Компьютерные инструменты в образовании, 2022
№ 4: 83–103
УДК: 37.02:372.851
http://cte.eltech.ru
doi:10.32603/2071-2340-2022-4-83-103

АНАЛИЗ ИЗМЕНЕНИЙ В ОСНОВНЫХ СОДЕРЖАТЕЛЬНЫХ ЛИНИЯХ ПРИ ПОСТРОЕНИИ АЛЬТЕРНАТИВНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ, ОСНОВАННОГО НА ЦИФРОВЫХ РЕСУРСАХ*

Поздняков С. Н.[1], доктор пед. наук, профессор, pozdnkov@gmail.com, orcid.org/0000-0002-1899-9145
Толкачёва Е. А.[1], канд. физ.-мат. наук, доцент, ✉ eatolkacheva@etu.ru, orcid.org/0000-0002-0552-7245

[1]Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина), ул. Профессора Попова, 5, корп. 3, 197022, Санкт-Петербург, Россия

Аннотация

В статье анализируются изменения в преподавании математики в школе, связанные с развитием цифровой образовательной среды. Теоретический анализ сопровождается обсуждением базовых примеров изменений по основным содержательным линиям курса, таким, как алгебраическая линия, теоретико-функциональная линия, линия уравнений и неравенств, геометрическая линия, стохастическая линия, линия дискретной математики и теоретической информатики. В процессе конструктивного анализа рассматриваются такие виды изменений, как: перенос акцента с операционной деятельности на моделирование, что связывается с развитием "вычислительно-алгоритмического мышления" (computational thinking); использование цифровых репрезентаций математических понятий для формирования мысленных образов математических понятий и повышения внимания к оперированию мысленными образами; изучение материала на различных уровнях сложности посредством использования компьютерных моделей; изучение алгоритмов, которые используются в системах компьютерной математики; развитие горизонтальных связей как в методическом аспекте через повышение роли интегративных сюжетов, соединяющих в себе различные разделы математики и информатики, так и в аспекте общей педагогики через конструирование общих информационных пространств для взаимодействия образовательных сообществ и расширения их участников.

Ключевые слова: *цифровая среда, введение математических понятий, содержательные линии в курсе математики, горизонтальные связи, компьютерные инструменты.*

Цитирование: Поздняков С. Н., Толкачёва Е. А. Анализ изменений в основных содержательных линиях при построении альтернативного курса математики, основанного на цифровых ресурсах // Компьютерные инструменты в образовании. 2022. № 4. С. 83–103. doi:10.32603/2071-2340-2022-4-83-103

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 19-29-14141: изучение взаимосвязи концептуальных математических понятий, их цифровых представлений и смыслов как основы трансформации школьного математического образования.

1. ВВЕДЕНИЕ

Быстрая цифровизация среды обучения оказала сильное влияние на процесс обучения. К сожалению, пока наиболее явно проявились отрицательные последствия неуправляемого взаимодействия ученика с неограниченными цифровыми ресурсами. Это проявилось, в первую очередь, в пренебрежительном отношении учеников к собственной памяти в пользу внешних поисковых систем. Многие устоявшиеся методики обучения, например операционный путь формирования понятий, при котором ученик использует себя в двух ролях — как планировщика вычислений, так и исполнителя этих вычислений, — оказались неустойчивыми перед развитием различных автоматизированных вычислителей, которые мгновенно выполняют вычисления непосредственно по поставленной задаче. В рамках традиционной методики не удается отделить продуктивную часть операционной деятельности, которая останется целью учебной работы, от репродуктивной, которая будет передаваться компьютеру. Необходимы новые типы задач и новые формы представления математических понятий, которые будут устойчивы к наличию в цифровой образовательной среде универсальных математических решателей.

Другая проблема внесения изменений в учебный процесс связана с тем, что образование, являясь частью культуры, основывается на естественной передаче традиций обучения через поколения родителей и учителей. Попытки революционных изменений приводят к разрыву связи между поколениями, нарушению преемственности и отрицательно влияют на результат изменений.

Особенностью текущей ситуации является то, что происходящие изменения вызваны не целенаправленными действиями математиков и методистов, а инициируются спонтанно появляющимися системами, которые условно можно назвать системами искусственного интеллекта, поскольку они автоматизируют все новые и новые интеллектуальные формы деятельности человека. Можно возразить, что автоматизируются наиболее простые алгоритмизированные интеллектуальные операции, однако массовая система образования наиболее чувствительна именно к “простым” интеллектуальным операциям. Отметим, что проверить осмысленность изученного материала невозможно без участия квалифицированных специалистов. Однако существующие тенденции развития цифрового образовательного пространства явно или неявно ставят задачу частичной или полной замены учителя различными компьютерными средствами. Движение общества в этом направлении порождает различные полуавтоматизированные и автоматизированные системы проверки знаний, “интеллектуальный уровень” которых невысок, поэтому в образовании возникает кич — массовая “образовательная культура”, в основе которой небольшой набор шаблонных задач, не требующий их осмысления. Эти задачи базируются на “простых” интеллектуальных операциях, поэтому отмеченная педагогическая тенденция способствует понижению уровня развития интеллектуальных функций учащихся, так как уязвима перед развитием цифровых технологий.

Таким образом, возникает замкнутый круг, в который попадает большинство школьников: ученики прибегают к помощи вычилительных средств при решении математических задач, а преподаватели снижают требования к выполнению умственных операций. Исключением являются учащиеся физико-математических школ и классов, а также школьники, которые мотивированы к изучению математики (равно как и любого другого предмета). Можно ли расширить множество этих учеников? Как мотивировать школьников к осмысленной учебной деятельности?

Как мы уже писали ранее [1], первым шагом должна стать отмена системы тотального контроля за деятельностью учеников и учителей, которая вынуждает как учеников, так и учителей подстраиваться под заданные сверху показатели успеваемости. Тотальная система контроля должна быть заменена на локальную обратную связь ученик-учитель при повышении роли учителя. Тогда средства обратной связи не будут превращаться в средства тотального административного контроля, а станут средством формирующей оценки (*formative assessment*), которая является инструментом управления учителем продуктивной деятельностью ученика.

Следующим шагом будет создание независимых альтернативных курсов математики, которые могут использовать новые возможности цифрового окружения в целях повышения продуктивности обучения. Такие курсы будут средством переподготовки учителей, материалом для факультативных занятий, основой для работы школ дистанционного обучения. Эти курсы можно использовать параллельно с существующими, что позволит обеспечить непрерывность трансформации математического школьного образования и гибкость программы по математике относительно пополнения новыми представлениями математических понятий.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗМЕНЕНИЙ В СОДЕРЖАНИИ И МЕТОДИЧЕСКОМ ОБЕСПЕЧЕНИИ АЛЬТЕРНАТИВНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ

Рассмотрим изменения в содержании и методике преподавания курса математики. Выделим следующие направления изменений:

1. Уменьшение веса тех разделов, которые строятся на операционной репрезентации математических понятий (например преобразование многоэтажных алгебраических выражений, в том числе “с радикалами”, тригонометрические преобразования, решения уравнений “по шаблону” и упражнения “на применение формул”). Удаление из программы упражнений, которые не несут содержательных идей и дублируются современными системами компьютерной математики.

2. Расширение состава репрезентаций математических понятий и использование операций с ними для формирования необходимых когнитивных навыков. Многие математические понятия становятся очевидными, если правильно выбрана репрезентация понятия. Уменьшение роли простых вычислительных упражнений типа перемножения многозначных чисел или сложных алгебраических выражений таит потенциальную опасность для формирования простых когнитивных операций, которые ученик осуществляет, выполняя эти упражнения. Они связаны с удержанием внимания и переноса его с одного объекта на другой, сохранения “в уме” промежуточных результатов и пр. Взамен “операционного полигона” нужно создавать новый. Он может быть основан на создании и оперировании мысленными образами — интеллектуальном моделировании. Развитие класса задач “на умственное моделирование” становится актуальной задачей методики преподавания. Например, переход между различными репрезентациями с этой точки зрения можно отнести к классу задач на умственное моделирование. Другой заменой могут стать устные задачи, которые можно рассматривать как задачи на манипулирование внутренними образами. Эти задачи инициируют создание умственных образов и формируют навыки удержания в памяти элементов общей картины и манипулирования ими.

