованы в формы, которые легче интерпретируются» [14, с. 27]. Сравнивая формулы (2) и (3), можно заметить, что *если сумма первых n треугольных чисел равна $1/6$ части произведения трех последовательных целых чисел, начиная с n , то сумма первых $n(n+1)/2$ треугольных чисел равна $1/6$ от произведения трех последовательных целых чисел, начиная с $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$* (рис. 5 и рис. 6). Действительно,

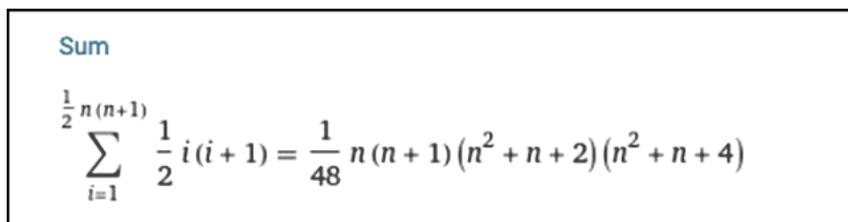
$$\frac{n(n+1)(n^2+n+2)(n^2+n+4)}{48} = \frac{\frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{n(n+1)}{2} + 1 \right) \left(\frac{n(n+1)}{2} + 2 \right)}{6}.$$

Например, при $n = 4$, $t_n = 10$ и сумма первых десяти треугольных чисел равна $1 + 3 + 6 + \dots + 55 = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{6} = 220$.



The screenshot shows a window titled "Sum" containing the mathematical formula:
$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} i(i+1) = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2)$$

Рис. 5. Вычисление суммы первых n треугольных чисел



The screenshot shows a window titled "Sum" containing the mathematical formula:
$$\sum_{i=1}^{\frac{1}{2} n(n+1)} \frac{1}{2} i(i+1) = \frac{1}{48} n(n+1)(n^2+n+2)(n^2+n+4)$$

Рис. 6. Вычисление суммы первых t_n треугольных чисел

4. ПОСТРОЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КВАДРАТНЫХ ЧИСЕЛ КАК ЗАДАЧА ТИТЕ

Так же, как и в случае треугольных чисел, может быть поставлена задача исследовать расположение квадратных чисел в треугольниках, имеющих ряды с длинами, образующими арифметическую прогрессию. Пусть $S_{n,k}^4$ ($k = 1, 2, 3, 4$) — сумма чисел в первых n строках (расширенных) треугольников на рисунке 7 ($k = 1$) и рисунке 8 (вверху $k = 2$; внизу $k = 3$), соответственно. Нахождение символьных выражений для трех сумм является ТИТЕ задачей. Как показано на диаграмме (см. рис. 7), математический анализ которой (и последующих диаграмм) является ТИ-частью задачи, где разница между двумя последовательными длинами равна единице, крайнее правое число в n -ом ряду является квадратом треугольного числа ранга n . Следовательно, используя *WolframAlpha* в качестве ТЕ-части задачи, можно обнаружить, что сумма чисел в n строках расширенной диаграммы (см. рис. 7) равна

$$S_{n,1}^4 = \frac{(n^2 + n)(n^2 + n + 1)(n^2 + n + 2)}{24}. \quad (4)$$

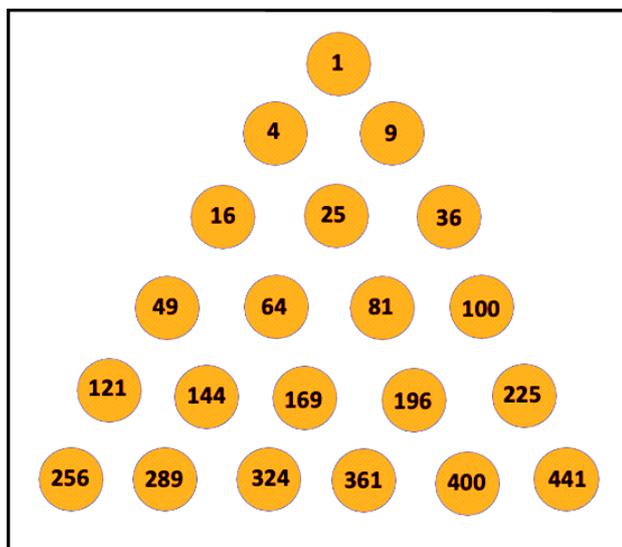


Рис. 7. Расположение квадратных чисел внутри равностороннего треугольника

Как показано на рисунке 8 (вверху), где разность длин двух последовательных рядов равна 2, крайнее правое число в n -ом ряду является квадратом n . Следовательно, используя *WolframAlpha* в качестве ТЕ-части задачи, можно обнаружить, что сумма чисел в n строках расширенной диаграммы на рисунке 8 (вверху) равна

$$S_{n,2}^4 = \frac{n^2(n^2 + 1)(2n^2 + 1)}{6}. \quad (5)$$

Как показано на рисунке 8 (внизу), где разница между длинами двух последовательных строк равна трем, крайнее правое число в ряду n — это квадрат пятиугольного числа ранга n . Следовательно, используя *WolframAlpha* в качестве ТЕ-части задачи, можно обнаружить, что сумма чисел в n строках расширенной диаграммы на рисунке 8 (внизу) равна

