Компьютерные инструменты в образовании, 2021
№ 4: 72–87
УДК: 519.7
http://cte.eltech.ru
doi:10.32603/2071-2340-2021-4-72-87

НАДМИНИМАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ БИНАРНЫХ ОПЕРАЦИЙ РАНГА 3

Еременко Д. А.[1], аспирант, ✉ er_92@list.ru

[1]Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина), 5, корп. 3, ул. Профессора Попова, 197376, Санкт-Петербург, Россия

Аннотация

Работа посвящена исследованию решетки алгебр бинарных операций ранга 3 и нахождению надминимальных алгебр бинарных операций ранга 3. Надминимальные алгебры могут быть разложимыми и неразложимыми. Было получено свойство операций, порождающих неразложимые надминимальные алгебры. Использование этого свойства позволило найти все неразложимые алгебры бинарных операций ранга 3. Для поиска разложимых алгебр использовались полученные ранее результаты по минимальным алгебрам бинарных операций ранга 3 [1]. Минимальные алгебры были разбиты на классы и описаны в теореме 2. В работе были получены надминимальные алгебры над каждым классом. Количество над каждым классом представлено в табличном виде. Также все надминимальные алгебры были разбиты на классы. Описание классов сформулировано в леммах.

Ключевые слова: *операции, решетка алгебр операций, надминимальные алгебры операций.*

Цитирование: Еременко Д. А. Надминимальные алгебры бинарных операций ранга 3 // Компьютерные инструменты в образовании. 2021. № 4. С. 72–87. doi: 10.32603/2071-2340-2021-4-72-87

1. ВВЕДЕНИЕ

Данная статья посвящена исследованию решетки алгебр бинарных операций ранга 3. Строение решетки алгебр операций рассматривалось многими математиками, например в работе [2] были получены все 18 предполных классов решетки клонов ранга 3, а в работе [3] установлено, что эти классы имеют конечные базисы и состоят из операций, зависящих не более чем от двух переменных. Таким образом, предполные классы в решетке клонов будут совпадать с предполными классами решетки бинарных операций ранга 3. В работе [4] были найдены и описаны все 48 минимальных клонов в решетке клонов ранга 3. В работе [1] были найдены все 51 минимальные клоны в решетке бинарных операций ранга 3. При этом из 51 минимальных клонов получилось 3 новых, а оставшиеся 48 полностью совпали с минимальными клонами из работы [4]. В данной статье приводится метод нахождения и классификация всех надминимальных алгебр бинарных операций ранга 3.

2. ВВОДИМЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Под рангом операции понимается мощность множества A: $k = |A|$.
Операции $f \in P_A^n$, где $A = \{a_0, \ldots, a_{k-1}\}$, можно представить как отображения

$$f : \{2^0, \ldots, 2^{k-1}\}^n \mapsto \{1, \ldots, 2^{k-1}\},$$

получаемые из f при кодировке $a_i \mapsto 2^i$.
При этом операцию f зададим векторной формой $\{\alpha_0, \ldots, \alpha_{k^n-1}\}$, где $\alpha_i \in \{2^0, \ldots, 2^{k-1}\}$, $\alpha_i = f(2^{j_1}, \ldots, 2^{j_n})$, $(j_1 \ldots j_n)$ есть предствление i в системе исчисления по основанию k n-разрядным числом.
Определим n-местную операцию проектирования по i-ому аргументу следущим образом:

$$e_i^n(a_1, ... a_n) = a_i.$$

Бинарная операция проектирования ранга 3 по первому аргументу в векторной форме записывается следующим образом: $e_1^2 = (111222444)$.

Определим следующую метаоперацию на множестве операций — суперпозицию операций $f \in P_A^n$ и P_A^m :

$$(f * f_1, \ldots, f_n)(a_1, \ldots, a_m) = f(f_1(a_1, \ldots, a_m), \ldots, f_n(a_1, \ldots, a_m)).$$

Алгеброй n-местных операций над множеством A называют любое подмножество $K \subseteq P_A^n$, замкнутое относительно суперпозиций и содержащее все n-местные операции проектирования.

Назовем наименьшей (тривиальной) алгеброй алгебру, содержащую только операции проектирования.

Минимальной алгеброй назовем алгебру, не содержащую в себе подалгебр, кроме наименьшей (тривиальной).

Пусть K минимальная алгебра. Тогда надминимальной алгеброй U над K называется алгебра, не содержащая в себе подалгебр, которые содержат K.

Порождающим множеством для алгебры K будем называть такое множество операций, алгебраическое замыкание которых совпадает с K.

Базисом для алгебры K будем называть минимальное порождающее множество, алгебраическое замыкание которого (вместе с операциями проектирования) порождает алгебру K. При этом в перечислении порождающего базиса будем опускать операции проектирования, так как они всегда присутствуют в алгебре по определению [5]. Алгебру K будем обозначать через порождающий базис следующим образом: $K = [f_1, \ldots, f_m]$.

Под объединением алгебр принято понимать алгебраическое замыкание объединения элементов, входящих в эти алгебры.

Неразложимой алгеброй будем называть алгебру, которая не представима в виде объединения собственных подалгебр. Из определения очевидно, что любой базис такой алгебры содержит только одну операцию.

Разложимой алгеброй будем называть алгебру, которая представима в виде объединения собственных подалгебр.

Неразложимая надминимальная алгебра над минимальной K не может быть надминимальной над другой минимальной алгеброй.

