

ВЛИЯНИЕ ПРИЛИВНЫХ СИЛ НА ДВИЖЕНИЕ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ. МОДЕЛЬ РОТАТОРА НА ОРБИТЕ

Ляпцев А. В.¹, доктор физ.-мат. наук, ✉ upm_eno@mail.ru

¹Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена,
набережная реки Мойки, д. 48, 191186, Санкт-Петербург, Россия

Аннотация

Предлагается простейшая модель искусственного спутника Земли, на основе которой может быть исследовано влияние приливных сил на вращательное движение спутника. Показано, что математические уравнения, описывающие вращательное движение, не содержат малых параметров, откуда следует, что приливные силы оказывают существенное влияние на вращательное движение спутника. Численные решения полученных уравнений могут быть исследованы учащимися на основе использования процедур решения дифференциальных уравнений, имеющихся в средах MATLAB и Octave. Подобные численные эксперименты позволяют судить об устойчивости движений спутника в зависимости от заданных начальных состояний.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, математическая модель, приливные силы, искусственные спутники Земли, устойчивость движения.

Цитирование: Ляпцев А. В. Влияние приливных сил на движение космических аппаратов. Модель ротатора на орбите // Компьютерные инструменты в образовании. 2023. № 1. С. 5–17. doi:10.32603/2071-2340-2023-1-5-17

1. ВВЕДЕНИЕ

Несколько лет назад астрономия вновь стала обязательным предметом в школе. Обновляясь на опыте работы учителей, можно утверждать, что этот предмет воспринимается школьниками с интересом, несмотря на то, что после его изучения не требуется сдавать какого-либо экзамена, включая ЕГЭ. Авторы новых и обновленных учебников по астрономии постарались заинтересовать школьников интересными фактами и новыми открытиями в области астрономии. Например, в учебнике М. В. Чаругина [1], помимо традиционно излагаемого влияния Луны на Землю, обуславливающего приливы, говорится и о прецессии оси вращения Земли вследствие влияния Луны. К сожалению, это и многие другие явления движения космических тел излагаются лишь на качественном уровне без использования математики и численных оценок и не позволяют полностью понять суть явлений. Сами явления остаются «таинственными» и непонятными. Между тем, современные средства моделирования, включая вычислительные среды, содержащие процедуры численного решения дифференциальных уравнений, могут позволить учащимся исследовать модели, описывающие движения космических объектов.

Одним из не до конца понимаемых явлений является действие приливных сил, или, если говорить научным языком, — сил, обусловленных неоднородностью гравитационных полей небесных тел. Традиционно излагаемый в учебниках материал приводит к так называемым мiskonцепциям. После изучения материала возникает представление, о «слабости» этих сил, их незначительном влиянии на движение космических тел. Действительно, высоты приливов, максимальные значения которых не превышают 20 м, существенно меньше размеров Земли. А сведения о том, что «за счет приливов длительность суток на Земле увеличивается на 0,0014 с за 100 лет» [1], только усиливают впечатление о слабом влиянии приливных сил на космические объекты.

Подобная мiskonцепция в обыденном сознании существовала давно. В подтверждение можно привести фантастический рассказ Ларри Нивена «Нейтронная звезда» (сборник [2, с. 257], русский перевод можно найти в интернете [3]), в котором астронавт будущего через «гиперпространство» отправляется к нейтронной звезде и, пролетая вблизи неё, с удивлением обнаруживает действие «таинственных» проникающих внутрь корабля сил, пытающихся его уничтожить. И лишь его «сообразительность» позволяет ему осознать, что это приливные силы, и, предприняв некоторые действия, избежать смерти. Между тем, действие приливных сил даже на обычные спутники Земли оказывается весьма значительным, что требует дополнительных механизмов для стабилизации их движения [4]. Малость влияния приливных сил со стороны Луны на Землю или со стороны Земли на Луну объясняется лишь тем, что эти тела в хорошем приближении имеют сферическую форму.

В данной статье рассмотрена достаточно простая для изучения модель спутника Земли в виде ротатора. Полученные уравнения позволяют провести учащимся численный эксперимент, наглядно демонстрирующий существенное влияние приливных сил на движение спутников Земли.

2. ФОРМУЛИРОВКА МОДЕЛИ

Рассмотрим модель спутника, движущегося по круговой орбите вокруг Земли и представляющего собой два модуля, соединенных жесткой перемычкой. Размеры модулей будем считать малыми по сравнению с расстоянием между ними. Поперечные размеры перемычки также будем считать малыми по сравнению с её длиной. Таким образом, модель представляет собой две точечные массы, соединенные тонким жестким невесомым стержнем. Массу каждого модуля обозначим через m , а расстояние между ними — через $2r$. Будем полагать, что радиус орбиты спутника R существенно больше r , то есть $r/R \ll 1$. Заметим, что подобная модель весьма реалистична.