$$S_{n,3}^4 = \frac{(3n^2 - n)(3n^2 - n + 1)(3n^2 - n + 2)}{24}. \quad (6)$$

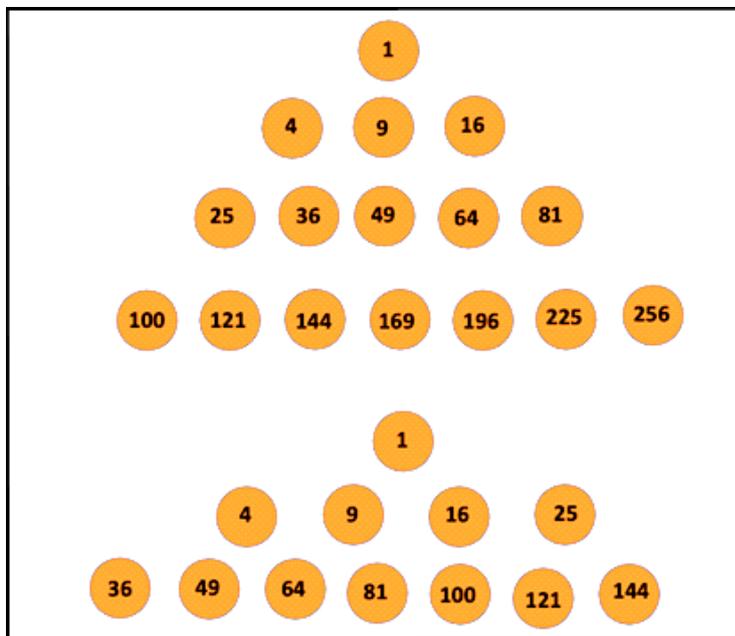


Рис. 8. Альтернативные расположения квадратных чисел в равнобедренных треугольниках

Аналогично, используя *WolframAlpha*, можно вычислить (случай $k = 4$ на рисунках не изображен)

$$S_{n,4}^4 = \frac{(2n^2 - n)(2n^2 - 2n + 1)(4n^2 - 2n + 1)}{6}. \quad (7)$$

Замечание 2. Правые части соотношений (4-7) могут быть преобразованы к виду

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}. \quad (8)$$

Действительно, в случае соотношения (4), задав $k = \frac{n^2 + n}{2}$ — треугольное число ранга n , мы имеем $\frac{(n^2 + n)(n^2 + n + 1)(n^2 + n + 2)}{24} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$. Другими словами, если число слагаемых в сумме первых квадратных чисел равно n -ому треугольному числу t_n , то эта сумма равна $1/6$ произведения $t_n(t_n + 1)(2t_n + 1)$. В частности, если $n = 2$, мы имеем $t_2 = 3$ и $1 + 4 + 9 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 7}{6} = 14$.

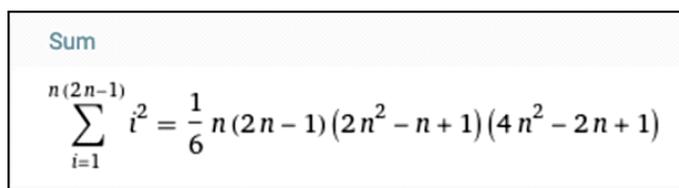
В случае соотношения (5), задав $k = n^2$ — квадратное число ранга n , мы имеем $\frac{n^2(n^2 + 1)(2n^2 + 1)}{6} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$. Другими словами, если число слагаемых в сумме первых квадратных чисел равно n -ому квадратному числу s_n , то эта сумма

равна $1/6$ произведения $s_n(s_n + 1)(2s_n + 1)$. В частности, если $n = 2$, мы имеем $s_2 = 4$ и $1 + 4 + 9 + 16 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 9}{6} = 30$.

В случае соотношения (6), задав $k = \frac{3n^2 - n}{2}$ — пятиугольное число ранга n , мы имеем $\frac{(3n^2 - n)(3n^2 - n + 1)(3n^2 - n + 2)}{24} = \frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6}$. Другими словами, если число слагаемых в сумме первых квадратных чисел равно n -ому пятиугольному числу p_n , то эта сумма равна $1/6$ произведения $p_n(p_n + 1)(2p_n + 1)$. В частности, если $n = 2$, то мы имеем $p_2 = 5$ и $1 + 4 + 9 + 16 + 25 = \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} = 55$.

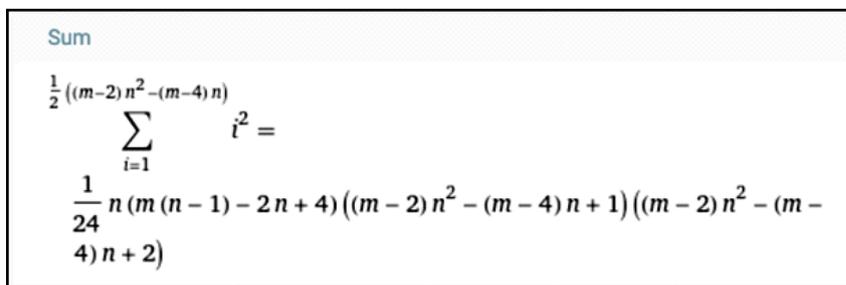
В случае соотношения (7), устанавливая $k = 2n^2 - n$ — шестиугольное число ранга n , получаем $\frac{(2n^2 - n)(2n^2 - n + 1)(4n^2 - 2n + 1)}{6} = \frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6}$ (рис. 9). Другими словами, если число слагаемых в сумме первых квадратных чисел равно n -ому шестиугольному числу h_n , то эта сумма равна $1/6$ произведения $h_n(h_n + 1)(2h_n + 1)$. В частности, если $n = 2$, то мы имеем $h_2 = 6$ и $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = \frac{6 \cdot 7 \cdot 13}{6} = 91$.