3. Увеличение роли конструктивных задач. Использование компьютерных инструментов расширяет область конструктивных задач, которые начинались с задач “на по-

строение циркулем и линейкой” и критиковались за то, что по содержанию далеки от современной математики [2, с. 12]. Хотя даже это утверждение не бесспорно (ниже приводится мнение А. Пуанкаре по этому вопросу), но в цифровой среде возможно построение гораздо более широкого набора инструментов, часть из которых можно рассматривать как экстериоризацию умственных операций. Таким образом, работа с этими инструментами становится основой для создания внутренних образов.

4. Переход от формального введения математических понятий “по определению” к предварительному формированию внутренних представлений (образов), которые делают возможной правильную интерпретацию вводимых за этим формальных определений. Для этого в практику вводится виртуальное моделирование математических понятий, которое является базой для создания смыслов и основано на компьютерных репрезентациях этих понятий. Возрастает роль интегрального знания. Виртуальное моделирование предполагает увеличение роли эксперимента при введении новых понятий.

5. Увеличение роли примеров и контрпримеров. Это ещё один класс задач, связанный с “умственным моделированием”. Развитию этого класса задач способствует автоматическая верификация утверждений с использованием программных средств, проверяющих, удовлетворяет ли построенная конструкция заданным свойствам. Для верификации могут использоваться инстументы предметной среды. Например, правильность построений в системах динамической геометрии легко верифицируется самим учеником посредством шевеления базовых точек построения.

6. Введение элементов дискретной математики и теоретической информатики в курс математики. Целесообразность такого введения обосновывается тем, что цифровое пространство стало равноправным элементом окружающей среды, поэтому ученик должен понимать основы его устройства и пользоваться математическими инструментами не как “черными ящиками”.

Перечисленные выше изменения в содержании курса математики и методике ее преподавания целесообразно дополнить анализом изменений в педагогической составляющей учебного процесса.

Главное направление изменений как в методике, так и в педагогике — выдвижение на первый план продуктивных методов обучения. Как было показано ранее [3, 4], продуктивный подход к обучению получает новый импульс для развития в отличие от репродуктивного подхода. Это означает, что он обладает свойством устойчивости в условиях быстрого развития цифровой среды.

Неотъемлемым атрибутом педагогики продуктивного обучения является изменение форм отслеживания результатов обучения. Существующая система тотальных проверок, включая ГИА и ЕГЭ, неявным образом направляет работу учителей на целенаправленную подготовку к экзамену путем “натаскивания” на решение типовых задач. Следует признать, что упор на решение шаблонных задач формирует способ подхода к задаче, не инициирующий формирование мысленной модели и оперирование внутренними образами, а предполагающий выбор типового решения. Возникает проблема проверки сформированности навыков и умений манипулирования внутренними образами. Однако эту проблему следует отнести к разряду принципиально нерешаемых дидактическими средствами проблем, поскольку для проверки нужны задачи с новыми идеями, которые нельзя решить по уже имеющемуся шаблону. Но как только такая задача придумана, она становится источником формирования новых шаблонов. В связи с этим увеличивается роль “неинвазивного” мониторинга, проверки сформированности целостного представления о предмете, которое определяется совокупностью всех знаний, умений и навыков ученика и легко проверяется специалистом в предметной области за 10–20 минут беседы. Следует проверять то, насколько ученик способен к освоению нового материала: как быстро он может поставить по нему вопросы, сможет ли он привести примеры общих понятий, входящих в содержание нового материала, объяснить своими словами содержание нового материала. Таким образом, следует обратить внимание не столько на автоматизацию проверки решения задач, сколько на поддержку учительского сообщества, которое должно иметь право на оценку знаний без административного давления.

Принципиальное улучшение средств коммуникации выводит на первый план проблемы конструирования общих информационных пространств, что является признаком увеличения роли горизонтальных связей (выше отмечалась методическая роль горизонтальных связей как связей между различными разделами математики, математикой и информатикой). Примером таких общих информационных пространств являются ресурсы [5, 6], на которых учителя обмениваются динамическими чертежами.

Свободный доступ к огромному количеству цифровых ресурсов определяет увеличение роли самостоятельной работы в процессе обучения. В то же время, самостоятельная работа в новой ситуации не эквивалентна той, которая была характерна для заочного обучения, когда ученик изучал материал по учебнику и сдавал контрольные работы. В такой работе отсутствовал важный элемент, который в теории информационных пространств является одной из форм “работы оглашения”. Этот элемент в очном обучении можно образно описать как “вызов к доске с рассказом по домашнему заданию”. Одним из направлений для решения этой проблемы является обращение к педагогической технологии “учение через преподавание” (*learning through teaching*). Цифровые технологии открывают для этого новые возможности [7].

3. АНАЛИЗ ИЗМЕНЕНИЙ В ОСНОВНЫХ СОДЕРЖАТЕЛЬНЫХ ЛИНИЯХ КУРСА МАТЕМАТИКИ

Приведем цитату академика РАО М. И. Башмакова — автора линейки учебников с 1 по 11 класс относительно направления изменений в преподавании математики: «... надо найти в обучении такие элементы, которые отражали бы важные, серьезные идеи. Здесь можно было бы вернуться к каким-то вещам, которые были известны раньше, а затем были отброшены. Я приведу такой пример. Мне было интересно проанализировать российские учебники алгебры для 7–8 класса по теме «Многочлены и алгебраические дроби». Я проверил почти все учебники, которые сейчас в ходу. И общее ощущение, которое возникло в связи с чтением этих учебников: они все малосодержательные. У них есть свои преимущества, свои недостатки, может быть, неплохо учат ребят этому вопросу. Но я посмотрел на задачи, которые предлагаются там: какие-то вычурные многочлены с ужасными коэффициентами, все это очень некрасиво, все это должно отвлекать человека от существа дела. И я открыл старый французский задачник Абера и Капелье, который был выпущен еще в начале века и переведен на русский язык в 1940 году. Я посмотрел на задачи, которые предлагались в этом задачнике по этой же теме. Эти задачи гораздо понятнее, они связаны с настоящей математикой. Написано «доказать тождество», но я как математик вижу, что это не просто тождество, а описание поведения дискриминанта квадратного трехчлена при замене переменной. И симметрия, которая видна в этих тождествах, возникает не случайно. Человек может, обучаясь многочленам, прийти на разный уровень. Он не просто научится умножать два многочлена, но научится, может быть, делать это разумно, рационально, видя, к чему надо прийти, а не просто тупо перемножать, чтобы не пропустить ни одного слагаемого. Когда была так сужена задача: «научить умножать многочлены», тогда и появились задачи, достаточно бессмысленные. В конце концов, не так часто в жизни придется умножать многочлены. В этом есть некоторый математический язык, но за языком стоят определенные идеи. И эти идеи оказались абсолютно исключены из обучения. И такой базы, математического фундамента, не стало. Теперь уже можно сказать, что это никому не нужно, и это совершенно будет оправдано» [8, с. 23].

Эти рассуждения относятся к преподаванию математики в школе, независимо от того, в какой среде — цифровой или традиционной — происходит обучение. Однако возможности цифровой среды позволяют вернуть (или привнести) некоторые содержательные идеи в курс школьной математики. Проанализируем возможные изменения для основных линий курса математики в старших классах школы (в младших классах целесообразно сосредоточиться не на формировании предметных знаний, а на развитии мышления учащихся; например, с этой точки зрения вопрос о нужности или ненужности обучения детей действиям с числами отпадает, так как эту деятельность следует рассматривать как развитие определенных механизмов мышления, а не как обучение действиям с числами в позиционной системе счисления). Рассмотрим следующие линии курса математики [9, 10]:

— алгебраическая линия, расширенная теоретико-числовыми аспектами и представлениями чисел с целью их компьютерной обработки;
— теоретико-функциональная линия, расширенная вопросами представления алгебраических объектов и оперирования с их машинными представлениями;
— линия уравнений и неравенств, расширенная аспектами компьютерного моделирования;
— геометрическая линия;
— стохастическая линия, расширенная аспектами стохастического моделирования;
— линия дискретной математики и теоретической информатики.

3.1. Алгебраическая линия

Рассмотрим тезис о приоритетной важности школьного образования для формирования представлений, необходимых для последующего введения общих математических понятий в противовес “строгому” изложению курса математики, где формальные определения появляются до того, как школьники могут их осмыслить, то есть, понять, основываясь на уже сформированных знаниях. Этот подход мы будем в соответствии с [11] называть “введением в математику”.