Поступательное движение спутника по круговой орбите описывается простыми формулами, изучаемыми в школьном курсе физики. Приравнивая гравитационную силу к центростремительному ускорению, можно получить равенство:

$$\frac{GM_{\oplus}}{R^2} = \omega^2 R, \quad (1)$$

где G — гравитационная постоянная, M_{\oplus} — масса Земли, ω — угловая скорость вращения спутника по орбите.

Для описания вращательного движения спутника применим уравнение динамики: $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}$, где \mathbf{M} — момент сил, действующий на спутник, точкой над моментом импульса \mathbf{L} обозначена производная по времени. Здесь и далее жирным шрифтом обозначаются

векторы. Модель ротатора является наиболее простой моделью в том смысле, что момент импульса всегда направлен по угловой скорости вращения тела $\mathbf{\Omega}$ и пропорционален угловой скорости: $\mathbf{L} = I\mathbf{\Omega}$, где I — момент инерции спутника (см., например [5]). Таким образом, уравнение вращательного движения принимает вид:

$$I\dot{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{M}. \quad (2)$$

Вычислим момент сил, действующий на спутник. Пусть \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 — радиус-векторы, определяющие положения масс спутника в системе, центром которой является Земля. Тогда векторы соответствующих гравитационных сил можно выразить в виде:

$$\mathbf{F}_{1,2} = -\frac{GM_{\oplus}m}{R_{1,2}^3}\mathbf{R}_{1,2}.$$

Векторы \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 можно выразить через вектор центра масс спутника \mathbf{R} и вектор \mathbf{r} , направленный от центра масс к массе с индексом 1 (рис. 1): $\mathbf{R}_{1,2} = \mathbf{R} \pm \mathbf{r}$.

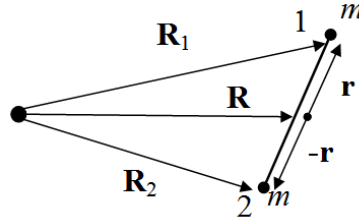


Рис. 1. Схема, иллюстрирующая вычисление момента сил, действующих на спутник

Учитывая, что величина $r/R \ll 1$, можно получить приближенные выражения:

$$R_{1,2}^{-3} = ((R \pm \mathbf{r})^2)^{-3/2} = (R^2 + r^2 \pm 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{r})^{-3/2} \approx R^{-3}(1 \pm 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}/R^2) \approx R^{-3}(1 \mp 3\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}/R^2),$$

где мы использовали стандартное обозначение для скалярного произведения векторов и пренебрегли членами порядка $(r/R)^2$.

Моменты сил, вычисленные относительно центра масс, можно выразить через векторные произведения: $\mathbf{M}_{1,2} = \pm \mathbf{r} \times \mathbf{R}_{1,2}$. Полный момент сил есть сумма моментов сил:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= GM_{\oplus}m\mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2) = GM_{\oplus}R^{-3}m\mathbf{r} \times \left((\mathbf{R} - \mathbf{r})(1 + 3(\mathbf{R} \cdot \mathbf{r})/R^2) - (\mathbf{R} + \mathbf{r})(1 - 3(\mathbf{R} \cdot \mathbf{r})/R^2) \right) = \\ &= 6GM_{\oplus}R^{-5}m(\mathbf{r} \times \mathbf{R})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}). \end{aligned}$$

При выводе равенства учтено, что векторное произведение вектора на тот же вектор равно нулю.

Введем далее единичные векторы \mathbf{n} и \mathbf{n}_R , направленные, соответственно, вдоль векторов \mathbf{r} и \mathbf{R} . Тогда выражение для момента сил можно представить в виде:

$$\mathbf{M} = 3GM_{\oplus}R^{-3}I(\mathbf{n} \times \mathbf{n}_R)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_R), \quad (3)$$

где $I = 2mr^2$ — момент инерции спутника. Заметим, что выражение (3) оказывается справедливым и в случае более сложной конструкции спутника, когда масса каким-то образом распределена по оси спутника при условии, что поперечные размеры существенно

меньше продольных размеров спутника (тонкий стержень с неоднородно распределенной массой). Изменяется только зависимость момента инерции от массы и поперечных размеров. Подобные системы называются *ротаторами* [5].