В общем случае, задав $k = \frac{n^2(m-2) - n(m-4)}{2}$ — m -угольное число ранга n , используя *WolframAlpha* (рис. 10) при нахождении $\sum_{i=1}^{\frac{n^2(m-2) - n(m-4)}{2}} i^2$ приходим к соотношению $\frac{(n^2(m-2) - n(m-4))(n^2(m-2) - n(m-4) + 1)(n^2(m-2) - n(m-4) + 2)}{24} = \frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6}$. Другими словами, если число слагаемых в сумме первых квадратных чисел равно n -ому m -угольному числу $P(m, n)$, то эта сумма равна $1/6$ произведения $P(m, n)(P(m, n) + 1)(2P(m, n) + 1)$.



$$\sum_{i=1}^{n(2n-1)} i^2 = \frac{1}{6} n(2n-1)(2n^2 - n + 1)(4n^2 - 2n + 1)$$

Рис. 9. Вычисление суммы первых h_n квадратных чисел



$$\sum_{i=1}^{\frac{1}{2}((m-2)n^2 - (m-4)n)} i^2 = \frac{1}{24} n(m(n-1) - 2n + 4)((m-2)n^2 - (m-4)n + 1)((m-2)n^2 - (m-4)n + 2)$$

Рис. 10. Вычисление суммы первых $P(m, n)$ квадратных чисел

Замечание 3. Представление правых частей соотношений (6) и (7) в виде $\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ можно рассматривать как первый шаг к доказательству того, что соответствующие произведения кратны 6. Чтобы завершить доказательство, нужно предположить, что $k(k+1)(2k+1)$ кратно 6, а затем выполнить индуктивный переход от k к $k+1$, отметив, что $(k+1)(k+2)(2k+3) - k(k+1)(2k+1) = 6(k+1)^2$, то есть переход от k к $k+1$ сохраняет делимость на 6. Обратите внимание, что содержание последних двух замечаний показывает, как часть ПИ может следовать за частью ТЕ в рамках задачи ТПТЕ.

5. ПОСТРОЕНИЕ КВАДРАТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТРЕУГОЛЬНЫХ ЧИСЕЛ КАК ЗАДАЧА ТПТЕ

Треугольные числа могут быть расположены в виде квадратов, образующих лестницу, ступени которой увеличиваются в размерах на один, два, три, четыре и т. д. ряда кружков. Рассмотрим случай последовательности квадратов $n \times n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, в котором последовательные натуральные числа являются размерами квадратов (рис. 11). То есть ступени лестницы увеличиваются в размерах на один ряд кружков. Кружки, образующие квадраты, заполняются последовательными треугольными числами. Можно видеть, что увеличение ранга последнего треугольного числа в квадрате $n \times n$ на единицу дает первое треугольное число в квадрате $(n+1) \times (n+1)$. Другими словами, если ранги первого и последнего треугольных чисел в квадрате $n \times n$ равны, соответственно, a_n и b_n , то можно сформулировать задачу: Докажите тождество

$$t_{b_{n+1}} = t_{a_{n+1}}. \tag{9}$$

До сих пор тождества и их вычислительные доказательства в этой статье не рассматривались. Имея это в виду, обратим внимание, что в процессе доказательства тождества (9) возможная ошибка в части ПИ будет распознана в части ТЕ. Это существенно отличается от использования программного обеспечения при вычислении формул, разработанных в рамках ПИ. Следовательно, некоторые проблемы этого раздела, связанные с доказательством тождества, отличаются от тех, которые рассматривались в предыдущих разделах.

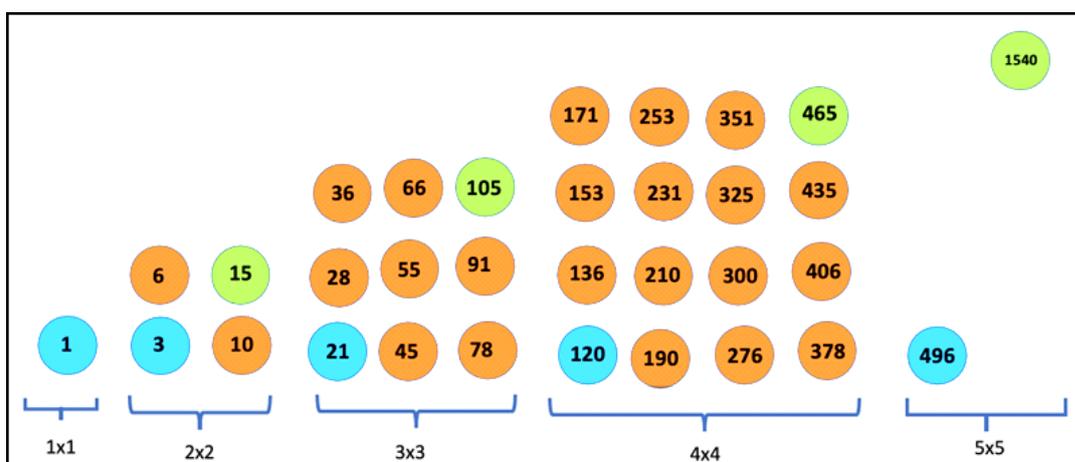


Рис. 11. Последовательные квадраты, заполненные последовательными треугольными числами

Чтобы начать TI-часть, нужно выбрать и записать первое и последнее треугольные числа в каждом квадрате. Первыми числами (нижними левыми) являются

$$1, 3, 21, 120, 496, \dots \quad (10)$$

Ранги треугольных чисел (10) можно найти, отметив, что n -й квадрат на (расширенном) рисунке 11 построен из n^2 , так что переход от последовательности (10) к последовательности соответствующих рангов требует сложения чисел 1, 4, 9, 16, 25, 36, ... до предыдущего ранга. Соответственно, получаем $1+1=2$, $2+4=6$, $6+9=15$, $15+16=31$, $31+25=56$, ... То есть, числовая последовательность

$$1, 2, 6, 15, 31, 56, \dots \quad (11)$$

представляет собой ранги треугольных чисел (10).