Разложимая надминимальная алгебра над минимальной алгеброй K содержит еще хотя бы одну другую минимальную алгебру.

3. НЕРАЗЛОЖИМЫЕ НАДМИНИМАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ

Лемма 1. $A = \{1,2,4\}$. Пусть K — минимальная алгебра бинарных операций над A. Тогда неразложимые надминимальные алгебры G могут быть порождены только операциями $[g] = G$ вида: $(x\alpha_1\alpha_2\alpha_3 y\alpha_4\alpha_5\alpha_6 z)$, где $x = f(1,1), y = f(2,2), z = f(4,4), f \in K \mid [f] = K$.

Доказательство. От противного. Пусть надминимальная неразложимая алгебра G располагается над минимальной алгеброй K. Предположим, что существует такая операция $g \in G \mid [g] = G$, что для любой $f \in K \mid [f] = K$ не выполняется какое-либо из равенств $g(1,1) = f(1,1)$, $g(2,2) = f(2,2)$, $g(4,4) = f(4,4)$. Тогда можно построить бинарную операцию с фиктивным аргументом $h = g(e_2, e_2)$, такую что:

$$[h] \subset [g],\ [e_1, e_2] \neq [h] \subset [g],\ h \notin K.$$

Получим подалгебру $[h] \neq K$, что противоречит определению неразложимой надминимальной алгебры над K. Лемма доказана.

Приведенное выше свойство операций, порождающих неразложимые надминимальные алгебры над минимальной алгеброй K, позволило наложить ограничения на множество рассматриваемых операций. Над всеми минимальными алгебрами было найдено 87 надминимальных неразложимых алгебр.

4. РАЗЛОЖИМЫЕ НАДМИНИМАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ

Рассмотрим минимальную алгебру $K = [f]$. Порождающее множество для надминимальной разложимой алгебры над минимальной алгеброй K состоит из f, а также из других операций. В свою очередь, эти другие операции порождают иные минимальные алгебры, над которыми находится рассматриваемая надминимальная разложимая алгебра. При нахождении разложимых надминимальных алгебр использовалось разложение порождающего множества:

$$[f_1, f_2, f_3, \ldots, f_k] = [[f_1, f_2], \ldots, [f_1, f_k], [f_2, f_3], \ldots, [f_2, f_k], \ldots, [f_{k-1}, f_k]].$$

Рассмотрим алгебры над минимальной алгеброй $K = [f]$. Любая надминимальная разложимая алгебра над K в своем разложении имеет пары $[f, f']$, где f' порождает другую минимальную алгебру $[f'] = K'$. Причем если какая-либо из пар $[f, f']$ в разложении надминимальной алгебры является надминимальной, то замыкание всего разложения либо совпадёт с замыканием этой пары, либо не будет порождать надминимальную алгебру. Если пара $[f, f']$ в разложении не является надминимальной, то и замыкание всего разложения не будет порождать надминимальную алгебру. Таким образом, для нахождения разложимых надминимальных алгебр над K достаточно рассмотреть все возможные алгебры, базис которых состоит из пар $[f, f']$. Над всеми минимальными алгебрами было найдено 474 надминимальных разложимых алгебр.

5. ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для поиска надминимальных алгебр использовались компьютерные вычисления. Были разработаны алгоритмы поиска всех неразложимых и разложимых алгебр.

В первом алгоритме для генерации операций, которые могут порождать неразложимые алгебры над рассматриваемой минимальной алгеброй, использовалось свойство из леммы 1. Ниже представлен алгоритм нахождения всех неразложимых надминимальных алгебр над всеми минимальными алгебрами.

Algorithm 1: Нахождение неразложимых надминимальных алгебр над всеми минимальными алгебрами

```
Data: A множество всех минимальных алгебр ранга 3
Result: B множество всех неразложимых надминимальных алгебр
foreach minimal_alg in A do
    foreach binary_operation in minimal_alg do
        potential_operations = generated_operations(binary_operation)
        foreach potential_operation in potential_operations do
            if IsUp(Closure(potential_operation),minimal_alg) then
                B.add(Closure(potential_operation))
            end
        end
    end
end
```

Для нахождения разложимых надминимальных алгебр использовалось разложение алгебры через собственные подалгебры. Для генерации разложимых алгебр использовались ранее полученные результаты из работы [1]. Ниже представлен алгоритм нахождения всех разложимых надминимальных алгебр над всеми минимальными алгебрами.

Algorithm 2: Нахождение разложимых надминимальных алгебр над всеми минимальными алгебрами

```
Data: A множество всех минимальных алгебр ранга 3
Result: C множество всех разложимых надминимальных алгебр
foreach minimal_alg in A do
    foreach another_minimal_alg in A.discard(minimal_alg) do
        if IsUp(Closure(minimal_alg, enother_minimal_alg), minimal_alg) then
            C.add(Closure(minimal_alg, enother_minimal_alg))
        end
    end
end
```

Результаты, полученные с помощью компьютерных вычислений, позволили сформулировать теорему 1 и леммы 2.1–2.16, 3.1–3.7.

Теорема 1. Число различных надминимальных алгебр над всеми минимальными алгебрами равно 561, из них 474 разложимых и 87 неразложимых алгебр. Для каждой из 64 минимальных алгебры в таблице 1 приведено число надминимальных алгебр над ней, где в столбцах T 1 и T 2 указано количество неразложимых и разложимых алгебр соответственно. Эти алгебры полностью описаны.