Выражение для момента сил можно привести к более простому виду, используя уравнение (1):

$$\mathbf{M} = 3\omega^2 I(\mathbf{n} \times \mathbf{n}_R)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_R).$$

В результате получаем следующее уравнение, определяющее вращение спутника вокруг центра масс:

$$\dot{\mathbf{\Omega}} = 3\omega^2 (\mathbf{n} \times \mathbf{n}_R)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_R). \quad (4)$$

Входящую в выражение (4) угловую скорость $\mathbf{\Omega}$ можно рассматривать как угловую скорость частицы с индексом 1 относительно центра масс. Угловую скорость частицы можно выразить через векторное произведение радиус-вектора и скорости частицы:

$$\mathbf{\Omega} = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{v}}{r^2} = \frac{\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}}{r^2} = \mathbf{n} \times \dot{\mathbf{n}}.$$

Последнее из этих равенств справедливо в силу того, что модуль вектора \mathbf{r} является константой. Для производной угловой скорости получим:

$$\dot{\mathbf{\Omega}} = \dot{\mathbf{n}} \times \dot{\mathbf{n}} + \mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{n}},$$

поскольку векторное произведение вектора на тот же вектор равно нулю. В результате уравнение (4) приводится к виду:

$$\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{n}} = 3\omega^2 (\mathbf{n} \times \mathbf{n}_R)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_R). \quad (5)$$

Как будет показано далее, решение этого уравнения можно получить только численными методами, поэтому целесообразно провести масштабное преобразование времени:

$$t' = \omega t. \quad (6)$$

Равенство (6) означает, что за единицу времени мы принимаем период обращения спутника по орбите, деленный на 2π . В новых единицах измерения времени уравнение, определяющее вращение спутника, не содержит каких-либо параметров:

$$\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{n}} = 3(\mathbf{n} \times \mathbf{n}_R)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_R), \quad (7)$$

где точками над переменной обозначена вторая производная по переменной t' .

Тот факт, что уравнение для вращательного движения не содержит каких-либо малых параметров (как и каких-либо параметров вообще), уже означает, что в общем случае влияние приливных сил на вращательное движение спутника не является малым. Заметим, что подобное простое уравнение получается для модели, в которой пренебрегается действием на спутник других космических тел. Момент сил, создаваемых этими телами, вычисляется аналогичным образом и выражается формулой (3), куда следует подставить массу данного тела и расстояние от спутника до него. Как следует из предыдущего вывода, моменты сил, действующих на спутник со стороны Солнца, меньше момента сил со стороны Земли в $(T_\oplus/T)^2$ раз, где T_\oplus и T — периоды обращения Земли вокруг Солнца

и спутника вокруг Земли, соответственно. Для типичных спутников, например МКС, период обращения равен приблизительно 1,5 часа, так что влияние Солнца оказывается примерно в 34000000 раз слабее. Для Луны подобное значение получается приблизительно равно 16000000.

Уравнение (7) является векторным уравнением, то есть эквивалентно трем скалярным уравнениям. Однако, поскольку векторы в правой и левой частях уравнения ортогональны вектору \mathbf{n} , число скалярных уравнений сокращается до двух. Проще всего эти два уравнения получить, написав проекции всех векторов на оси системы отсчета, связанной со спутником. Действительно, уравнение (7) можно переписать в виде:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{A} = 0, \quad (8)$$

где

$$\mathbf{A} = \ddot{\mathbf{n}} - 3\mathbf{n}_R(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_R). \quad (9)$$

Обозначим оси в системе отсчета, связанной со спутником, индексами 1, 2, 3. Ось 3 направим по оси спутника так, что у вектора \mathbf{n} отлична от нуля только проекция на эту ось, равная единице. В результате векторное равенство (8) сводится к двум скалярным:

$$\begin{aligned} A_1 &= 0, \\ A_2 &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, для получения конкретных уравнений достаточно спроектировать входящие в уравнение (7) векторы на оси системы отсчета, связанной со спутником.

Чтобы сделать такое преобразование, напишем вначале компоненты векторов \mathbf{n} , \mathbf{n}_R в инерциальной системе отсчета, центр которой находится в центре Земли, а оси направлены по некоторым направлениям, связанным с удаленными звездами. При этом будем считать, что плоскость орбиты спутника лежит в плоскости (x, y) этой системы отсчета. Выражение для вектора \mathbf{n} можно записать в виде вектора-столбца:

$$\mathbf{n}_R = \begin{Bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

В этой и последующих формулах мы для простоты опускаем штрих у переменной времени. Момент времени $t = 0$ выбран так, что в этот момент времени координата x спутника равна единице, а координата y равна нулю. Для описания ориентации спутника используем сферические координаты (рис. 2).

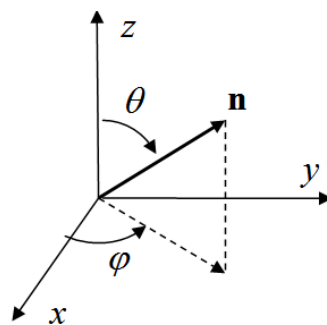


Рис. 2. Схема, иллюстрирующая переход к сферическим координатам

Вектор-столбец \mathbf{n} в угловых переменных имеет вид:

$$\mathbf{n} = \begin{Bmatrix} \sin\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \end{Bmatrix}.$$