Приведем пример подготовки учеников к дальнейшему овладению важными алгебраическими структурами, такими, например, как группа. В соответствии с выдвинутым тезисом, отметим, что речь не идет о введении формального понятия группы, так как это понятие будет вводиться в вузовском курсе и даже не у всех студентов. Таким образом, не всем школьникам это понятие нужно само по себе. В то же время, если понятие общее, то акцентирование тех свойств изучаемых объектов, которые допускают обобщение и являются основой формализации, важно, так как обеспечивает основу для формирования общих понятий, формирует структуры абстрактного мышления “на примере”. Признаком того, что новые вводимые элементы учебного материала целесообразны, служит то, что они становятся для школьника инструментом для осмысления окружающего мира ещё до того, как эти представления превратились в формально сформулированные понятия.

Ключевым примером для осмысления роли группы можно рассматривать задачи на так называемую лемму Бернсайда, например, “сколькими различными способами можно раскрасить вершины или ребра шестиугольника двумя (или тремя) красками”. При решении этой задачи, которую легко сопроводить экспериментом с системой динамической геометрии, ученику придется разбить множество раскрасок на подмножества, связанные с элементами группы симметрий шестиугольника. Главным здесь является то, что о формальных свойствах группы при решении задачи речь не идет, но, решая задачу экспериментально, ученик обязательно выявляет внутреннюю структуру множества раскрасок, отождествляет те из них, которые получаются друг из друга вращениями или симметриями, что и является педагогической целью поставленной задачи [12, с. 52–55]. Правильная классификация результатов эксперимента [13, с. 210] делает очевидной и идею доказательство леммы Бернсайда.

Другой пример связан с развитием понятия числа в школьной программе. В этом примере мы будем рассматривать математику вместе с информатикой как составляющие единой образовательной области. На уроках информатики изучается позиционное — в основном двоичное — представление чисел и алгоритмы работы с ним. В то же время, в математике эти алгоритмы в младших классах рассматривались как неотъемлемый атрибут чисел, а сами алгоритмы представали в форме навыков работы с многозначными числами. Поэтому необходимым становится отделение понятия числа от его представления. Важным примером для такого отделения будет сравнение “единичной” системы счисления (которая обычно сопровождает вычисления на машине Тьюринга или Поста) с двоичной системой счисления. С точки зрения математики, операции с числами и в той и другой системе обладают одинаковыми свойствами. Однако, разбирая разницу между единичной и двоичной системами, ученики впервые встретятся с понятием сложности алгоритмов. Учитель должен провести простые арифметические расчеты и показать, что небольшие на первый взгляд изменения в алгоритмах могут принципиально изменить их эффективность — от работы за доли секунды до работы за время, сравнимое с существованием галактики. Переход от единичной системы к двоичной является примером алгоритма сжатия информации, а правила работы в позиционных системах счисления следует рассматривать как алгоритмы работы с сжатой информацией.

Рассмотрим ещё один пример, который показывает целесообразность соединения алгебраических идей с идеями из курса дискретной математики. Примером могут быть производящие функции, точнее, производящие многочены, которые могут решать комбинаторные задачи простым вычислением. Работа с многочленами реализована во всех системах компьютерной математики, и операция раскрытия скобок и приведения подобных работает обычно автоматически при вводе многочлена не в канонической форме. Иными словами, совершение этих операций не требует знакомства с особенностями системы компьютерной математики. Примером такой задачи может быть задача о числе “счастливых билетов”, красиво сводящаяся к задаче поиска числа шестизначных наборов с суммой цифр 27. В этом случае работа ученика состоит в построении алгебраической модели — производящего многочлена, а дальнейшие вычисления передаются системе компьютерной математики. Этот пример является показательным для того, чтобы изучать изменения в работе с математическими задачами при наличии специального математического инструмента. Основная трудность приведенной задачи состоит в нахождении взаимно однозначного соответствия между структурой многочлена и структурой комбинаторной задачи. Но это в конечном счете и является сутью поиска решения комбинаторных задач. У этой задачи есть естественное продолжение в школьном факультативном или вузовском курсе: можно решить задачу аналитически, оперируя с многочленами, также возможен комбинаторный путь решения задачи на основе формулы включений-исключений. Первый из этих способов решений выходит за пределы школьной программы и требует знания обобщения биномиальной формулы для отрицательных показателей, второй требует комбинаторных рассуждений достаточно "высокого" уровня. Тем самым, наличие инструмента позволяет нам одну и ту же задачу рассматривать на трех разных уровнях:

1. Уровень формирования представлений о взаимно-однозначном соответствии.
2. Уровень сложных (олимпиадных) задач.
3. Уровень курса высшей математики.

3.2. Теоретико-функциональная линия

Как и в предыдущем разделе, сделаем акцент на формировании представлений для последующего введения общих математических понятий. Обратимся к недавней истории введения этой линии в школьное образование — переход на программы Колмогорова в 70-х годах. Проблемы, которые возникли при введении этой программы, частично объясняются тем, что программа опиралась на новый — функциональный — взгляд на геометрию, который предполагал наличие представлений о преобразовании плоскости и пространства. Заметим, что именно так школьники должны были воспринимать преобразования — преобразовывались не сами геометрические объекты, но пространства, в которых они представлялись. Это соответствовало изменению системы координат, её переносу или повороту. Однако геометрия до 70-х годов строилась на основе «равенства и подобия треугольников». Исключением являлась программа В. Г. Болтянского и И. М. Яглома [14], в которой изучались преобразования фигур (не пространств), но которая не получила широкого распространения. Таким образом, в программе наложились две проблемы: новые для школы представления о геометрических преобразованиях и противоречие между имеющимися представлениями о движениях фигур и используемой в учебнике Колмогорова концепцией преобразования плоскости или пространства. Очевидно, что методисты того времени исходили из чисто математических соображений, игнорируя психологические факторы наличия необходимых представлений для формирования новых понятий.

Отметим, что переход происходил в условиях, когда в школах и дома не было компьютеров и, конечно, не было программ, подобных динамической геометрии. Если бы в те годы существовали системы, подобные системам динамической геометрии, а изложение основывалось на учебнике [14], результат внедрения программы мог быть иным, поскольку все основные виды преобразований — поворот, симметрия, параллельный перенос, гомотетия — являются базовыми инструментами всех программ динамической геометрии.

Что касается использования компьютерных инструментов для формирования функциональных представлений, то этот аспект хорошо представлен в статье В. Н. Дубровского [15]. Многие исследователи использовали динамическую геометрию для иллюстрации идеи предельного перехода, и с этим часто возникали казусы вследствие принципиальной невозможности изображать графики правильно в окрестности точек разрыва. В то же время, системы динамической геометрии и другие инструменты, в том числе системы программирования, дают новое направление моделирования непрерывных процессов — конечно-разностные формулы. Здесь проявляется связь непрерывной и дискретной математики. Более того, легко можно создать дискретный мир по аналогии с непрерывным, положив в качестве базовых формул конструируемого мира набор дискретных конечно-разностных формул. Ограничив множество чисел рациональными, получим дискретный мир, в котором можно открывать свои законы (например, решая рекуррентные отношения вместо дифференциальных уравнений).

Другим направлением является оперирование символьными объектами. Это направление также относится и к алгебраической линии, так как задание функций формулами и аналитические выкладки предполагают использование алгебраического аппарата. В качестве базовых примеров можно обсудить то, как компьютер выполняет действия с формулами. Оказывается, что не всегда так, как это делает ученик в тетради, и это будет мотивировать учеников к изучению этого материала. Так ученик уже на уровне школы может понять некоторые принципы работы символьных систем компьютерной алгебры на примере задания формул деревьями и простыми их преобразованиями: для упрощения формул и для вычисления производных.

3.3. Линия уравнений и неравенств

Поиск решения уравнений и неравенств можно рассматривать в нескольких аспектах, среди которых:

1. Решение “текстовых” задач.
2. Поиск решений в символьной форме.
3. Исследование решений уравнений и систем уравнений с параметром.
4. Численный поиск решений.