Аналогично, последние числа в каждом квадрате (верхние правые) являются треугольными числами

$$1, 15, 105, 465, 1540, \dots, \quad (12)$$

ранги которых могут быть найдены путем добавления последовательных квадратных чисел к предыдущему рангу соответственно. Таким образом мы получим последовательность рангов чисел последовательности чисел (9):

$$1, 5, 14, 30, 55, 91, \dots \quad (13)$$

ТЕ частью доказательства тождества (9) является ввод последовательностей (11) и (13) в поле ввода *WolframAlpha*, чтобы получить аналитические решения. Как показано на рисунке 12, последовательность (11) имеет вид

$$a_n = \frac{2n^3 - 3n^2 + n + 6}{6}. \quad (14)$$

Как показано на рисунке 13, последовательность (13) имеет форму (которая может показаться знакомой)

$$b_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (15)$$

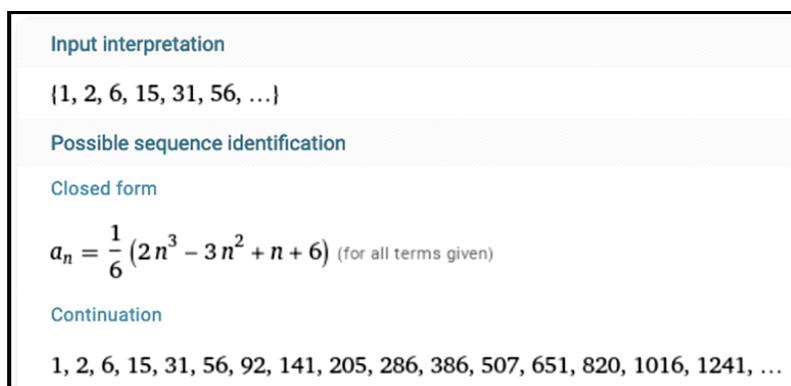


Рис. 12. От последовательности (11) к ее аналитической форме с использованием *WolframAlpha*

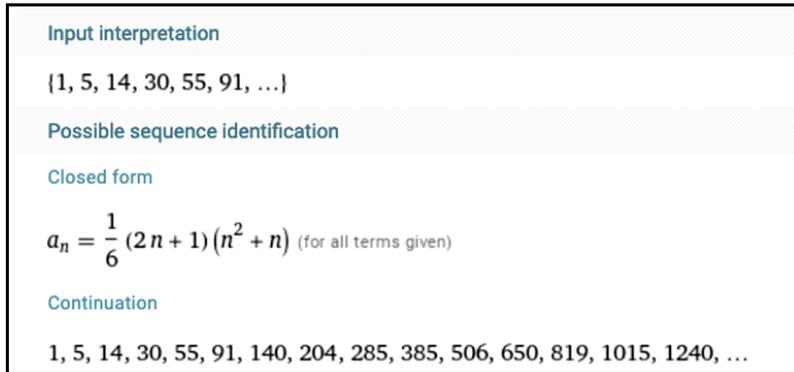


Рис. 13. От последовательности (12) к ее аналитической форме с использованием WolframAlpha

Точность формулы (15) может быть подтверждена тем, что она идентична формуле (8) — действительно, по конструкции n -й член последовательности (13) является суммой первых n квадратов натуральных чисел, точность формулы (14) может быть подтверждена с помощью вычислительной триангуляции [2], так как последовательность (11) может быть записана как

$$a_{n+1} = a_n + n^2, \quad a_1 = 1, \tag{16}$$

затем решаем рекуррентное уравнение (16) с помощью Maple (рис. 14) и, наконец, получаем формулу (14), разложив на множители произведение $(n + 1)(2n^2 - 5n + 6)$, тем самым используя два вычислительных инструмента для получения одного и того же результата. Для еще одного способа проверки правильности формул (14) и (15) заметим, что $n \times n$ квадрат включает в себя n^2 кружков, количество которых на один больше, чем разность между рангами первого и последнего кружков. Можно убедиться, что, действительно, $b_n - a_n = n^2 - 1$.

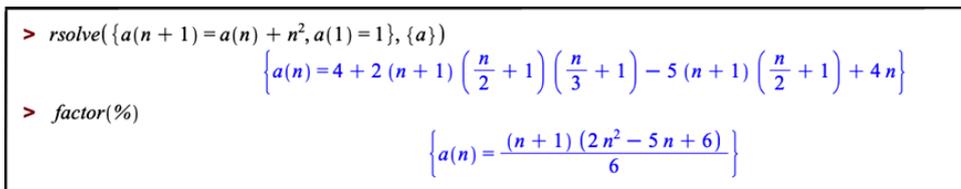


Рис. 14. От рекурсивной последовательности (11) к ее аналитической форме с использованием Maple

Заключительная часть задачи — применение Maple (рис. 15) для доказательства тождества (9) с использованием формул (14) и (15). Доказательство не только подтверждает тождество (9), но также подтверждает точность формул (14) и (15), которые уже были подтверждены с помощью различных методов. Еще раз отметим, что для проверки формул (14) и (15) была применена вычислительная триангуляция [2].