Дифференцируя вектор по времени, выразим вторую производную через угловые переменные и их производные по времени:

$$\ddot{\mathbf{n}} = \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \cos\theta \cos\varphi - \dot{\varphi} \sin\theta \sin\varphi - (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) \sin\theta \cos\varphi - 2\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos\theta \sin\varphi \\ \ddot{\theta} \cos\theta \sin\varphi + \dot{\varphi} \sin\theta \cos\varphi - (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) \sin\theta \sin\varphi + 2\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos\theta \cos\varphi \\ -\ddot{\theta} \sin\theta - \dot{\theta}^2 \cos\theta \end{Bmatrix}.$$

Преобразование любого вектора, компоненты которого выражены через проекции на оси системы (x, y, z) , к осям системы $(1, 2, 3)$, в которой вектор \mathbf{n} направлен по оси 3, сводится к повороту этого вектора вначале вокруг оси z на угол $-\varphi$, а затем к повороту вокруг оси y на угол θ . Соответствующая матрица поворота имеет вид:

$$\mathbf{U}(\theta, \varphi) = \mathbf{U}_y(\theta)\mathbf{U}_z(-\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Как уже говорилось, нас интересуют лишь проекции на оси 1 и 2 системы координат, связанной со спутником. После преобразований получим:

$$\begin{aligned} (\mathbf{U}(\theta, \varphi)\ddot{\mathbf{n}})_1 &= \ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2 \sin\theta \cos\theta, & (\mathbf{U}(\theta, \varphi)\mathbf{n}_R)_1 &= \cos\theta \cos(t - \varphi), \\ (\mathbf{U}(\theta, \varphi)\ddot{\mathbf{n}})_2 &= \dot{\varphi} \sin\theta + 2\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos\theta, & (\mathbf{U}(\theta, \varphi)\mathbf{n}_R)_2 &= \sin(t - \varphi). \end{aligned} \quad (11)$$

Для вычисления скалярного произведения, входящего в выражение (7), преобразование к новым осям не требуется, поскольку скалярное произведение инвариантно относительно выбора осей. После вычисления получим:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_R = \sin\theta \cos(t - \varphi).$$

Подставляя полученные выражения в уравнения (7), приходим к системе уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \sin\theta \cos\theta (\dot{\varphi}^2 + 3 \cos^2(t - \varphi)), \\ \dot{\varphi} \sin\theta &= -2\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos\theta + 3 \sin\theta \sin(t - \varphi) \cos(t - \varphi). \end{aligned} \quad (12)$$

Система уравнений (12) имеет однозначное решение при заданных начальных условиях:

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\theta}(0) = \theta_{t0}, \quad \dot{\varphi}(0) = \varphi_{t0}.$$

Константы θ_0 и φ_0 определяют начальную ориентацию спутника, а константы θ_{t0} и φ_{t0} — его начальную угловую скорость. В общем случае система уравнений не имеет аналитического решения, однако её численное решение с использованием процедур систем решений дифференциальных уравнений, имеющихся в вычислительных средах MATLAB, Octave и других, не представляет особой сложности. Заметим, что отсутствие каких-либо параметров в уравнениях (12) позволяет проще проводить численный эксперимент с выяснением качественных особенностей решений.

3. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Для численного расчета удобно использовать процедуры численного решения дифференциальных уравнений, имеющиеся в таких вычислительных средах, как MATLAB, Octave и других. Подобные процедуры именуются ode45, ode23 и т. д. (аббревиатура от ordinary differential equations — обыкновенные дифференциальные уравнения). Применительно к решению системы уравнений (12) следует отметить некоторую особенность реализации этих процедур. Стандартное (по умолчанию) использование этих процедур подразумевает, что система дифференциальных уравнений выражена в виде:

$$\dot{x}_i(t) = F_i(\{x_j\}, t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (13)$$

Однако, подключая дополнительные опции ('Mass'), можно применить эти процедуры для решения более общей системы уравнений:

$$\sum_{k=1}^n M_{ik}(\{x_j\}, t) \dot{x}_k(t) = F_i(\{x_j\}, t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (14)$$

С математической точки зрения системы уравнений (13) и (14) эквивалентны. Перейти от системы уравнений (14) к системе (13) можно просто, домножив правую и левую часть на матрицу, обратную к матрице \mathbf{M} . Однако в тех случаях, когда матрица \mathbf{M} обращается в ноль при некоторых значениях переменных, подобный переход приводит к расходимости при применении процедур решения системы дифференциальных уравнений. Именно это имеет место для второго из уравнений (12), где функция $\sin \theta$ в левой части уравнения может обращаться в ноль.

В качестве примера расчета на рис. 3 приведены графики зависимости $\theta(t)$, $\varphi(t)$, $\dot{\theta}(t)$, $\dot{\varphi}(t)$ при нулевой начальной угловой скорости и начальных углах $\theta_0 = 30^\circ$ и $\varphi_0 = 0$. Угол θ на графиках приведен в градусах, а угол φ в оборотах (за единицу принято 360°). Внизу приведен график функции $\cos t$.