Таблица 1. Количество надминимальных алгебр

Min alg	T 1	T 2	Min alg	T 1	T 2
[111111111]	3	20	[121222444]	2	16
[222222222]	3	20	[122222444]	1	9
[444444444]	3	20	[144222444]	1	9
[142142142]	0	10	[122222224]	2	9
[214214214]	0	10	[144424444]	2	9
[421421421]	0	10	[111121114]	2	9
[241241241]	0	3	[111121444]	1	9
[114114114]	6	6	[111122444]	2	16
[122122122]	6	6	[111224444]	2	16
[121121121]	6	6	[111424444]	1	9
[144144144]	6	6	[111222114]	1	9
[224224224]	6	6	[111222144]	2	16
[424424424]	6	6	[111222224]	1	9
[111422244]	0	11	[111222424]	2	16
[141222414]	0	11	[124222444]	2	10
[112221444]	0	11	[121222424]	0	15
[114222424]	0	7	[114224444]	0	15
[121222144]	0	7	[111122144]	0	15
[114122444]	0	7	[111124444]	2	10
[121224444]	0	7	[111222124]	2	10
[111122424]	0	7	[121222124]	1	16
[111224144]	0	7	[124222424]	1	16
[112222244]	0	6	[114124444]	1	16
[141422444]	0	6	[124224444]	1	16
[111221414]	0	6	[111122124]	1	16
[112222444]	1	16	[111124144]	1	16
[141222444]	1	16	[114122424]	0	10
[111221444]	1	16	[121224144]	0	10
[111422444]	1	16	[142421214]	0	8
[111222244]	1	16	[114222144]	0	16
[111222414]	1	16	[111224424]	0	16
[114222444]	2	16	[114224124]	0	16

6. КЛАССИФИКАЦИЯ МИНИМАЛЬНЫХ АЛГЕБР

Тут и далее $A = \{1,2,4\}$. Введем следующие множества унарных операций:

$O_1 = \{f_a \mid f_a(1) = f_a(2) = f_a(4) = a,\ \text{ где } a \in A\}$,

$O_2 = \{f_a \mid f_a(a) = a, f_a(b) = c, f_a(c) = b,\ \text{ где } a \neq b,\ a \neq c,\ b \neq c,\ a,b,c \in A\}$,

$O_3 = \{f \mid f(1) = 2, f(2) = 4, f(4) = 1\}$,

$O_4 = \{f_{c,d} \mid f_{c,d}(a) = a, f_{c,d}(b) = b, f_{c,d}(c) = d,\ \text{ где } a \neq b,\ a \neq c,\ b \neq c,\ c \neq d,\ a,b,c,d \in A\}$,

$O_5 = \{f_{a,b} \mid f_{a,b}(a) = b, f_{a,b}(b) = b, f_{a,b}(c) = a,\ \text{ где } a \neq b,\ a \neq c,\ b \neq c,\ a,b,c \in A\}$.

Теорема 2. Множество минимальных алгебр бинарных операций ранга 3 разбивается на следующие попарно непересекающиеся классы:

$K_1 = \{[g_{c_1}] \mid c_1 \in A\}$,

$$g_{c_1}(y,x) = \begin{cases} f_{c_1}(x) \text{ для } y = 1, & \text{где } f_{c_1} \in O_1, \\ f_{c_1}(x) \text{ для } y = 2, & \text{где } f_{c_1} \in O_1, \\ f_{c_1}(x) \text{ для } y = 4, & \text{где } f_{c_1} \in O_1. \end{cases}$$

$K_2 = \{[g_{c_1}] \mid c_1 \in A\}$,

$$g_{c_1}(y,x) = \begin{cases} f_{c_1}(x) \text{ для } y=1, & \text{где } f_{c_1} \in O_2, \\ f_{c_1}(x) \text{ для } y=2, & \text{где } f_{c_1} \in O_2, \\ f_{c_1}(x) \text{ для } y=4, & \text{где } f_{c_1} \in O_2. \end{cases}$$

$K_3 = \{[g]\}$,

$$g(y,x) = \begin{cases} f(x) \text{ для } y=1, & \text{где} f_{c_1} \in O_3, \\ f(x) \text{ для } y=2, & \text{где} f_{c_1} \in O_3, \\ f(x) \text{ для } y=4, & \text{где} f_{c_1} \in O_3. \end{cases}$$

$K_4 = \{[g_{c_1,c_2}] \mid c_1, c_2 \in A, c_1 \neq c_2\}$,

$$g_{c_1,c_2}(y,x) = \begin{cases} f_{c_1,c_2}(x) \text{ для } y=1, & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_4, \\ f_{c_1,c_2}(x) \text{ для } y=2, & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_4, \\ f_{c_1,c_2}(x) \text{ для } y=4 & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_4. \end{cases}$$

$K_5 = \{[g_a] \mid a \in A\}$,

$$g_a(y,x) = \begin{cases} f_a(x) \text{для} y=a, & \text{где } f_a \in O_2, \\ e(x) \text{ для остальных } y. \end{cases}$$

$K_6 = \{[g_{c_1,c_2,c_3}] \mid c_1, c_2, c_3 \in A, c_i \neq c_j\}$,

$$g_{c_1,c_2,c_3}(y,x) = \begin{cases} f_{c_1,c_2}(x) \text{ для } y=c_2, & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_4, \\ f_{c_3,c_1}(x) \text{ для } y=c_1, & \text{где } f_{c_3,c_1} \in O_4, \\ e(x) \text{ для остальных } y. \end{cases}$$