Теперь все готово для нахождения суммы чисел в квадрате $n \times n$ с помощью WolframAlpha (рис. 16). Формула суммирования

$$\sum_{a_n}^{b_n} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{n^2(4n^6 + 7n^4 + 23n^3 + n^2 + 12n + 24)}{72},$$

```

> a(n) := (2*n^3 - 3*n^2 + n + 6) / 6
a := n ↦ 1/3*n^3 - 1/2*n^2 + 1/6*n + 1
> b(n) := (n*(n+1)*(2*n+1)) / 6
b := n ↦ (n*(n+1)*(2*n+1)) / 6
> ((b(n)+1)*(b(n)+2) / 2 - (a(n+1)*(a(n+1)+1) / 2))
((n(n+1)(2n+1)/6 + 1) * (n(n+1)(2n+1)/6 + 2)) / 2
- ((n+1)^3 / 3 - (n+1)^2 / 2 + n/6 + 7/6) * ((n+1)^3 / 3 - (n+1)^2 / 2 + n/6 + 13/6) / 2
> simplify(%)
0

```

Рис. 15. Подтверждение тождества (9) с использованием *Maple*; символ % означает “последнее”

```

Sum
1/6 * n(n+1)(2n+1)
∑ (i(i+1) / 2)
i = 1/6 * (n+1)(2n^2 - 5n + 6)
1/72 * n^2 (4n^6 + 7n^4 + 24n^3 + n^2 + 12n + 24)

```

Рис. 16. Нахождение суммы треугольных чисел внутри квадрата $n \times n$

где границы суммирования a_n и b_n , определяются соотношениями (14) и (15), соответственно, приводит к новой ТПЕ-задаче: доказать, что числитель в правой части формулы суммирования является кратным 72. Можно проверить, что формула суммирования верна для первых двух квадратов, задавая числа 1 и 34 как суммы треугольных чисел в первых двух квадратах на рисунке 11.

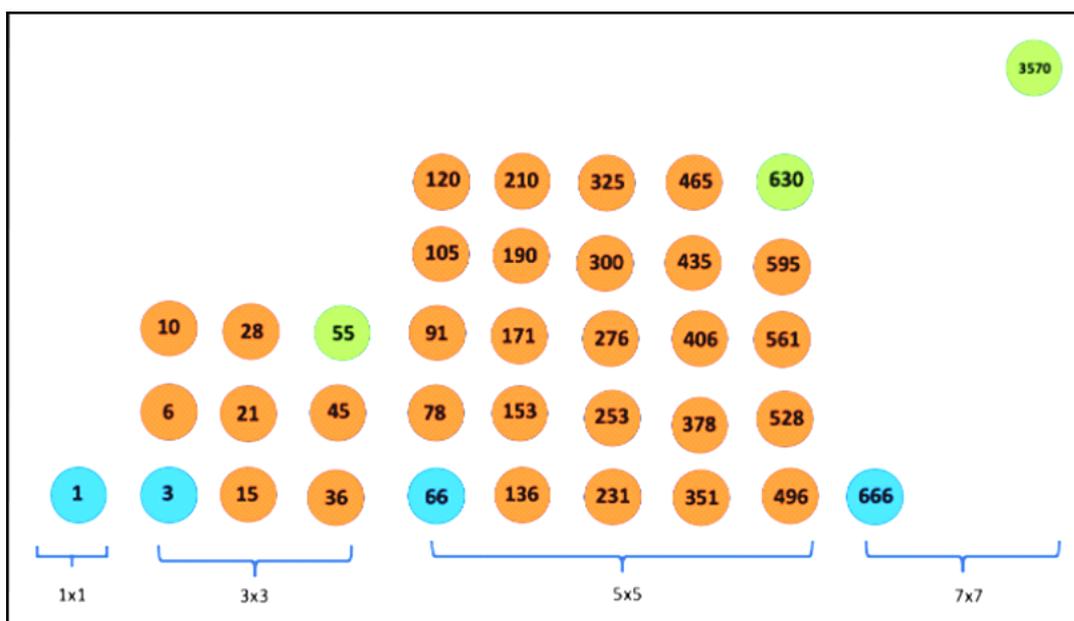
Почти таким же образом треугольные числа могут быть помещены в кружки, образованные квадратами нечетных размеров (рис. 17), и задачей ТПЕ было бы доказать тождество

$$t_{b_{n+1}} = t_{a_{n+1}}, \quad (17)$$

где $a_n = \frac{n(4n^2 - 12n + 11)}{3}$ и $b_n = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}$ определяются с помощью *WolframAlpha*. Тождество (17) может быть передано *Maple* на символьное доказательство (рис. 18).

Аналогично, квадраты нечетных размеров могут быть заполнены квадратными и пятиугольными числами, так что в случае последовательности квадратов $(2n - 1) \times (2n - 1)$ могут быть доказаны следующие тождества: $s_{b_{n+1}} = s_{a_{n+1}}$ и $p_{b_{n+1}} = p_{a_{n+1}}$, где $s_n = (a_n)^2$ и $p_n = \frac{n(3n - 1)}{2}$.

ТИТЕ-задачи, обсуждаемые в этом разделе, могут быть использованы в качестве самостоятельных заключительных курсовых проектов по решению задач с использованием компьютерных вычислителей. Такие проекты позволяют будущим учителям старших классов «использовать классические идеи, которые обычно не включаются в основную математическую дисциплину» [10, с. 63], и исследовать их через призму ТИТЕ, чтобы увидеть, «как рассуждения и доказательства могут появиться в математике средней школы за пределами их традиционного использования в аксиоматической евклидовой геометрии» [10, с. 59].