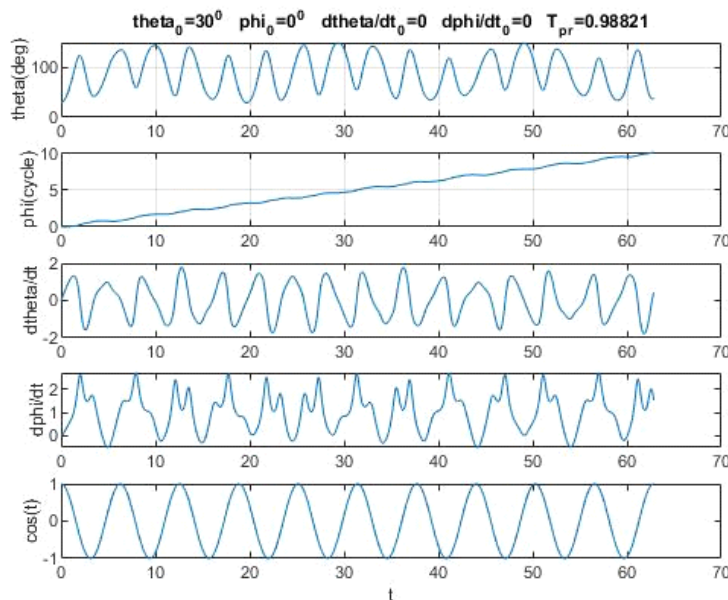


Рис. 3. Графики, иллюстрирующие вращение спутника

По аналогии с движением волчка, которое достаточно хорошо изучено в теории твердого тела (см., например [5]), будем для краткости называть изменение угла φ прецессией, а угла θ — нутацией. Как видно из графиков, характер движения таков, что происходит прецессия спутника, но скорость прецессии не равномерная. Период прецессии того же порядка, что и период вращения спутника по орбите. Для оценки периода время движения отнесено к изменению угла в радианах за это время. В данном случае это приблизительно 0,99. Что касается изменения угла нутации, то он совершает хаотические колебания, то есть незатухающие колебания, не являющиеся строго периодическими. Для таких колебаний можно определить лишь некоторое среднее значение периода и амплитуды. Подобные колебания характерны для систем, уравнения движения которых описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, что имеет место и в рассматриваемом нами случае. Простейшие примеры подобных колебаний можно найти в учебном пособии [7, с. 127]. Средний период колебаний на рис. 3 порядка периода обращения спутника (см. нижний график). Несмотря на не очень плавное изменение угла θ , траектория движения вектора \mathbf{n} на трехмерном графике является достаточно плавной линией, изображенной на рис. 4.

$$\theta_0=30^\circ \quad \varphi_0=0^\circ \quad d\theta/dt_0=0 \quad d\varphi/dt_0=0 \quad T_{pr}=0.98821$$

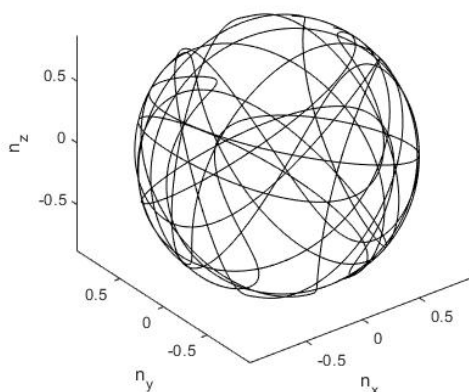


Рис. 4. График, иллюстрирующий движение вектора \mathbf{n}

Численный эксперимент, который учащиеся могут провести самостоятельно, позволяет установить следующую качественную особенность движения: невозможно подобрать какие-либо начальные условия, при которых ось спутника не изменяла бы направления на достаточно большом промежутке времени. Иными словами, приливные силы «закручивают» спутник, и для стабилизации его движения необходимо применять дополнительные меры. Подробно о различных способах стабилизации можно прочитать в учебнике [4].

Возвращаясь к фантастическому рассказу, о котором говорилось в начале статьи, отметим следующее. В рассказе космический корабль, отправленный через «гиперпространство» к нейтронной звезде, сконструировали инопланетяне, жившие на планете, вокруг которой не было естественных спутников, подобных Луне, вращающейся вокруг Земли. Именно поэтому они ничего не знали о приливных силах. Как следует из приведенных расчетов, чтобы узнать о действии приливных сил, вовсе не обязательно иметь Луну или пролететь через «гиперпространство» к нейтронной звезде. Достаточно сделать первый шаг в космос — запустить искусственные спутники вокруг планеты.

4. АНАЛИЗ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ

При проведении вычислительного эксперимента целесообразно рассмотреть частные решения, которые могут быть получены аналитически или сведены к известным исследованным моделям [6].

Рассмотрим вначале решение, при котором переменные остаются постоянными: $\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$. Ось спутника в этом случае всегда направлена перпендикулярно плоскости орбиты. При этом угол φ не определен и может принимать любые значения (спутник 1 на рис. 5).