Как свидетельствуют многие практики, работа с текстовыми задачами представляет собой наиболее продуктивный вид деятельности при изучении алгебры и основ математического анализа. Удивительно, что даже “натаскивание” учеников на этих задачах положительно влияет на формирование смыслов. Для того чтобы объяснить этот эффект, перечислим основные виды моделей, которые используются в текстовых задачах:

— задачи “на движение”,
— задачи “на работу”,
— задачи “на бассейны”,
— задачи “на проценты”,
— задачи “на смешивание растворов” или задачи “на сплавы”,
— задачи “на поиск экстремума” (обычно связаны с исследованием функции с помощью производной).

Решение “текстовых” задач. Уже одно перечисление названий показывает, что модели, лежащие в основе этих задач, в той или иной форме встречаются в жизни. Каждый человек сталкивается с осмыслением ситуаций, которые описываются этими моделями. Может показаться, что задача на наполнение водой бассейна, из которого вода может также вытекать, вряд ли встретится в жизни. Однако модель, которая обсуждается в этой задаче, может быть применена и к другим ситуациям, связанным с нахождением равновесия в системе, например при расчете баланса между доходами и расходами (дебет и кредит). Таким образом, здесь роль играют не сами конкретные формулировки, а те модели, которые за ними стоят. Для объяснения этих задач преподаватели часто используют различные иллюстрации, в том числе динамические. Однако целью является формирование соответствующих мыслительных конструкций. Вот что об этом пишет опытный учитель Е. Б. Ягунова: «При решении любой текстовой задачи ученик должен проделать три этапа работы: (1) анализ условия и планирование вычислений, (2) проведение вычислений и (3) проверку правильности решения. Чаще всего школьники пропускают первый этап сразу начинают что-то считать. Расчёты часто ничем не кончаются (поскольку цель расчётов не определена) или приводят к абсурдному ответу (ибо третий этап отсутствует). Время оказывается потраченным, а задача нерешённой. Именно поэтому мы и акцентировали внимание на первом и третьем этапах решения задачи. На первом этапе интерактивные чертежи помогали представить условия в наглядной графической форме, определить “роли” всех имеющихся в условии чисел, осознать, что именно нужно найти, прикинуть, какой ответ мы ожидаем. На заключительном этапе интерактивные чертежи помогут проверить правильность полученного ответа. Отметим также, что *после некоторой тренировки необходимость в интерактивном чертеже отпадёт, поскольку школьник научится представлять в уме подобную картинку и совершать необходимые ее преобразования. С этого момента, вместо интерактивного чертежа, будет использоваться наработанная интуиция*» [16, с. 12].

Поиск решений в символьной форме. Решение алгебраических уравнений в символьном виде занимает большое место в традиционном обучении. Обратим внимание, что смысл предлагаемых уравнений, даже если это не искусственные задачи, созданные для проверки владения ученика операционными знаниями, как правило, не сообщается ученикам. Поэтому задачи воспринимаются либо как интересные головоломки (что учителя не могут себе позволить, ввиду нехватки времени на изучение программы), либо как классы задач, которые ученики должны узнавать и применять к ним готовые шаблоны. Таким образом, с точки зрения формирования внутренних представлений, это наименее продуктивная форма деятельности, которая постепенно должна занимать все меньшее место в курсе математики. По своему содержанию эту деятельность следует отнести к операционной форме представления знаний, при которой формируемые умения и навыки являются средой для дальнейшего надстраивания смыслового содержания. Устойчивость этой деятельности в курсе математики определяется тем, что она наиболее легко поддается управлению при работе с классом и позволяет вместо проверки осмысленности полученных знаний проверять более простые умения по преобразованию формул.

Исследование решений уравнений, неравенств и систем уравнений и неравенств с параметром представляет с точки зрения использования компьютера для поддержки продуктивной деятельности гораздо больший потенциал. Во-первых, системы динамической геометрии позволяют визуализировать условия задачи и самостоятельно сформулировать гипотезы, требующие дальнейшего логического обоснования. Заметим, что это соответствует концепции Пойа по поддержке подхода к задаче именно как к ЗАДАЧЕ, а не упражнению на усвоение какого-то действия или формулы. По предложенной им методике [17, 18] решение задачи должно начинаться с экспериментов, которые позволяют лучше понять сущность поставленной задачи и наметить план её решения. Другим важным аспектом использования этих задач является удобство в их компьютерной поддержке. Исследования на эту тему проводились в работах С. Г. Иванова [19] (задачи на построение графиков), Д. И. Манцерова [20] (задачи на исследование параметрических классов функций), О. В. Перченка [21] (задачи по геометрии). Система верификации в ответ на введенный учеником ответ (формулу функции, предикат, геометрическое построение) обращает внимание учеников на нарушение условий задачи, пропущенные или лишние решения и тем самым помогает ученикам строить индивидуальный путь решения задачи.

Численное решение уравнений. Это направление, имеющее очевидно прикладной характер, мало представлено в школьной программе. У этого есть несколько причин. Во-первых, без компьютерной поддержки численное решение уравнений требует большого объема репродуктивной деятельности — ручных или частично автоматизированных вычислений. Во-вторых, и это более серьезный аргумент, хотя и связанный с предыдущим, этот раздел оказывает малое влияние на формирование мыслительных структур у школьника. Однако развитие цифровой образовательной среды привело к появлению новых форм математической деятельности. К ней можно отнести командные олимпиады по программированию. По своей сути все предлагаемые на этих олимпиадах задачи имеют математическую основу. Отличие в решении состоит в том, что требуется представить не логические рассуждения, а алгоритм, реализованный в виде программы, который должен соответствовать временным ограничениям и ограничениям по использованию памяти. Мы относим эту деятельность к решению уравнений по соображениям общности умственной деятельности — поиску алгоритма решения задачи. Отметим, что специфика мыслительной деятельности при решении подобных задач, отражена в появлении термина *computational thinking* [22–25], который трудно перевести точно на русский язык, так как алгоритмическое мышление — наиболее близкое по смыслу словосочетание — уже используется в более простом контексте выполнения действий по заданным алгоритмам.

3.4. Геометрическая линия

В цифровом окружении эта линия претерпевает наиболее серьезные изменения. Об этом частично говорилось выше при рассмотрении роли инструментов динамической геометрии для введения геометрических преобразований в школьную программу. Следует отметить, что появление одной из первых систем динамической геометрии *Cabri* было инициировано борьбой преподавателей-практиков с формализацией курса геометрии во французской школе под влиянием взглядов известного математика, организатора группы Бурбаки, Жаном Дьедонне [2]. О роли геометрии как интегративного предмета, изучение которого предполагает соединение наглядности и строгой логики, пишет А. Д. Александров: «Особенность геометрии, выделяющая ее не только среди остальных частей математики, но и среди других наук вообще, состоит в том, что в ней самая строгая логика соединена с наглядным представлением. Геометрия в своей сущности и есть такое соединение живого воображения и строгой логики, при котором они взаимно организуют и направляют друг друга» [26].

О важности инструментов (которые теперь получили и цифровую форму) писал ещё Анри Пуанкаре: «Быть может, вас удивит это постоянное применение подвижных инструментов. Это не грубый прием, он более философский, чем это кажется с первого взгляда. Что такое геометрия для философа? Это изучение некоторой группы. Какой именно? Группы движений твердых тел. Каким же образом определить эту группу, не заставляя двигаться некоторые твердые тела?» [27].

Следующий важный аспект изменений в преподавании геометрии — повышение роли конструктивных задач. Дьедонне в книге [2, с. 12–13] иронически отмечает малозначимую, с его точки зрения, роль задач на построение циркулем и линейкой в пользу современного взгляда на математику.

Дьедонне пишет: «Само собой разумеется, что я полностью порвал со всеми традициями и приноравливался исключительно к той области, в которую должно вливаться среднее математическое образование, то есть к программам университетов и политехнических институтов. То, что к этим программам отношения не имеет, было безжалостно изъято из текста, а зачастую даже и из упражнений. Напротив, я старался как можно раньше ввести понятия, которые будут основными на пропедевтических курсах высшей школы, такие, как линейное отображение (или оператор), полилинейное отображение, собственные значения оператора, группа или кольцо операторов. Верный вышеприведенному принципу не отдавать преимущества пожеланиям и потребностям одних лишь математиков, я старался излагать только такие понятия, которые имеют бесспорно большое значение для прикладной математики и для теоретической физики» [2, с. 19].