$K_7 = \{[g_{c_1,c_2,c_3}] \mid c_1, c_2, c_3 \in A, c_i \neq c_j\}$,

$$g_{c_1,c_2,c_3}(y,x) = \begin{cases} f_{c_1,c_2}(x) \text{ для } y=c_3, & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_4, \\ f_{c_3,c_2}(x) \text{ для } y=c_1, & \text{где } f_{c_3,c_2} \in O_4, \\ e(x) \text{ для остальных } y. \end{cases}$$

$K_8 = \{[g_a] \mid a \in A\}$,

$$g_a(y,x) = \begin{cases} f_a(x) \text{ для } y=a, & \text{где } f_a \in O_1, \\ e(x) \text{ для остальных } y. \end{cases}$$

$K_9 = \{[g_{c_1,c_2}] \mid c_1, c_2 \in A, c_i \neq c_j\}$,

$$g_{c_1,c_2}(y,x) = \begin{cases} f_{c_1,c_2}(x) \text{ для } y=c_2, & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_4, \\ f_{c_2,c_1}(x) \text{ для } y=c_1, & \text{где } f_{c_2,c_1} \in O_4, \\ e(x) \text{ для остальных } y. \end{cases}$$

$K_{10} = \{[g_{c_1,c_2,c_3}] \mid c_1, c_2, c_3 \in A, c_i \neq c_j\}$,

$$g_{c_1,c_2,c_3}(y,x) = \begin{cases} f_{c_1,c_2}(x) \text{ для } y=c_2, & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_4, \\ f_{c_3,c_1}(x) \text{ для } y=c_1, & \text{где } f_{c_3,c_2} \in O_4, \\ f_{c_2,c_3}(x) \text{ для } y=c_3, & \text{где } f_{c_2,c_3} \in O_4. \end{cases}$$

$K_{11} = [g]$,

$$g(y,x) = \begin{cases} f_1(x) \text{ для } y=1, & \text{где } [f_1] \in O_2, \\ f_2(x) \text{ для } y=2, & \text{где } [f_2] \in O_2, \\ f_4(x) \text{ для } y=4, & \text{где } [f_4] \in O_2. \end{cases}$$

$K_{12} = \{[g_{c_1,c_2}] \mid c_1, c_2 \in A, c_1 \neq c_2\}$,

$$g_{c_1,c_2}(y,x) = \begin{cases} e(x) \text{ для } y=c_1, \\ f_{c_1,c_2}(x) \text{ для остальных } y, & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_4. \end{cases}$$

$K_{13} = \{[g_{c_1,c_2}] \mid c_1, c_2 \in A, c_1 \neq c_2\}$,

$$g_{c_1,c_2}(y,x) = \begin{cases} e(x) \text{ для } y=c_1, \\ e(x) \text{ для } y=c_2, \\ f_{c_1,c_2}(x) \text{ для остальных } y, & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_4. \end{cases}$$

$K_{13'} = \{[g_{c_1,c_2,c_3}] \mid c_1, c_2, c_3 \in A, c_i \neq c_j\}$,

$$g_{c_1,c_2,c_3}(y,x) = \begin{cases} f_{c_1,c_2}(x) \text{ для } y = c_2, & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_4, \\ f_{c_3}(x) \text{ для } y = c_3 & \text{где } f_{c_3} \in O_1, \\ e(x) \text{ для } y = c_1. \end{cases}$$

$K_{14} = \{[g_{c_1,c_2}] \mid c_1, c_2 \in A, c_1 \neq c_2\}$,

$$g_{c_1,c_2}(y,x) = \begin{cases} f_{c_1,c_2}(x) \text{ для } y = c_2, & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_4, \\ e(x) \text{ для остальных } y. \end{cases}$$

$K_{15} = \{[g_{c_1,c_2,c_3}] \mid c_1, c_2, c_3 \in A, c_i \neq c_j\}$,

$$g_{c_1,c_2,c_3}(y,x) = \begin{cases} f_{c_1,c_2}(x) \text{ для } y = c_3, & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_4, \\ f_{c_3,c_2}(x) \text{для } y = c_1, & \text{где } f_{c_3,c_2} \in O_4, \\ f_{c_2}(x) \text{ для } y = c_2, & \text{где } f_{c_2} \in O_1. \end{cases}$$

$K_{16} = \{[g_{c_1,c_2,c_3}] \mid c_1, c_2, c_3 \in A, c_i \neq c_j\}$,

$$g_{c_1,c_2,c_3}(y,x) = \begin{cases} f_{c_1,c_2}(x) \text{ для } y = c_2, & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_4, \\ f_{c_1,c_3}(x) \text{ для } y = c_3, & \text{где } f_{c_1,c_3} \in O_4, \\ e(x) \text{ для остальных } y. \end{cases}$$

6.1. Надминимальные разложимые алгебры

Лемма 2.1. Для минимальной алгебры $[f_a] \in K_1$ надминимальные разложимые алгебры разбиваются на следующие попарно непересекающиеся классы:

$U_{1.1} = \{[f_a, g_b] \mid [g_b] \in K_1,\ a \neq b\}$,
$U_{1.2} = \{[f_a, g_a] \mid [g_a] \in K_2\}$,
$U_{1.3} = \{[f_a, g_{c_1,c_2}] \mid [g_{c_1,c_2}] \in K_4,\ c_1 \neq a\}$,
$U_{1.4} = \{[f_a, g_{c_1,a,c_3}] \mid [g_{c_1,a,c_3}] \in K_7\}$,
$U_{1.5} = \{[f_a, g_{c_1,a}] \mid [g_{c_1,a}] \in K_{13}\}$,
$U_{1.6} = \{[f_a, g_{c_1,a,c_3}] \mid [g_{c_1,a,c_3}] \in K_{15}\}$,
$U_{1.7} = \{[f_a, g_{c_1,c_2}] \mid [g_{c_1,c_2}] \in K_{14},\ c_1 \neq a,\ c_2 \neq a\}$,
$U_{1.8} = \{[f_a, g_{a,c_2,c_3}] \mid [g_{a,c_2,c_3}] \in K_{16}\}$,
$U_{1.9} = \{[f_a, g_a] \mid [g_a] \in K_8\}$,
$U_{1.10} = [f_a, g_{c_1,c_2,c_3}] \mid [g_{c_1,c_2,c_3}] \in K_{13'},\ c_2 \neq a\}$,
$U_{1.11} = \{[f_a, g_{c_1,c_2}] \mid [g_{c_1,c_2}] \in K_9,\ c_1 \neq a,\ c_2 \neq a\}$.

Лемма 2.2. Для минимальной алгебры $[f_a] \in K_2$ надминимальные разложимые алгебры разбиваются на следующие попарно непересекающиеся классы:

$U_{2.1} = \{[f_a, g_b] \mid [g_b] \in K_1\}$,
$U_{2.2} = \{[f_a, g_b] \mid [g_b] \in K_2, a \neq b\} = \{[f_a, g] \mid g \in K_3\}$,
$U_{2.3} = \{[f_a, g_{c_1,c_2}] \mid [g_{c_1,c_2}] \in K_4,\ c_2 \neq a\}$,
$U_{2.4} = \{[f_a, g_a] \mid [g_a] \in K_5\}$,
$U_{2.5} = \{[f_a, g_{c_1,c_2}] \mid [g_{c_1,c_2}] \in K_{13},\ c_1 \neq a,\ c_2 \neq a\}$,
$U_{2.6} = \{[f_a, g_{a,c_2}] \mid [g_{a,c_2}] \in K_{12}\}$,
$U_{2.7} = \{[f_a, g_{a,c_2,c_3}] \mid [g_{a,c_2,c_3}] \in K_{16}\}$,
$U_{2.8} = \{[f_a, g_a] \mid [g_a] \in K_8\}$.

Лемма 2.3. Для минимальной алгебры $[f] \in K_3$ надминимальные разложимые алгебры разбиваются на следующие попарно непересекающиеся классы:

$U_{3.1} = \{[f, g_a] \mid [g_a] \in K_1\}$,
$U_{3.2} = \{[f, g_a] \mid [g_a] \in K_2\}$,
$U_{3.3} = \{[f, g] \mid [g] \in K_{11}\}$.

Лемма 2.4.Для минимальной алгебры $[f_{c_1,c_2}] \in K_4$ надминимальные разложимые алгебры разбиваются на следующие попарно непересекающиеся классы:

$U_{4.1} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_3}] \mid [g_{c_3}] \in K_1,\ c_3 \neq c_1\}$,
$U_{4.2} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_1,c_3}] \mid [g_{c_1,c_3}] \in K_4,\ c_3 \neq c_2\}$,
$U_{4.3} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_2,c_1}] \mid [g_{c_2,c_1}] \in K_4\}$,
$U_{4.4} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_1,c_2}] \mid g_{c_1,c_2}] \in K_{13}\}$,
$U_{4.5} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_1,c_2}] \mid g_{c_1,c_2}] \in K_{12}\}$.

Лемма 2.5. Для минимальной алгебры $[f_{c_1}] \in K_5$ надминимальные разложимые алгебры разбиваются на следующие попарно непересекающиеся классы:

$U_{5.1} = \{[f_{c_1}, g_{c_2}] \mid [g_{c_2}] \in K_1,\ c_1 \neq c_2\}$,
$U_{5.2} = \{[f_{c_1}, g_{c_1}] \mid [g_{c_1}] \in K_2\}$,
$U_{5.3} = \{[f_{c_1}, g_{c_2,c_3}] \mid [g_{c_2,c_3}] \in K_4,\ c_2 \neq c_1,\ c_3 \neq c_1\}$,
$U_{5.4} = \{[f_{c_1}, g_{c_1,c_2}] \mid [g_{c_1,c_2}] \in K_4\}$,
$U_{5.5} = \{[f_{c_1}, g_{c_2,c_3}] \mid [g_{c_2,c_3}] \in K_{13},\ c_2 \neq c_1,\ c_3 \neq c_1\}$,
$U_{5.6} = \{[f_{c_1}, g_{c_1,c_2}] \mid [g_{c_1,c_2}] \in K_{12}\}$,
$U_{5.7} = \{[f_{c_1}, g_{c_1,c_2,c_3}] \mid [g_{c_1,c_2,c_3}] \in K_{16}\}$,
$U_{5.8} = \{[f_{c_1}, g_{c_1}] \mid [g_{c_1}] \in K_8\}$,
$U_{5.9} = \{[f_{c_1}, g_{c_2,c_3}] \mid [g_{c_2,c_3}] \in K_9,\ c_2 \neq c_1,\ c_3 \neq c_1\}$.