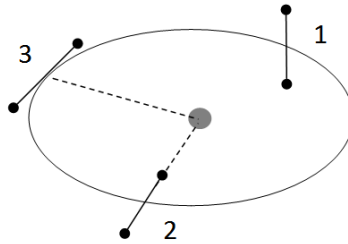


Рис. 5. Частные случаи движений спутника

Однако оказывается, что перенос этого формального решения на реальные объекты невозможен в силу неустойчивости данного решения. Это означает, что при сколь угодно малых отклонениях от вышеприведенных начальных условий решение уравнений оказывается таким, что система при последующей эволюции далеко уходит от исходного состояния. Численный эксперимент позволяет убедиться в этом. На рис. 6 приведены графики, соответствующие начальному состоянию с нулевой начальной угловой скоростью и начальными углами $\theta_0 = 10^{-6}$ градусов и $\varphi_0 = 90^\circ$, что близко к аналитическому решению $\theta(t) = 0$, $\varphi(t) = \pi/2$. Как видно из графиков, в течение некоторого времени угол θ остается приблизительно равным нулю, но затем разрастаются хаотические колебания.

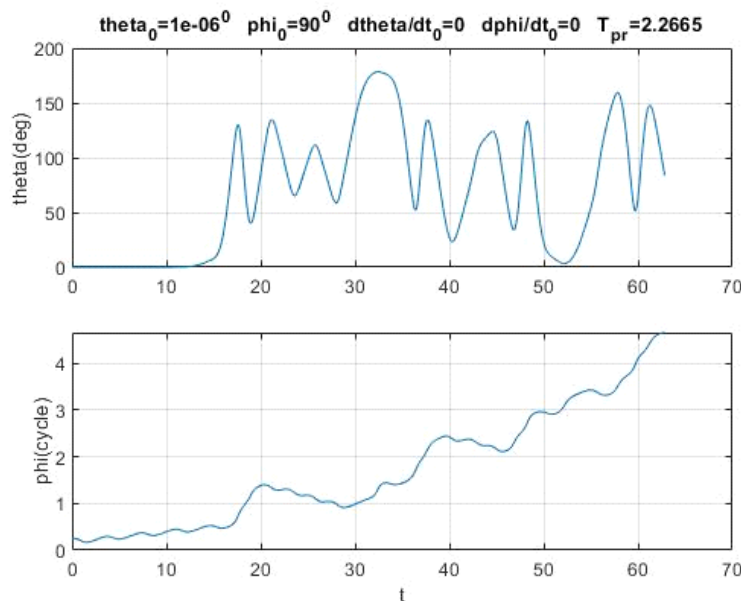


Рис. 6. Численный расчет для движения спутника 1 на рис. 5

Другие частные решения могут быть получены при начальных условиях $\theta_0 = \pi/2$, $\dot{\theta}_0 = 0$. Несложно проверить, что этим начальным условиям и первому из уравнений (12) удовлетворяет решение с постоянным значением угла $\theta(t) = \pi/2$. При таком значении угла θ второе уравнение принимает вид:

$$\ddot{\varphi} = 3\sin(t - \varphi)\cos(t - \varphi).$$

Заменой переменной $\psi = 2(\varphi - t)$ это уравнение приводится к виду:

$$\ddot{\psi} = -3\sin\psi. \quad (15)$$

Это уравнение описывает движение так называемого «физического маятника» — твердого тела, закрепленного на оси, вокруг которой оно может вращаться в поле тяжести Земли (рис. 7).

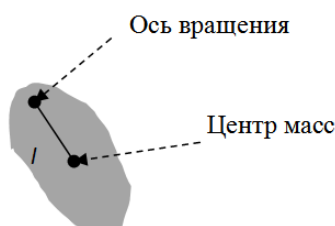


Рис. 7. Физический маятник

Уравнение движения такого маятника имеет вид:

$$\ddot{\psi} = -\frac{mgl}{I}\sin\psi,$$

где m — масса тела, g — ускорение свободного падения, l — расстояние от оси вращения до центра масс, I — момент инерции относительно оси вращения, ψ — угол между вертикалью и линией, проведенной от оси вращения к центру масс.

Аналогия с физическим маятником позволяет понять характер движения спутника в нашей задаче. Уравнение (15) имеет два значения угла ψ , соответствующие положениям равновесия. Устойчивому положению равновесия маятника соответствует $\psi = 0$. В нашей задаче этому соответствует движение спутника 2 на рис. 5, когда ось спутника всегда направлена на Землю. Неустойчивое положение равновесия маятника характеризуется углом $\psi = \pi$. В задаче со спутником этому соответствует движение спутника 3 на рис. 5, при котором ось спутника всегда лежит в плоскости орбиты и перпендикулярна направлению на Землю. Уже из аналогии движения спутника и физического маятника следует, что такое движение является неустойчивым, и численный эксперимент подтверждает этот качественный вывод.