Соглашаясь с целью, поставленной известным математиком, трудно согласиться с методом, выбранным им для этого. Предельная формализация изложения школьного материала, отрыв от наглядных представлений сделали упоминаемую книгу не учебником, а изложением взгляда математика на школьную программу. Автор полностью игнорирует психологические и возрастные особенности школьников и, видимо, не предполагает опору на те внутренние образы, которые к этому времени сложились у учеников, то есть “принцип инвестиций”, хорошо объясненный в работе [28]. Заметим, что, отказываясь от задач на “построение циркулем и линейкой”, Дьедонне тем самым вступает в заочную дискуссию с Пуанкаре, который придавал работе с инструментами принципиальную роль в изучении геометрии. Это противоречие между мнениями великих математиков говорит о серьезности проблемы, лежащей в основе этого противоречия — противоречия между логическим изложением математических теорий и процессом овладения человеком новыми знаниями.

Средства динамической геометрии позволяют соединить эти два, на первый взгляд, противоположных взгляда. В динамической геометрии преобразования можно выполнять геометрически, но можно описывать их и как поточечные отображения, ввести матрицу отображения и, используя геометрическую интерпретацию, объяснить происхождение и свойства операции умножения матриц, а далее моделировать трехмерные преобразования, уже опираясь на операции с матрицами линейных преобразований.

3.5. Стохастическая линия

Введение теории вероятности в курс математики стало источником споров о том, существует ли вероятностное мышление и, тем самым, можно ли строить аккуратную теорию вероятностной меры на уже существующих представлениях у школьника, либо мы должны двигаться по классическому пути от комбинаторики и ограничиться введением в теорию вероятностей на уровне рассмотрения отношений комбинаторных величин.

Однако в этих спорах не фигурирует новая реальность, связанная с параллельным существованием стохастического моделирования, вероятностных алгоритмов, случайных датчиков, хэш-функций и других моделей, связанных с вероятностными процессами.

Появляется возможность, которая может быть реализована и в других темах школьного курса: не обращаясь сразу к сущности новых понятий, научиться ими пользоваться, что приведет к формированию нужных представлений и позволит построить на них теорию вероятности. Например, по такому принципу строилось изложение темы векторов в учебнике М. И. Башмакова для профессионально-технических училищ [29].

Приблизительное вычисление площади фигуры “бросанием” точек в квадрат, содержащий эту фигуру, является одной из первых моделей, которая легко воспринимается школьниками любого возраста. Далее представляет интерес сведение к этой модели других задач, таких, например, как “Игла Бюффона”, в которой число “пи” вычисляется бросанием иглы на разграфленную плоскость. Если эта задача, основанная на методе Монте-Карло, при точном решении выходит за рамки школьной программы (хотя провести компьютерный и натурный эксперименты можно и в школьном кружке), есть более простые версии, в которых перевод в математические формулы по сути такой же, но дальнейшие вычисления не выходят за рамки школьной программы. Примером может быть задача: «Какова вероятность, что уравнение $x^2 + px + q = 0$ будет иметь решения, если p и q случайно выбираются из отрезка $[-5; 5]$?». Технически задача сводится к нахождению площади подграфика параболы [30].

Обратим внимание на то, что в этих задачах мы пересекаемся с линией «уравнения и неравенства». Этот факт позволяет выдвинуть гипотезу о том, что использование компьютерных инструментов способствует развитию интеграционного подхода к изучению математики. Заметим, что последнее постулируется как цель построения курса школьной математики и в цитированной выше работе Дьедонне.

3.6. Линия дискретной математики и теоретической информатики

Особенности реализации этой линии, в том что потенциальный материал для этого раздела находится за пределами курса математики: частично он не изучается вообще, частично включен в курс информатики, частично — в углубленный курс информатики.

Традиционно этот материал изучается на первых курсах университета, однако он достаточно прост и хорошо методически разработан, чтобы быть переведенным на уровень школьного образования. Этот сдвиг соответствует тезису Дьедонне о знакомстве школьников с современным состоянием математики, в котором дискретная математика занимает существенное место. В то же время, с понятиями дискретной математики связаны многие процессы в окружающей современного человека цифровой среде, поэтому изучение этих вопросов назрело и вполне готово к реализации в школе. В связи с этим возникает естественный вопрос, чем можно пожертвовать в курсе математики? Ответ дает Дьедонне в упомянутой выше книге — пожертвовать «псалтырем “тригонометрических” формул и их калейдоскопических преобразований, ограничив изучение тригонометрии 3–4 страницами учебника» [2, с. 13].

Распределение тем между математикой и информатикой можно скопировать с того, как они распределены между кафедрами математики и информатики в некоторых технических вузах — структуры данных изучать в рамках информатики, а изучение алгоритмов — в курсе математики. В то же время, математика и информатика в российской школе не случайно включены в единую образовательную область, поэтому наиболее целесообразный вариант — использование грамотных специалистов в одном лице для преподавания обоих предметов (математики и информатики), в то время как программирование выделить в отдельный предмет, относящийся по существу к технологиям.

Нами был проведен многолетний эксперимент, отраженный в публикациях [31–33], в котором некоторые базовые понятия дискретной математики и теоретической информатики фактически вводились в рамках трехэтапной олимпиады по дискретной математике и теоретической информатике: тренировочный этап, отборочный этап и финальный этап. На всех этапах использовалась одна и та же цифровая среда обучения. Таким образом, знакомство с инструментарием не потребовало специальной подготовки. В рамках цифровой среды использовались манипуляторы, интерпретирующие такие понятия, как: конечный автомат, граф, регулярное выражение, машина Тьюринга, предикаты, кванторы. На этих манипуляторах ставились различные математические задачи. Результаты эксперимента показывают, что для школьников работа с репрезентациями этих понятий во внешней среде не вызывает трудностей, а положительные результаты решения задач говорят о том, что работа с внешними представлениями этих понятий обеспечивает формирование соответствующих им внутренних образов.

Проведенный эксперимент показывает “нереволюционный” путь изменений в школьных программах (как уже упоминалось выше, именно резкий разрыв в школьной подготовке родителей и учителей, с одной стороны, и новой программой, с другой стороны, привел к сворачиванию реформы школьного математического образования, проводимой под руководством Колмогорова). В условиях развитой информационной среды стало реальным создавать альтернативные курсы обучения. Наличие таких курсов в совокупности с системой экстерната [34] позволяет внедрять новые идеи постепенно. Однако такой путь предполагает признание расширенного курса математики, который может изучаться в двух вариантах — традиционном и модернизированном. В сответствии с этим должны строиться инструменты проверки знаний и сертификация школьных результатов.

4. ДИСКУССИЯ

Принципиальным вопросом при создании учебников по математике является вопрос так называемой строгости. Несмотря на то, что понятие строгости носит конкретно-исторический характер [35], тем не менее, традиционно вопрос о логической выстроенности курса выносится математиками на первый план. В то же время, как отмечает М. Минский [28], логические построения рассуждений никак не соответствуют характеру умственной деятельности и служат не столько передаче знаний, сколько удобному представлению для их верификации (найдя одно ненадежное звено, мы ломаем всю цепь). В. И. Рыжик предлагает обратить внимание на такой вид литературы как “Введение в …” тот или иной предмет [11]. В данном случае “введение” является не просто указанием на то, что в книге будут даны начальные сведения о предмете, но выражением определенного взгляда на изложение материала. По нашему мнению, “Введение в …” должно в большой степени опираться на уже сложившуюся систему представлений обучаемого, обращаться к его интуиции, основанной на повседневной деятельности. М. Минский [28] называет это принципом инвестирования. В этом случае изложение материала будет группироваться вокруг важных идей математики, которые показывают школьнику плодотворные приемы мышления на основе важных для приложений и внутренних связей математики идей. Эта концепция хорошо прослеживается в книге Куранта и Роббинса «Что такое математика» [36].