Лемма 2.6. Для минимальной алгебры $f_{c_1,c_2,c_3} \in K_6$ ннадминимальные разложимые алгебры разбиваются на следующие попарно непересекающиеся классы:

$U_{6.1} = \{[f_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_1,c_2}] \mid [g_{c_1,c_2}] \in K_4\}$,
$U_{6.2} = \{[f_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_3,c_1}] \mid [g_{c_3,c_1}] \in K_4\}$,
$U_{6.3} = \{[f_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_1,c_2}] \mid [g_{c_1,c_2}] \in K_{14}\}$,
$U_{6.4} = \{[f_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_3,c_1}] \mid [g_{c_3,c_1}] \in K_{14}\}$,
$U_{6.5} = \{[f_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_3,c_1,c_2}] \mid [g_{c_3,c_1,c_2}] \in K_{13'}\}$,
$U_{6.6} = \{[f_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_1,c_2,c_3}] \mid [g_{c_1,c_2,c_3}] \in K_{10}\}$,
$U_{6.7} = \{[f_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_2,c_3}] \mid [g_{c_2,c_3}] \in K_9\}$.

Лемма 2.7. Для минимальной алгебры $f_{c_1,c_2,c_3} \in K_7$ надминимальные разложимые алгебры разбиваются на следующие попарно непересекающиеся классы:

$U_{7.1} = \{[f_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_2}] \mid [g_{c_2}] \in K_1\}$,
$U_{7.2} = \{[f_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_1,c_2}] \mid [g_{c_1,c_2}] \in K_{13}\}$,
$U_{7.3} = \{[f_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_3,c_2}] \mid [g_{c_3,c_2}] \in K_{13}\}$,
$U_{7.4} = \{[f_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_1,c_2,c_3}] \mid [g_{c_1,c_2,c_3}] \in K_{15}\}$,
$U_{7.5} = \{[f_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_2,c_1,c_3}] \mid [g_{c_2,c_1,c_3}] \in K_{16}\}$,
$U_{7.6} = \{[f_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_1,c_3}] \mid [g_{c_1,c_3}] \in K_9\}$.

Лемма 2.8. Для минимальной алгебры $f_a \in K_8$ надминимальные разложимые алгебры разбиваются на следующие попарно непересекающиеся классы:

$U_{8.1} = \{[f_a, g_a] \mid [g_a] \in K_1\}$,
$U_{8.2} = \{[f_a, g_a] \mid [g_a] \in K_2\}$ $U_{8.3} = \{[f_a, g_{c_1,c_2}] \mid [g_{c_1,c_2}] \in K_4,\ c_1 \neq a\}$,
$U_{8.4} = \{[f_a, g_a] \mid [g_a] \in K_5\}$,
$U_{8.5} = \{[f_a, g_{c_1,c_2}] \mid [g_{c_1,c_2}] \in K_{13},\ c_1 \neq a, c_2 \neq a\}$,
$U_{8.6} = \{[f_a, g_{c_1,a}] \mid [g_{c_1,a}] \in K_{14}\}$,
$U_{8.5} = \{[f_a, g_{c_1,a,c_2}] \mid [g_{c_1,a,c_2}] \in K_{15}\}$,
$U_{8.6} = \{[f_a, g_{c_1,c_2,a}] \mid [g_{c_1,c_2,a}] \in K_{13'}\}$,
$U_{8.6} = \{[f_a, g_{c_1,c_2}] \mid [g_{c_1,c_2}] \in K_9,\ c_1 \neq a,\ c_2 \neq a\}$.

Лемма 2.9. Для минимальной алгебры $f_{c_1,c_2} \in K_9$ надминимальные разложимые алгебры разбиваются на следующие попарно непересекающиеся классы:

$U_{9.1} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_3}] \mid [g_{c_3}] \in K_1,\ c_3 \neq c_1,\ c_3 \neq c_2\}$,
$U_{9.2} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_3}] \mid [g_{c_3}] \in K_5,\ c_3 \neq c_1,\ c_3 \neq c_2\}$,
$U_{9.3} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_3,c_1,c_2}] \mid [g_{c_3,c_1,c_2}] \in K_6\}$,
$U_{9.4} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_3,c_2,c_1}] \mid [g_{c_3,c_1,c_2}] \in K_6\}$,
$U_{9.5} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_1,c_3,c_2}] \mid [g_{c_1,c_3,c_2}] \in K_7\}$,
$U_{9.6} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_1,c_2}] \mid [g_{c_1,c_2}] \in K_{13}\}$,
$U_{9.7} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_2,c_1}] \mid [g_{c_2,c_1}] \in K_{13}\}$,
$U_{9.8} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_3,c_4}] \mid [g_{c_3,c_4}] \in K_{14}\}$,
$U_{9.9} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_3}] \mid [g_{c_3}] \in K_8,\ c_3 \neq c_1,\ c_3 \neq c_2\}$,
$U_{9.10} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_3,c_1,c_2}] \mid [g_{c_3,c_1,c_2}] \in K_{16}\}$,
$U_{9.11} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_3,c_2}] \mid [g_{c_3,c_2}] \in K_9,\ c_3 \neq c_1\} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_1,c_3}] \mid [g_{c_1,c_3}] \in K_9,\ c_3 \neq c_1\}$.