6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассматривались задачи по элементарной теории чисел с технологической поддержкой в контексте обучения учителей математики. Обзор недавно опубликованных исследований в области математического образования, проведенных в Нигерии [5], Филиппинах [7], Турции [11] Италии [18] и Испании [19], показал отсутствие использования компьютерных программ при обучении треугольным (и другим многоугольным) числам на среднем и на высшем уровнях преподавания теории чисел. Отсутствие компьютеров в образовательном контексте треугольных чисел послужило мотивацией для написания этой статьи. Были исследованы различные геометрические расположения многоугольных чисел. Расположение включало равносторонние и равнобедренные треугольники, формы которых определялись арифметическими последовательностями. Суммирование чисел, включенных в эти геометрические формы, поддерживалось *Maple* и *WolframAlpha*. Именно сложность таких числовых структур, объединяющих арифметические и геометрические закономерности, определяемые числовыми последовательностями, организованными в геометрические фигуры, потребовала символьных вычислений для понимания математического поведения закономерностей. Были обсуждены идеи для исследований, включающих компоновку многоугольных чисел в образующие лестницу квадраты, и предложены для самостоятельных заключительных курсовых проектов.

Было показано, что многоугольные числа служат источником задач, которые позволяют объединить возможности символьных преобразований и визуальное понимание при решении различных математических задач. Важность такой интеграции была признана Жан-Жаком Руссо, женеvским философом и писателем XVIII-го века, в его автобиографической книге «Признания». ([https://en.wikipedia.org/wiki/Confessions_\(Rousseau\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Confessions_(Rousseau))), «В первый раз, когда я путем вычислений обнаружил, что квадрат бинорма состоит из квадратов его двух частей плюс удвоенное произведение этих двух, я отказывался верить в это, пока не нарисовал фигуру» (цитируется в [4, с. 222]). Такой подход можно проследить еще глубже в истории цивилизации — как отмечал Аристотель в IV-м веке до н. э., «душа никогда не мыслит без образа» (цитируется в [4, с. 12]). Это позволяет объединить теорию чисел и геометрию как различные разделы математики под эгидой, обогащенной историческими перспективами [15]. В то же время для преподавания сложных математических идей в духе великих мыслителей прошлого требуется «более знающий другой» [23] в классе. Рассмотрение идей, связанных с многоугольными числами, продемонстрировало, как учащиеся, «распознавая, описывая и работая с числовыми и нечисловыми и закономерностями... учатся быстро переходить от одного представления к другому» [24, с. 11] под руководством знающих учителей.

Были выделены три типа задач, связанных с интеграцией формальных рассуждений и компьютерных вычислений (ТИТЕ). Первый тип включает задачи, в которых корректность вычислений (часть ТЕ) зависит от правильности математических рассуждений (часть ТИ), ответственных за создание вычислительных алгоритмов. Этот тип был выделен благодаря пониманию рисунка 4, на котором последнее число в строке n является треугольным числом ранга $\frac{n(n+1)}{2}$. Второй тип включает задачи, в которых разнообразие рассуждений с помощью индукции (часть ТИ) могут привести к вычислениям (часть ТЕ), результаты которых опровергают примеры, включенные в базу индукции. Этот тип был проиллюстрирован на примерах подсчета количества специальных комбинаций двух цветных фишек и количества специальных двоичных чисел различной длины будущи-

ми учителями (раздел 2). Третий тип (раздел 5) включает задачи, связанные с доказательством тождеств (часть TE), построенных на основе интерпретации геометрических конструкций (часть TI). Этот тип был описан как имеющий правильность части TI, зависящую от результата части TE, в том смысле, что неспособность прийти к этому результату указывает на неточность задействованного математического мышления. Аналогичная идея применима к любому использованию программного обеспечения для доказательства соотношений, требующих сложных символьных вычислений (например соотношения (6)).

Задачи, предложенные в статье, могут быть использованы в основном в работе с будущими учителями математики средней школы. В высшей школе, за пределами педагогического образования, задачи могут быть использованы со студентами нематематических специальностей как способ продемонстрировать мощь современных цифровых инструментов, которые могут обрабатывать довольно сложные символьные вычисления с использованием простых математических алгоритмов. Как было показано в статье, несмотря на относительную простоту этих алгоритмов, их создание требует определенного уровня математической зрелости и компетентности в совместном использовании рассуждений и вычислений. Эти навыки важны для эпистемологического и прагматического развития рабочей силы, ориентированной на STEM в XXI-м веке.

Список литературы

1. Abramovich, S. (2014). Revisiting mathematical problem solving and posing in the digital era: toward pedagogically sound uses of modern technology. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45(7), 1034–1052.
2. Abramovich, S. Computational triangulation in mathematics teacher education. *MDPI Computation* 2023, 11(2), 31.
3. Abramovich, S.; Fujii, T.; Wilson, J. Multiple-application medium for the study of polygonal numbers. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 1995, 14(4), 521–557.
4. Arnheim, R. *Visual Thinking*; University of California Press: Berkeley and Los Angeles, CA, USA, 1969.
5. Asiru, M. A. (2008). A generalization of the formula for the triangular number of the sum and product of natural numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39(7), 979–985.
6. Association of Mathematics Teacher Educators. *Standards for Preparing Teachers of Mathematics*, 2017. Available online at <https://amte.net/standards> (accessed on August 13, 2023).
7. Berana, P.J.; Montalbo, J.; Magpantay, D. (2015). On triangular and trapezoidal numbers. *Asia Pacific Journal of Multidisciplinary Research*, 3(4), 76–81. 88. www.wolframalpha.com
8. Char, B.W.; Geddes, K.O.; Gonnet, G.H.; Leong, B.L.; Monagan, M.B.; Watt, S.M. *Maple V Language Reference Manual*; Springer: New York, NY, USA, 1995. 888. OEIS®, <https://oeis.org>
9. Common Core State Standards. *Common Core Standards Initiative: Preparing America's Students for College and Career* [on-line materials], 2010. Available at <http://www.corestandards.org> (accessed on August 13, 2023).
10. Conference Board of the Mathematical Sciences. *Mathematical Education of Teachers II*. Mathematical Association of America: Washington, DC, USA, 2012.
11. Demircioglu, H. (2023). Preservice mathematics teachers' proving skills in an incorrect statement: Sums of triangular numbers. *Pedem Journal of Education and Instruction*, 13(1), 326–333.
12. Department of Basic Education. *Mathematics Teaching and Learning Framework for South Africa: Teaching Mathematics for Understanding*; Department of Basic Education: Private Bag, Pretoria, South Africa, 2018.
13. Hardy, G.H. An introduction to the theory of numbers. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1929, 35(6), 778–818.
14. Isoda, M. *Japanese Curriculum Standards for Mathematics (2012-2020): Junior High School Teaching*