В рассмотренных выше примерах постоянно используется связь между различными представлениями математических понятий. Здесь следует обратить внимание на то, что термин “представление” часто используется в двух различных смыслах — “внутреннее” (как элемент мыслительной деятельности человека) и “внешнее” (как способ работы с понятием) представление. Этот вопрос подробно разобран в статье [38]: «Термин “представление” в русском языке является омонимом. Под представлением математического понятия мы можем понимать его интерпретацию / репрезентацию (например, “геометрическое представление решений уравнения”), и под этим же термином мы можем понимать психический процесс (“воспроизведённый образ предмета или явления, которые здесь и сейчас человек не воспринимает и который основывается на прошлом опыте субъекта (человека)” [39]. Для того чтобы избежать путаницы, будем там, где она может возникнуть, использовать термин “репрезентация” для внешнего представления понятия и “представление”, соответственно, — для внутреннего». Именно эта терминология использовалась в этой статье.

Параллельная работа с различными репрезентациями математических понятий являются отличительной чертой разобранного курса. Такой способ введения новых понятий хорошо согласуется с особенностями памяти человека, которая автоматически сохраняет связи между объектами. На этом феномене строится теория смежности (асоциация идей) [40], якорная теория [41] и др., в то время как для сохранения в памяти несвязанных объектов приходится прибегать к мнемоническим приемам.

Создание информационной среды, способствующей овладению математическими понятиями, является важной дидактической и методической задачей. Концепция “умных вещей”, предложенная Симуром Папертом [42], хорошо согласуется с психологическим механизмом интериоризации, изученным в работах Выготского и Леонтьева [43, 44]. Существующие в математике горизонтальные связи между различными репрезентациями математических понятий создают основу для построения сюжетов, включающих как компьютерные инструменты, так и аналитические рассуждения и выкладки в совокупности с геометрической интерпретацией. Другой аспект использования возможностей цифровой среды — проведение компьютерных экспериментов, построение математических алгоритмов и специальных инструментов, моделирующих различные математические понятия и методы.

Что дает наличие богатой цифровой среды? Прежде всего это — различные горизонтальные связи. Так, в приведенном примере курса можно увидеть следующие связи: математика — информатика, школьный курс — вузовский курс, аналитическое представление — геометрическое представление — динамическое представление и др.

Можно ли рассматривать компьютерный инструмент как способ обоснования математических утверждений? В этом вопросе авторы расходятся с автором статьи [11] и рассматривают эксперимент только как подготовительный этап к введению новых понятий или проведению логических обоснований. Такая позиция авторов связана с вопросом “Почему?” [37], который остается “висеть в воздухе” после компьютерных экспериментов. Вдумчивый ученик хочет связать новую информацию с имеющимися у него концептуальными знаниями. Сам по себе эксперимент, не увязанный с концептуальными рассуждениями, дает только новый факт, субъективно воспринимаемый как феномен, требующий последующего объяснения.

Является ли формирование новых понятий независимым от изменений в информационной среде, связанных с администрированием процесса обучения с помощью цифровых средств? Цифровизация контроля “сверху вниз” не повышает эффективность учебного процесса, а меняет цели его участников: вместо естественного стремления к овладению новыми знаниями, целью и учеников и учителей становится успешность прохождения контрольных мероприятий, что может быть достигнуто иными средствами. Тотальный административный контроль несовместим с продуктивным подходом к обучению. Он должен быть заменен неинвазивным мониторингом [**?**], когда особое внимание уделяется взаимодействию учитель—ученик, в рамках которого возможна так называемая формирующая оценка (*formative assessment*). Вместо попыток создать универсальные системы проверки результатов обучения, следует развивать систему передачи прав на оценку результатов специалистам — учителям, преподавателям и методистам, используя возможности цифровой среды, чтобы повышать социальную ответственность за правильность оценки. Целесообразно иметь несколько независимых институтов оценки знаний, чтобы у учащихся была возможность самостоятельно оценивать свой уровень и принимать правильные решения относительно выбора профессии или продолжения обучения.

5. ВЫВОДЫ

Следующие направления изменений в построении курса математики обусловлены существованием и возможностями цифровой окружающей среды:

1. Удаление из программы упражнений, которые не несут содержательных идей и дублируются современными системами компьютерной математики.

2. Частичное замещение традиционной операционной деятельности типа “преобразования многоэтажных формул” действиями, связанными с построением умственных моделей через расширение состава репрезентаций математических понятий.

3. Расширение роли задач, которые инициируют создание умственных образов и формируют навыки удерживания в памяти элементов общей картины и манипулирования ими. Увеличение роли примеров и контрпримеров. Этот класс задач следует рассматривать как тип задач “умственное моделирование”. Развитию этого класса задач способствует возможность верификации утверждений посредством использования программных средств, проверяющих, удовлетворяет ли построенная конструкция заданным свойствам.

4. Увеличение роли конструктивных задач. Компьютерные инструменты и модели следует рассматривать как средства выведения вовне трудностей, которые наблюдаются при овладении учениками новыми понятиями. Их использование будет целесообразным, только если деятельность с этими средствами сопровождается интериоризацией — переводом внешних действий (действий “руками”) во внутреннюю мыслительную деятельность.

5. Введение элементов дискретной математики и теоретической информатики в курс математики. Темы дискретной математики представляют новый полигон для умственной деятельности учащихся, близко связанный с информатикой и способствующий формированию *computational thinking* (алгоритмическо-вычислительного мышления).

6. Изменение системы аттестации знаний учеников — повышение внимания к осмысленности владения учебным материалом. Перенос акцента с тотального контроля посредством использования различных цифровых средств и технологий к формирующей оценке (formative assessment), которая возникает в пределах общения ученик—учитель и принципиально не допускается к передаче вовне. Развитие компьютерных средств поддержки обратной связи и верификации действий ученика обеспечивают техническую основу для высокой эффективности такого взаимодействия.

Список литературы

1. *Чухнов А. С., Поздняков С. Н.* Педагогические и методические аспекты неинвазивного мониторинга (на примере обучения математике в школе и вузе) // Компьютерные инструменты в образовании. 2020. № 4. С. 113–145. doi:10.32603/2071- 2340-2020-4-113-145
2. *Дьедонне Ж.* Линейная алгебра и элементарная геометрия. М.: Наука, 1972.

3. *Поздняков С. Н.* Связь целеполагания в преподавании математики с ее технологическим сопровождением // Компьютерные инструменты в образовании. 2019. № 3. С. 70–89. doi:10.32603/2071-2340-2019-3-70-89.
4. *Иванов С. Г., Поздняков С. Н.* Компьютер в продуктивном обучении математике // Компьютерные инструменты в образовании. 2003. № 5. с. 10–20.
5. McGraw-Hill Education. Sketch Exchange — The Geometer's Sketchpad Resource Center. [Электронный ресурс]. URL: https://www.dynamicgeometry.com/General_Resources/Sketch_Exchange.html (дата обращения: 21.12.2022).
6. The Material Exchange. The leading marketplace for educators. Sell, buy, or exchange free teaching / learning resources. [Электронный ресурс]. URL: https://thematerialexchange.com/ (дата обращения: 21.12.2022).
7. *Иванов С. Г.* Возможности самообучения в процессе преподавания для повышения качества образования // XXIX Международная научно-методическая конференция «Современное образование:содержание, технологии, качество». 19 апреля 2023. СПбГЭТУ «ЛЭТИ», Санкт-Петербург. СПб., 2023. С. 529–531.
8. *Башмаков М. И.* Математическое обучение нуждается в глубоких математических идеях // Компьютерные инструменты в образовании. 2000. № 6. С. 19–24.
9. *Лаина П. И.* Результативность обучения математике в школе: дисс. ... канд. пед. наук. Л., 1991.
10. *Башмаков М. И.* Уровень и профиль математического образования // Математика в школе. 1993. № 2. С. 8–9.
11. *Рыжик В. И.* Компьютер: время перемен // Математика в школе. 2023. № 1. С. 52–60.
12. *Росошек С. К.* Группы: взгляд со стороны компьютерной программы VISAL. Комментарий: группа поворотов тетраэдра // Компьютерные инструменты в образовании. 2000. № 5. С. 40–55.
13. *Рыбин С. В.* Дискретная математика и информатика: учебник для вузов. СПб.: Лань, 2022. 748 с.
14. *Болтянский В. Г., Яглом И. М.* Преобразования. Векторы: пособие для учителей. М.: Просвещение, 1964.
15. *Дубровский В. Н.* Визуализация функциональных зависимостей в программах динамической геометрии // Компьютерные инструменты в образовании. 2020. № 4. С. 93-–112. doi:10.32603/2071-2340-2020-4-93-112.
16. *Ягунова Е. Б.* Текстовые задачи: здравый смысл и элементарные навыки // Компьютерные инструменты в школе. 2012. № 4. С. 6–12.
17. *Пойя Д.* Как решать задачу: пособие для учителей. М.: ГИЗ МП РСФСР, 1961. 208 с.
18. *Пойа Д.* Математическое открытие. М.: Наука, 1970.
19. *Иванов С. Г.* Компьютерная поддержка решения математических задач как средство организации продуктивной деятельности учащихся: дисс. ... канд. пед. наук. М., 2004.
20. *Манцеров Д. И.* Среда Verifier-KD: верификация решений задач по математике // Компьютерные инструменты в образовании. № 4. 2006. С. 36–41.
21. *Перченок О. В.* Модели и алгоритмы верификации решений задач в системах электронного обучения: дисс. ... канд. тех. наук. СПб., 2013.
22. *Rich P. J., Langton M. B.* Computational thinking: toward a unifying definition // Competencies in teaching, learning and educational leadership in the digital age. 2016. P 229–242.
23. *Weintrop D., Beheshti E., Horn M. et al.* Defining computational thinking for mathematics and science classrooms // Journal of Science Education and Technology. 2016. Vol. 25, № 1. P. 127–147. doi:10.1007/s10956-015-9581-5
24. *Angeli C., Giannakos M.* Computational thinking education: issues and challenges // Computers in Human Behavior. 2020. Vol. 105. P. 1–3. doi:10.1016/j.chb.2019.106185
25. *Dolgopolovas V., Dagiene V., Pozdniakov S., Liaptsev A.* Developing Computational Thinking Skills to Foster Student Research: Contemporary Scientific Education Through Modeling and Simulations // Rezaei, N. (eds). Integrated Education and Learning Integrated Science. Vol 13. P. 417–443. Springer, Cham. 2022. doi:10.1007/978-3-031-15963-3_23
26. *Александров А. Д.* О геометрии в школе // Математика в школе. 1980. № 3. С. 56–62.
27. *Пуанкаре А.* О науке. М.: Наука, 1990. 469 с.
28. *Minsky M.* The Society of Mind. NY: Simon & Schuster, 1986.