Вышесказанное является, скорее, некоторыми наводящими соображениями. Устойчивость движения спутника 2 на рис. 5 можно проверить путём линеаризации уравнений. После замены переменной φ на переменную ψ система уравнений становится автономной и принимает вид:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \sin\theta \cos\theta \left(\left(\dot{\psi}/2 + 1 \right)^2 + \frac{3}{2}(1 + \cos\psi) \right), \\ \ddot{\psi} \sin\theta &= -4\dot{\theta} \cos\theta \left(\dot{\psi}/2 + 1 \right) - 3\sin\theta \sin\psi. \end{aligned}$$

Считая, что угол θ в начальный момент близок к $\pi/2$, сделаем замену переменной: $\rho = \theta - \pi/2$, в результате которой система уравнений принимает вид:

$$\begin{aligned}\ddot{\rho} &= -\sin \rho \cos \rho \left((\dot{\psi}/2 + 1)^2 + \frac{3}{2}(1 + \cos \psi) \right), \\ \ddot{\psi} \cos \rho &= 4\dot{\rho} \sin \rho (\dot{\psi}/2 + 1) - 3 \cos \rho \sin \psi.\end{aligned}$$

Линеаризация уравнений сводится к тому, что в предположении малости переменных ρ , ψ , $\dot{\rho} = \dot{\theta}$, $\dot{\psi}$, $\ddot{\rho} = \ddot{\theta}$, $\ddot{\psi}$ в начальный момент времени, уравнения разлагаются по степеням этих переменных, после чего в уравнениях пренебрегают слагаемыми 2-го и более высокого порядка. Полученные в результате линеаризации уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned}\ddot{\rho} &= -4\rho, \\ \ddot{\psi} &= -3\psi.\end{aligned}$$

Решение этой системы линейных уравнений находится стандартными методами:

$$\begin{aligned}\rho(t) &= C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t), \\ \psi(t) &= D_1 \cos(\sqrt{3}t) + D_2 \sin(\sqrt{3}t),\end{aligned}$$

где входящие в выражения константы определяются начальными условиями. Как видно из решений, переменные осциллируют вблизи равновесных значений, то есть остаются малыми. Численный эксперимент подтверждает полученные приближенные результаты.

Качественный характер других решений уравнения (15) можно понять на основе аналогии с уравнением физического маятника. Пусть в начальный момент маятник находится в положении равновесия $\psi(0) = 0$ и мы толкаем его, создавая начальную скорость $\dot{\psi}(0) = \psi_{t0}$. При малом значении ψ_{t0} маятник будет совершать малые, как можно показать, гармонические, колебания относительно положения равновесия. Это соответствует движению спутника, при котором ось совершает малые колебания относительно положения 2 на рис. 5. При увеличении значения ψ_{t0} амплитуда колебаний увеличивается, колебания становятся не гармоническими, их период возрастает (подробно это рассмотрено в одной из задач пособия [7]). Начиная со значения $\psi_{t0} = 2\sqrt{3}$, которое можно найти из закона сохранения энергии для физического маятника, после первоначального толчка маятник будет проворачиваться через неустойчивое положение равновесия. Таким образом, движение имеет характер вращения с переменной угловой скоростью, которая максимальна в нижнем положении равновесия и минимальна в верхнем положении равновесия. Соответственно, спутник начнет вращаться вокруг центра масс, оставаясь в плоскости орбиты. Однако, в отличие от физического маятника, такое вращение может быть как устойчивым, так и неустойчивым. Аналитический анализ устойчивости является непростой задачей, однако численное движение устойчивости можно достаточно просто исследовать, решив систему уравнений при помощи процедур решений систем дифференциальных уравнений.

Переходя к реальным космическим объектам, следует учесть, что приливные силы, помимо влияния на вращение тел, вызывают их деформацию. При этом в той или иной степени деформация может быть неупругой. Это означает, что возникает диссипация энергии, замедляющая вращение. Именно в результате такого замедления некоторые спутники планет и, в частности, Луна оказались всегда повернутыми одной и той же стороной к своей планете. Достаточно простая модель, иллюстрирующая подобное явление, рассмотрена в статье [8].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной вывод, который можно сделать из анализа рассмотренной модели, заключается в том, что действие приливных сил на спутник приводит к неустойчивости вращательного движения вокруг его оси. При этом вращение оказывается нерегулярным, и можно говорить лишь о некотором среднем периоде прецессии оси спутника. Этот период по порядку величины совпадает с периодом вращения спутника по орбите. Стабилизация движения возможна лишь в частном случае, когда ось спутника совершает незначительные колебания относительно направления на Землю. Аналогичный вывод приведен в учебнике [4].