- Guide for the Japanese Course of Study: Mathematics (Grade 7-9); Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology (MEXT); CRICED, University of Tsukuba: Tsukuba, Ibaraki, Japan, 2010.
15. Jankvist, T.U. A categorization of the ‘whys’ and ‘hows’ of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 2009, 71(3), 235–261.
 16. Koshy, T. *Elementary Number Theory with Applications*. Academic Press: New York, NY, USA, 2002.
 17. Ontario Ministry of Education. (2020). *The Ontario Curriculum, Grades 1–8, Mathematics (2020)*, Available online at <http://www.edu.gov.on.ca> (accessed on August 13, 2023).
 18. Pedemonte, B.; Buchbinder, O. (2011). Examining the role of examples in proving processes through a cognitive lens: The case of triangular numbers. *ZDM Mathematics Education*, 43(2), 257–267.
 19. Plaza, A. (2016). Proof without words: Sum of triangular numbers. *Mathematics Magazine*, 89(1), 36–37.
 20. N. J. A. Sloane, “The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences® (OEIS®),” in *oeis.org*, 2023. [Online]. Available: <https://oeis.org/>
 21. Vavilov, N. A. (2020). Computers as novel mathematical reality. II. Waring problem. *Computer Tools in Education*, 2020, 3, 5–55, (in Russian); doi: 10.32603/2071-2340-2020-3-5-55.
 22. Vygotsky, L. S. The instrumental method in psychology (talk given in 1930 at the Krupskaya Academy of Communist Education). *Lev Vygotsky Archive*. [On-line materials], 1930. Available at: <https://www.marxists.org/archive/vygotsky/works/1930/instrumental.htm> (accessed on August 13, 2023).
 23. Vygotsky, L.S. *Mind in Society*; Harvard University Press: Cambridge, MA, USA, 1978.
 24. Western and Northern Canadian Protocol. *The Common Curriculum Framework for Grades 10–12 Mathematics*, 2008. Available online: http://www.bced.gov.bc.ca/irp/pdfs/mathematics/WNCPmath1012/2008math1012wncp_ccf.pdf (accessed on August 13, 2023).
 25. Wing, J.M. Computational thinking. *Communications of the ACM*, 2006, 49, 33–35.
 26. Wolfram Alpha LLC, “WolframAlpha,” in *wolframalpha.com*, 2023. [Online Soft]. Available: <https://www.wolframalpha.com/>
 27. Zazkis, R.; Campbell, S. R. Eds. *Number Theory in Mathematics Education: Perspectives and Prospects*. Lawrence Erlbaum: Mahwah, NJ, USA, 2006.

Поступила в редакцию 25.06.2023, окончательный вариант — 20.07.2023.

Абрамович Сергей Михайлович, кандидат физико-математических наук, Факультет педагогики и профессиональных наук, Нью-Йоркский государственный университет в Потсдаме, США, ✉ abramovs@potSDam.edu

Computer tools in education, 2023

№ 3: 60–80

<http://cte.eltech.ru>

[doi:10.32603/2071-2340-2023-3-60-80](https://doi.org/10.32603/2071-2340-2023-3-60-80)

Number Theory for Mathematics Instruction of Teacher Candidates in the Digital Era

Abramovich S.¹, Cand. Sc., Professor, ✉ abramovs@potsdam.edu,
orcid.org/0000-0003-0340-1689

¹School of Education and Professional Studies, State University of New York at Potsdam, 44 Pierrepont Avenue,
13676 Potsdam, NY, United States

Abstract

The paper presents technology-enhanced activities with triangular, square, and other polygonal numbers arranged in basic geometric shapes — equilateral and isosceles triangles and squares. Computational algorithms for the summation of such numbers within each geometric structure have been developed and discussed. In some cases, algebraic identities between certain numeric entries of the shapes have been formulated and proved computationally. The activities, supported by *WolframAlpha*, and *Maple*, are recommended for the use by instructors of technology-motivated mathematics teacher education courses. The paper emphasizes the value of technology-immune/technology-enabled mathematical problem solving in the modern-day teaching topics of elementary number theory across multiple grade levels and educational programs. The paper argues that the power of digital tools allows future teachers of mathematics, in the context of elementary number theory, to appreciate the use of simple algorithms in achieving sophisticated computational outcomes.