29. *Башмаков М. И.* Математика: учебник для учреждений нач. и сред. проф. образования. М.: Академия, 2013. 256 с.
30. *Мостеллер Ф.* Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями. М.: Наука, 1975. 112 с.
31. *Pozdniakov S. N., Chukhnov A. S., Pangina N. N.* Analysis of the Understanding of the Material of Theoretical Informatics in Competitions and Olympiads in Informatics // Computer tools in education. 2018. № 2. P. 55–67.
32. *Pozdnyakov S., Chukhnov A., Rybin S.* Computer Tools for Supporting of Constructive Tasks in Discrete Mathematics for Engineering Education // IV International Conference on Information Technologies in Engineering Education (Inforino). 2018. P. 1–4. doi:10.1109/inforino.2018.8581829.
33. *Chukhnov A. S.* Constructive Tasks as a Tool of Invasive and Non-invasive Assessment of Knowledge // Computer tools in education. 2019. № 3. P. 96–104. doi:10.32603/2071-2340-2019-3-96-104
34. *Владимирская О. Д.* Социально-педагогические условия организации деятельности экстерната как образовательного учреждения: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.01. СПБ., 1999. 221 с.
35. *Вавилов Н. А.* Математическое доказательство: вчера, сегодня, завтра // Совместное заседание С.-Петербургского математического общества и Секции математики Дома Ученых. 23 марта 2010 г. г. Санкт-Петербург. [Электронный ресурс]. URL: https://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?presentid=2035&option_lang= (дата обращения: 21.12.2022).
36. *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? М.: МЦНМО, 2001. 568 с.
37. CTGV. Anchored instruction and situated cognition revisited // Educational Technology. 1993. Vol. 33, № 3. P. 52–70.
38. *Адлай С. Ф., Поздняков С. Н.* Цифровые представления математических объектов в контексте различных форм представления математического знания // Компьютерные инструменты в образовании. 2020. № 1. С. 58–86. doi:10.32603/2071-2340-2020-1-58-86
39. *Рубинштейн С. Л.* Основы общей психологии. СПб.: Питер, 2017. 261 с.
40. *Guthrie E. R.* Conditioning as a principle of learning // Psychological Review.1930. Vol. 37. P. 412–428.
41. *Пейперт С.* Переворот в сознании: Дети, компьютеры и плодотворные идеи. М.: Педагогика, 1989.
42. *Выготский Л. С.* Психология развития человека. М.: Изд-во Смысл; Эксмо, 2005. 1136 с.
43. *Леонтьев А. Н.* Деятельность. Сознание. Личность. Избранные психологические произведения. Т. II. М.: Педагогика, 1983. 392 с.
44. *Pozdniakov S.* Computers in the productive learning of mathematics / Shvarts A. (Ed.) // Proceedings of the PME and Yandex Russian conference: Technology and Psychology for Mathematics Education. M.: HSE Publishing House, 2019. P. 77–92.

Поступила в редакцию 02.11.2022, окончательный вариант — 21.12.2022.

Поздняков Сергей Николаевич, доктор педагогических наук, профессор кафедры алгоритмической математики СПбГЭТУ «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина), pozdnkov@gmail.com

Толкачёва Елена Алексеевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгоритмической математики СПбГЭТУ «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина), ✉ eatolkacheva@etu.ru

Computer tools in education, 2022
№ 4: 83–103
http://cte.eltech.ru
doi:10.32603/2071-2340-2022-4-83-103

Analysis of Changes in the Main Content Lines in Construction of an Alternative Course of Mathematics Based on Digital Resources

Pozdnyakov S. N.[1], Doctor sc., Professor, pozdnkov@gmail.com, orcid.org/0000-0002-1899-9145
Tolkacheva E. A.[1], Cand. Sc., Associate Professor, ✉ eatolkacheva@etu.ru, orcid.org/0000-0002-0552-7245

[1]Saint Petersburg Electrotechnical University,
5, building 3, st. Professora Popova, 197022, Saint Petersburg, Russia

Abstract

The article analyzes the changes in the teaching of mathematics at school associated with the development of the digital educational environment. The theoretical analysis is accompanied by a discussion of basic examples of changes in the main content course lines, such as the algebraic line, the function-theoretic line, the line of equations and inequalities, the geometric line, the stochastic line, the line of discrete mathematics and theoretical computer science. In the process of constructive analysis, such types of changes are considered as: a shift in emphasis from operational activities to modeling, which is associated with the development of "computational thinking" (computational thinking); the use of digital representations of mathematical concepts for the formation of mental images of mathematical concepts and increasing attention to the operation of mental images; studying the material at various levels of complexity through the use of computer models; study of algorithms that are used in computer mathematics systems; the development of horizontal connections both in the methodological aspect through the increasing role of integrative plots that combine various sections of mathematics and computer science, and in the aspect of general pedagogy through the construction of common information spaces for the interaction of educational communities and the expansion of their participants.

Keywords: *digital environment, introduction of mathematical concepts, content lines in the course of mathematics, horizontal links, computer tools.*

Citation: S. N. Pozdnyakov and E. A. Tolkacheva, "Analysis of Changes in the Main Content Lines in Construction of an Alternative Course of Mathematics Based on Digital Resources," *Computer tools in education*, no. 4, pp. 83–103, 2022 (in Russian); doi: 10.32603/2071-2340-2022-4-83-103

References

1. A. Chukhnov and S. Pozdnyakov, "Pedagogical and Methodological Aspects of Non-Invasive Monitoring (case of Teaching Mathematics at School and University)," *Computer Tools in Education*, no. 4, pp. 113–145, 2020 (in Russian); doi:10.32603/2071-2340-2020-4-113-145
2. J. Dieudonné, *Linear algebra and geometry*, Moscow: Nauka, 1972 (in Russian).
3. S. N. Pozdnyakov, "The Relationship of Goal-Setting in the Teaching of Mathematics with its Technological Support," *Computer tools in education*, no. 3, pp. 70–89, 2019 (in Russian); doi:10.32603/2071-2340-2019-3-70-89