Естественно, что реальные искусственные спутники Земли имеют более сложную конструкцию. Однако, если форма спутника с учетом распределения масс внутри спутника отличается от сферической, приливные силы всё равно приводят к вращательному движению вокруг оси спутника, так что требуется стабилизировать его движение некоторыми дополнительными механизмами [4].

В настоящее время в Интернете можно найти много красивых проектов космических станций, вращающихся вокруг Земли. Одним из таких проектов является станция в виде «большого велосипедного колеса» (тора, соединенного перемычками с центральным отсеком). Вращение станции вокруг оси симметрии, как предполагается, может, во-первых, создать искусственную гравитацию и, во-вторых, стабилизировать его движение. О движении модели, соответствующей такой станции, мы предполагаем рассказать в следующей статье.

Список литературы

1. Чаругин М. В. *Астрономия 10–11 классы: учебник для общеобразовательных организаций: базовый уровень*. М.: Просвещение, 2018. 144 с.
2. *Фантастика. Сборник рассказов английских и американских писателей (На английском языке)*. М.: Прогресс, 1979. 149 с.
3. *Нивен Л.* Нейтронная звезда. http://samlib.ru/m/malxcew_a_w/n01.shtml (дата обращения 15.12.2022).
4. Гуцин В. Н. *Основы устройства космических аппаратов: Учебник для вузов*. М.: Машиностроение, 2003.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Механика*. Том 1. М.: Наука. 1973, 208 с.
6. Кондратьев, А. С., Ляпцев А. В. Математическое моделирование: аналитические и вычислительные методы // *Компьютерные инструменты в образовании*. 2007. № 5. С. 20–24.
7. Кондратьев А. С. *Физика. Задачи на компьютере*. М.: Физматлит, 2008. 400 с.
8. Ляпцев А. В. Модель действия приливных сил // *Физический вестник: сборник научных статей*. Вып. 1. СПб.: Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена, 2007. С. 37-47.

Поступила в редакцию 15.12.2022, окончательный вариант — 26.01.2023.

Ляпцев Александр Викторович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры методики обучения физике РГПУ им. А. И. Герцена, ✉ upm_eno@mail.ru

Computer tools in education, 2023

№ 1: 5–17

<http://cte.eltech.ru>

doi:10.32603/2071-2340-2023-1-5-17

The Influence of Tidal Forces on the Motion of Spacecraft. Rotator Model in Orbit

Liapzev A. V.¹, Doctor sc., Professor, ✉ upm_eno@mail.ru

¹ Herzen State Pedagogical University of Russia,
Moika river embankment, 48, 191186, Saint Petersburg, Russia

Abstract

The simplest model of an artificial satellite of the Earth is proposed, on the basis of which the influence of tidal forces on the rotational motion of the satellite can be studied. It is shown that the mathematical equations describing the rotational motion do not contain small parameters. The absence of such parameters means that tidal forces have a significant effect on the rotational motion of the satellite. Numerical solutions of the obtained equations can be studied by students based on the use of procedures for solving differential equations available in MATLAB and Octave environments. Such numerical experiments allow us to judge the stability of the satellite's movements depending on the given initial states.

Keywords: *computer modeling, mathematical model, tidal forces, artificial Earth satellites, motion stability.*

Citation: A. V. Liapzev, "The Influence of Tidal Forces on the Motion of Spacecraft. Rotator Model in Orbit," *Computer tools in education*, no. 1, pp. 5–17, 2023 (in Russian); doi:10.32603/2071-2340-2023-1-5-17

References

1. M. V. Charugin, *Astronomy grades 10–11: textbook for general education organizations: basic level*, Moscow: Education, 2018 (in Russian).
2. R. D. Bradbury, P. W. Anderson, A. Ch. Clarke, et al., *Science fiction. English and American short stories*, Moscow: Progress, 1979.
3. L. Niven, *Neutron Star*, in *samlib.ru*, 2006 (in Russian). [Online]. Available: http://samlib.ru/m/malxcev_a_w/n01.shtml
4. V. N. Gushchin, *Fundamentals of the device of spacecraft: Textbook for universities*, Moscow: Engineering, 2003 (in Russian).
5. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics*, vol. 1, Moscow: Nauka, 1973 (in Russian).
6. A. S. Kondratiev and A. V. Lyapcev, "Mathematical modeling: analytical and computational methods," *Computer tools in education*, no. 5, pp. 20–24, 2007 (in Russian).
7. A. S. Kondratiev, *Fizika. Tasks on the computer*, Moscow: Fizmatlit, 2008 (in Russian).
8. A. V. Lyaptev, "Model of tidal forces," in *Physical Bulletin: collection of scientific articles*, St. Petersburg, Russia: Herzen University, vol. 1, pp. 37–47, 2007 (in Russian).

Received 15-12-2022, the final version — 26-01-2023.

Alexander Liapzev, Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor of the Department of Methods of Teaching Physics at Herzen University, ✉ upm_eno@mail.ru