Лемма 2.10. Для минимальной алгебры $f_{c_1,c_2,c_3} \in K_{10}$ надминимальные разложимые алгебры разбиваются на следующие попарно непересекающиеся классы:

$U_{10.1} = \{[f_{c_1,c_2,{}_3}, g_{c_1,c_2}] \mid [g_{c_1,c_2}] \in K_4\}$,
$U_{10.2} = \{[f_{c_1,c_2,{}_3}, g_{c_2,c_3}] \mid [g_{c_2,c_3}] \in K_4\}$,
$U_{10.3} = \{[f_{c_1,c_2,{}_3}, g_{c_3,c_1}] \mid [g_{c_3,c_1}] \in K_4\}$,
$U_{10.4} = \{[f_{c_1,c_2,{}_3}, g_{c_1,c_2,c_3}] \mid [g_{c_1,c_2,c_3}] \in K_6\}$,
$U_{10.5} = \{[f_{c_1,c_2,{}_3}, g_{c_3,c_1,c_2}] \mid [g_{c_3,c_1,c_2}] \in K_6\}$,
$U_{10.6} = \{[f_{c_1,c_2,{}_3}, g_{c_2,c_3,c_1}] \mid [g_{c_2,c_3,c_1}] \in K_6\}$,
$U_{10.7} = \{[f_{c_1,c_2,{}_3}, g_{c_1,c_2}] \mid [g_{c_1,c_2}] \in K_{14}\}$,
$U_{10.8} = \{[f_{c_1,c_2,{}_3}, g_{c_2,c_3}] \mid [g_{c_2,c_3}] \in K_{14}\}$,
$U_{10.9} = \{[f_{c_1,c_2,{}_3}, g_{c_3,c_1}] \mid [g_{c_3,c_1}] \in K_{14}\}$,
$U_{10.10} = \{[f_{c_1,c_2,{}_3}, g_{c_1,c_3,c_2}] \mid [g_{c_1,c_3,c_2}] \in K_{10}\}$.

Лемма 2.11. Для минимальной алгебры $[f] \in K_{11}$ надминимальные разложимые алгебры разбиваются на следующие попарно непересекающиеся классы:

$U_{11.1} = \{[f, g_a] \mid [g_a] \in K_1\} = \{[f, g_a] \mid [g_a] \in K_2\}$,
$U_{11.2} = \{[f, g] \mid [g] \in K_3\}$,
$U_{11.3} = \{[f, g_{c_1,c_2,c_3}] \mid [g_{c_1,c_2,c_3}] \in K_{15}\} = \{[f, g_{c_2}] \mid [g_{c_2}] \in K_8\} = \{[f, g_{c_1,c_2,c_3}] \mid [g_{c_1,c_2,c_3}] \in K_7\} =$
$= \{[f, g_{c_1,c_3}] \mid [g_{c_1,c_3}] \in K_9\} = \{[f, g_{c_2}] \mid [g_{c_2}] \in K_5\} = \{[f, g_{c_2,c_1,c_3}] \mid [g_{c_2,c_1,c_3}] \in K_{16}\}$,
$U_{11.4} = \{[f, g_{c_1,c_2,c_3}] \mid [g_{c_1,c_2,c_3}] \in K_{10}\} = \{[f, g_{c_1,c_3,c_2}] \mid [g_{c_1,c_3,c_2}] \in K_{10}\}$.

Лемма 2.12. Для минимальной алгебры $[f_{c_1,c_2}] \in K_{12}$ надминимальные разложимые алгебры разбиваются на следующие попарно непересекающиеся классы:

$U_{12.1} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_1,c_2}] \mid [g_{c_1,c_2}] \in K_4\}$,
$U_{12.2} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_2,c_3}] \mid [g_{c_2,c_3}] \in K_4,\ c_3 \neq c_1,\ c_3 \neq c_2\}$,
$U_{12.3} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_3,c_2}] \mid [g_{c_3,c_2}] \in K_4,\ c_3 \neq c_1,\ c_3 \neq c_2\}$,
$U_{12.4} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_1,c_2}] \mid [g_{c_1,c_2}] \in K_{13}\}$,
$U_{12.5} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_3,c_2}] \mid [g_{c_1,c_2}] \in K_{14}\}$,
$U_{12.6} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_1,c_3}] \mid [g_{c_1,c_3}] \in K_{12},\ c_3 \neq c_1,\ c_3 \neq c_2\}$,
$U_{12.7} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_1,c_2,c_3}] \mid [g_{c_1,c_2,c_3}] \in K_{15},\ c_3 \neq c_1,\ c_3 \neq c_2\}$,
$U_{12.8} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_1,c_2,c_3}] \mid [g_{c_1,c_2,c_3}] \in K_{16},\ c_3 \neq c_1,\ c_3 \neq c_2\}$,
$U_{12.9} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_1,c_2,c_3}] \mid [g_{c_1,c_2,c_3}] \in K_{13'},\ c_3 \neq c_1,\ c_3 \neq c_2\}$.