Keywords: *number theory, teacher education, polygonal numbers, technology.*

Citation: S. Abramovich, “Number Theory for Mathematics Instruction of Teacher Candidates in the Digital Era,” *Computer tools in education*, no. 3, pp. 60-80, 2023 (in Russian); [doi:10.32603/2071-2340-2023-3-60-80](https://doi.org/10.32603/2071-2340-2023-3-60-80)

References

1. S. Abramovich, “Revisiting mathematical problem solving and posing in the digital era: toward pedagogically sound uses of modern technology,” *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 45, no. 7, pp. 1034–1052, 2014; [doi:10.1080/0020739x.2014.902134](https://doi.org/10.1080/0020739x.2014.902134)
2. S. Abramovich, “Computational Triangulation in Mathematics Teacher Education,” *Computation*, vol. 11, no. 2, p. 31, 2023; [doi:10.3390/computation11020031](https://doi.org/10.3390/computation11020031)
3. S. Abramovich, T. Fujii, and J. Wilson, “Multiple-application medium for the study of polygonal numbers,” *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, vol. 14, no. 4, pp. 521–557, 1995.
4. R. Arnheim, *Visual Thinking*, Berkeley and Los Angeles, CA, USA: University of California Press, 1969.
5. M. A. Asiru, “A generalization of the formula for the triangular number of the sum and product of natural numbers,” *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 39, no. 7, pp. 979–985, 2008; [doi:10.1080/00207390802136503](https://doi.org/10.1080/00207390802136503)
6. Association of Mathematics Teacher Educators, “Standards for Preparing Teachers of Mathematics,” in *amte.net*, 2017. [Online]. Available: <https://amte.net/standards>

7. P. J. Berana, J. Montalbo, and D. Magpantay, "On triangular and trapezoidal numbers," *Asia Pacific Journal of Multidisciplinary Research*, vol. 3(4), pp. 76–81, 2015.
8. B. W. Char, K. O. Geddes, G. H. Gonnet, B. L. Leong, M. B. Monagan, and S. M. Watt, *Maple V Language Reference Manual*, New York, NY, USA: Springer, 1995.
9. Common Core State Standards, "Common Core Standards Initiative: Preparing America's Students for College and Career," in *corestandards.org*, 2010. [Online]. Available: <http://www.corestandards.org>
10. Conference Board of the Mathematical Sciences, "Mathematical Education of Teachers II," Washington, DC, USA: Mathematical Association of America, 2012.
11. H. Demircioglu, "Preservice mathematics teachers' proving skills in an incorrect statement: Sums of triangular numbers," *Pegem Journal of Education and Instruction*, vol. 13, no. 1, pp. 326–333, 2023; doi:10.47750/pegegog.13.01.36
12. Department of Basic Education, *Mathematics Teaching and Learning Framework for South Africa: Teaching Mathematics for Understanding*, Private Bag, Pretoria, South Africa: Department of Basic Education, 2018.
13. G. H. Hardy, "An introduction to the theory of numbers," *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 35, no. 6, pp. 778–818, 1929.
14. M. Isoda, *Japanese Curriculum Standards for Mathematics (2012-2020), Junior High School Teaching Guide for the Japanese Course of Study: Mathematics (Grade 7-9)*, Tsukuba, Ibaraki, Japan: University of Tsukuba Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology (MEXT), CRICED, 2010.
15. U. T. Jankvist, "A categorization of the 'whys' and 'hows' of using history in mathematics education," *Educational Studies in Mathematics*, vol. 71, no. 3, pp. 235–261, 2009; doi:10.1007/s10649-008-9174-9
16. T. Koshy, "Elementary Number Theory with Applications," New York, NY, USA: Academic Press, 2002.
17. Ontario Ministry of Education, "The Ontario Curriculum, Grades 1–8, Mathematics," in *www.edu.gov.on.ca*, 2020. [Online]. Available: <http://www.edu.gov.on.ca>.
18. B. Pedemonte and O. Buchbinder, "Examining the role of examples in proving processes through a cognitive lens: the case of triangular numbers," *ZDM*, vol. 43, no. 2, pp. 257–267, 2011; doi:10.1007/s11858-011-0311-z
19. Á. Plaza, "Proof Without Words: Sum of Triangular Numbers," *Mathematics Magazine*, vol. 89, no. 1, pp. 36–37, 2016; doi:10.4169/math.mag.89.1.36
20. N. J. A. Sloane, "The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences® (OEIS®)," in *oeis.org*, 2023. [Online]. Available: <https://oeis.org/>
21. N. A. Vavilov, "Computers as novel mathematical reality. II. Waring problem," *Computer Tools in Education*, no. 3, pp. 5–55, 2020 (in Russian); doi:10.32603/2071-2340-2020-3-5-55
22. L. S. Vygotsky, "The instrumental method in psychology (talk given in 1930 at the Krupskaya Academy of Communist Education). Lev Vygotsky Archive," in *marxists.org*, 1930. [Online]. Available: <https://www.marxists.org/archive/vygotsky/works/1930/instrumental.html>
23. L. S. Vygotsky, *Mind in Society*; Harvard University Press: Cambridge, MA, USA, 1978.
24. Western and Northern Canadian Protocol, "The Common Curriculum Framework for Grades 10–12 Mathematics," in *bced.gov.bc.ca*, 2008. [Online]. Available: http://www.bced.gov.bc.ca/irp/pdfs/mathematics/WNCPmath1012/2008math1012wncp_ccf.pdf
25. J. M. Wing, "Computational thinking," *Communications of the ACM*, vol. 49, no. 3, pp. 33–35, 2006; doi:10.1145/1118178.1118215
26. Wolfram Alpha LLC, "WolframAlpha," in *wolframalpha.com*, 2023. [Online Soft]. Available: <https://www.wolframalpha.com/>
27. R. Zazkis and S. R. Campbell, eds., *Number Theory in Mathematics Education*, Mahwah, NJ, USA: Perspectives and Prospects. Lawrence Erlbaum, 2006.

Received 25-06-2023, the final version — 20-07-2023.

Sergei Abramovich, Candidate of Sciences (Phys.-Math.), Professor, School of Education and Professional Studies, State University of New York at Potsdam, United States,
✉ abramovs@potsdam.edu