4. S. G. Ivanov and S. G. Pozdnyakov, “Computer in productive teaching of mathematics,” *Computer Tools in Education*, no. 5, pp. 10–20, 2003 (in Russian).
5. McGraw-Hill Education, “Sketch Exchange — The Geometer’s Sketchpad Resource Center,” in *www.dynamicgeometry.com*, 2014. [Online]. Available: https://www.dynamicgeometry.com/General_Resources/Sketch_Exchange.html
6. The Material Exchange, “The leading marketplace for educators. Sell, buy, or exchange free teaching/learning resources,” in *thematerialexchange.com*, 2023. [Online]. Available: https://thematerialexchange.com/
7. S. G. Ivanov, “Application of self-learning in the teaching process to improve the quality of education,” in *Proc. of XXIX Int. Scientific and Methodological Conf. "Modern Education: Content, Technology, Quality"19 apr. 2023, ETU LETI, St. Petersburg, Russia*, pp. 529–531, 2023 (in Russian).
8. M. I. Bashmakov, “Math learning needs deep math ideas,” *Computer Tools in Education*, no. 6, pp. 19–24, 2000 (in Russian).
9. P. I. Laina, *The efficiency of teaching mathematics at school*, Diss. candidate of pedagogical sciences, Leningrad, USSR, 1991 (in Russian).
10. M. I. Bashmakov, “Level and profile of mathematical education,” *Mathematics in School*, no. 2, pp. 8–9, 1993 (in Russian).
11. V. I. Ryzhik, “Computer: time for change,” *Mathematics in School*, no. 1, pp. 52–60, 2023 (in Russian); doi:10.47639/0130-9358_2023_1_52
12. S. K. Rososhek, “Groups: View from the Computer Program VISAL / Commentary: Rotation Group of a Tetrahedron,” *Computer Tools in Education*, no. 5, pp. 40–55, 2000 (in Russian).
13. S. V. Rybin, *Discrete Mathematics and Informatics: textbook for universities*, St. Petersburg, Russia: Lan, 2022 (in Russian).
14. V. G. Boltyansky and I. M. Yaglom, *Transformations. Vectors. A guide for teachers*, Moscow: Prosveshcheniye, 1964 (in Russian).
15. V. Dubrovskii, “Visualization of Functional Dependences in Dynamic Geometry Systems,” *Computer Tools in Education*, no. 4, pp. 93–112, 2020 (in Russian); doi:10.32603/2071-2340-2020-4-93-112
16. E. B. Yagunova, “Text tasks: common sense and elementary skills,” *Computer Tools in School*, no. 4, pp. 6–12, 2012 (in Russian).
17. G. Polya, *How to Solve It. A guide for teachers*, Moscow: GIZ MP RSFSR, 1961 (in Russian).
18. . G. Polya, *Mathematical discovery*, Moscow: Nauka, 1970 (in Russian).
19. S. G. Ivanov, *Computer support for solving mathematical problems as a means of organizing students’ productive activities*, Diss. candidate of pedagogical sciences, Moscow, 2004 (in Russian).
20. D. I. Mantserov, “Verifier-KD environment: verification of solutions to problems in mathematics,” *Computer Tools in Education*, no. 4, pp. 36–41, 2006 (in Russian).
21. O. V. Perchenok, *Models and algorithms for verifying solutions to problems in e-learning systems*, Diss. candidate of technical sciences, St. Petersburg, Russia, 2013 (in Russian).
22. P. J. Rich and M. B. Langton, “Computational Thinking: Toward a Unifying Definition,” in *Competencies in Teaching, Learning and Educational Leadership in the Digital Age*, pp. 229–242, Springer, Cham, 2016; doi:10.1007/978-3-319-30295-9_14
23. D. Weintrop et al., “Defining Computational Thinking for Mathematics and Science Classrooms,” *Journal of Science Education and Technology*, vol. 25, no. 1, pp. 127–147, 2016; doi:10.1007/s10956-015-9581-5
24. C. Angeli and M. Giannakos, “Computational thinking education: issues and challenges,” *Computers in Human Behavior*, vol. 105, pp. 1–3, 2020; doi:10.1016/j.chb.2019.106185
25. V. Dolgopolovas, V. Dagiene, S. Pozdniakov, and A. Liaptsev, “Developing Computational Thinking Skills to Foster Student Research: Contemporary Scientific Education Through Modeling and Simulations,” in N. Rezaei ed., *Integrated Education and Learning. Integrated Science*, vol. 13, pp. 417–443, Springer, Cham, 2022; doi:10.1007/978-3-031-15963-3_23
26. A. D. Alexandrov, “About geometry at school,” *Mathematics in school*, no. 3, pp. 56–62, 1980 (in Russian).
27. J. H. Poincaré *About science*, Moscow: Nauka, 1990 (in Russian).
28. M. Minsky, *The Society of Mind*, NY: Simon & Schuster, 1986.

29. M. I. Bashmakov, *Mathematics: a textbook for early institutions and avg. prof. education*, Moscow: Academia, 2013 (in Russian).
30. F. Mosteller, “Fifty challenging problems in probability with solutions,” Moscow: Nauka, 1975 (in Russian).
31. S. N. Pozdniakov, A. S. Chukhnov, and N. N. Pangina,. “Analysis of the Understanding of the Material of Theoretical Informatics in Competitions and Olympiads in Informatics,” *Computer tools in education*, no. 2, pp. 55–67, 2018.
32. S. Pozdnyakov, A. Chukhnov, and S. Rybin, “Computer Tools for Supporting of Constructive Tasks in Discrete Mathematics for Engineering Education,” in *Proc. of IV International Conference on Information Technologies in Engineering Education (Inforino), 2018*, pp. 1–4, 2018; doi:10.1109/inforino.2018.8581829
33. A. S. Chukhnov, “Constructive Tasks as a Tool of Invasive and Non-invasive Assessment of Knowledge,” *Computer tools in education*, no. 3, pp. 96–104, 2019; doi:10.32603/2071-2340-2019-3-96-104
34. O. D. Vladimirskaya, *Socio-pedagogical conditions for organizing the activities of an external student as an educational institution*, Diss. candidate of pedagogical sciences, St. Petersburg, Russia, 1999.
35. N. A. Vavilov,“Mathematical proof: yesterday, today, tomorrow,” in *Joint meeting of the St. Petersburg Mathematical Society and the Section of the House of Scientists. 23 mar. 2010, St. Petersburg, Russia*, 2010. [Online]. Available: https://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?presentid=2035&option_lang=
36. R. Courant and H. Robbins, *What is Mathematics? An elementary approach to Ideas and methods?*, Moscow: MTsNMO, 2019 (in Russian).
37. S. Pozdniakov, “Computers in the productive learning of mathematics,” A. Shvarts ed., in *Proc. of the PME and Yandex Russian conference: Technology and Psychology for Mathematics Education*, Moscow: HSE Publishing House, pp. 77–92, 2019 (in Russian).
38. F. Adlaj and S. N. Pozdnyakov, “Digital Representations of Mathematical Objects in the Context of Various Forms of Representation of Mathematical Knowledge,” *Computer tools in education*, no. 1, pp. 58–86, 2020 (in Russian); doi:10.32603/2071-2340-2020-1-58-86
39. S. L. Rubinshtein, *Fundamentals of General Psychology*, St. Petersburg, Russia: Piter, 2017 (in Russian).
40. E. R. Guthrie, “Conditioning as a principle of learning,”*Psychological Review*, vol. 37, pp. 412–428, 1930.
41. CTGV, “Anchored instruction and situated cognition revisited,” *Educational Technology*, vol. 33, no. 3, 52–70, 1993.
42. S. Peipert, *Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas*, Moscow: Pedagogika, 1989 (in Russian).
43. L. S. Vygotskii, *Human Development Psychology*, Moscow: Smysl, Eksmo, 2005 (in Russian).
44. A. N. Leont’ev, *Activity, Consciousness, and Personality*, vol. 2, Moscow: Pedagogika, 1983 (in Russian).

Received 02-11-2022, the final version — 21-12-2022.

Sergei Pozdnyakov, Doctor of Sciences (Pedagogy), Professor of the Algorithmic Mathematics Department, Saint Petersburg Electrotechnical University, pozdnkov@gmail.com

Elena Tolkacheva, Candidate of Sciences (Phys.-Math.), Associate Professor of the Algorithmic Mathematics Department, Saint Petersburg Electrotechnical University, ✉ eatolkacheva@etu.ru