Лемма 2.13. Для минимальной алгебры $[f_{c_1,c_2}] \in K_{13}$ надминимальные разложимые алгебры разбиваются на следующие попарно непересекающиеся классы:

$U_{13.1} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_1}] \mid [g_{c_1}] \in K_1\}$,

$U_{13.2} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_2}] \mid [g_{c_2}] \in K_1\}$,
$U_{13.3} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_1,c_2}] \mid [g_{c_1,c_2}] \in K_4\}$,
$U_{13.4} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_2,c_1}] \mid [g_{c_2,c_1}] \in K_4\}$,
$U_{13.5} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_3,c_2}] \mid [g_{c_3,c_2}] \in K_4,\ c_3 \neq c_1,\ c_3 \neq c_2\}$,
$U_{13.6} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_1,c_2,c_3}] \mid [g_{c_1,c_2,c_3}] \in K_7,\ c_3 \neq c_1,\ c_3 \neq c_2\}$,
$U_{13.7} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_2,c_1}] \mid [g_{c_2,c_1}] \in K_{13}\}$,
$U_{13.8} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_2,c_1}] \mid [g_{c_2,c_1}] \in K_{14}\}$,
$U_{13.9} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_1,c_3}] \mid [g_{c_2,c_1}] \in K_{14},\ c_3 \neq c_1,\ c_3 \neq c_2\}$,
$U_{13.10} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_1,c_2}] \mid [g_{c_2,c_1}] \in K_{12}\}$,
$U_{13.11} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_3,c_2}] \mid [g_{c_2,c_1}] \in K_{12},\ c_3 \neq c_1,\ c_3 \neq c_2\}$,
$U_{13.12} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_1,c_2,c_3}] \mid [g_{c_1,c_2,c_3}] \in K_{15},\ c_3 \neq c_1,\ c_3 \neq c_2\}$,
$U_{13.13} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_3}] \mid [g_{c_3}] \in K_8,\ c_3 \neq c_1,\ c_3 \neq c_2\}$,
$U_{13.14} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_1,c_2,c_3}] \mid [g_{c_1,c_2,c_3}] \in K_{13'}\}$,
$U_{13.15} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_2,c_1,c_3}] \mid [g_{c_2,c_1,c_3}] \in K_{13'}\}$,
$U_{13.16} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_3,c_2,c_1}] \mid [g_{c_3,c_2,c_1}] \in K_{13'}\}$.

Лемма 2.13’. Для минимальной алгебры $[f_{c_1,c_2,c_3}] \in K_{13'}$ надминимальные разложимые алгебры разбиваются на следующие попарно непересекающиеся классы:

$U_{13'.1} = \{[f_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_1}] \mid [g_{c_1}] \in K_1\}$,
$U_{13'.2} = \{[f_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_3}] \mid [g_{c_3}] \in K_1\}$,
$U_{13'.3} = \{[f_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_1,c_2}] \mid [g_{c_2,c_3}] \in K_4\}$,
$U_{13'.4} = \{[f_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_1,c_3}] \mid [g_{c_2,c_3}] \in K_4\}$,
$U_{13'.5} = \{[f_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_2,c_3}] \mid [g_{c_2,c_3}] \in K_4\}$,
$U_{13'.6} = \{[g_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_2,c_3,c_1}] \mid [g_{c_2,c_3}] \in K_6\}$,
$U_{13'.7} = \{[g_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_1,c_2}] \mid [g_{c_2,c_3,c_1}] \in K_{13}\}$,
$U_{13'.8} = \{[g_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_2,c_1}] \mid [g_{c_2,c_3,c_1}] \in K_{13}\}$,
$U_{13'.9} = \{[g_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_1,c_2}] \mid [g_{c_2,c_3,c_1}] \in K_{14}\}$,
$U_{13'.10} = \{[g_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_1,c_3}] \mid [g_{c_2,c_3,c_1}] \in K_{14}\}$,
$U_{13'.11} = \{[g_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_2,c_3}] \mid [g_{c_2,c_3,c_1}] \in K_{14}\}$,
$U_{13'.12} = \{[g_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_1,c_3,c_2}] \mid [g_{c_2,c_3}] \in K_{15}\}$,
$U_{13'.13} = \{[g_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_1,c_2}] \mid [g_{c_1,c_2}] \in K_{12}\}$,
$U_{13'.14} = \{[g_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_1}] \mid [g_{c_3}] \in K_8\}$,
$U_{13'.15} = \{[g_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_1,c_2,c_3}] \mid [g_{c_2,c_3}] \in K_{16}\}$,
$U_{13'.16} = \{[g_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_3,c_2,c_1}] \mid [g_{c_3,c_2,c_1}], \in K_{13'}\}$.

Лемма 2.14. Для минимальной алгебры $[f_{c_1,c_2}] \in K_{14}$ надминимальные разложимые алгебры разбиваются на следующие попарно непересекающиеся классы:

$U_{14.1} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_3}] \mid [g_{c_1}] \in K_1,\ c_3 \neq c_1,\ c_3 \neq c_2\}$,
$U_{14.2} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_1,c_2}] \mid [g_{c_1,c_2}] \in K_4\}$,
$U_{14.3} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_1,c_3}] \mid [g_{c_1,c_3}] \in K_4,\ c_3 \neq c_1,\ c_3 \neq c_2\}$,
$U_{14.4} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_2,c_3}] \mid [g_{c_2,c_3}] \in K_4,\ c_3 \neq c_1,\ c_3 \neq c_2\}$,
$U_{14.5} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_3,c_1}] \mid [g_{c_3,c_1}] \in K_4,\ c_3 \neq c_1,\ c_3 \neq c_2\}$,
$U_{14.6} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_1,c_2,c_3}] \mid [g_{c_1,c_2,c_3}] \in K_6\}$,
$U_{14.7} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_2,c_3,c_1}] \mid [g_{c_2,c_3,c_1}] \in K_6\}$,
$U_{14.8} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_1,c_3}] \mid [g_{c_1,c_3}] \in K_{13},\ c_3 \neq c_1,\ c_3 \neq c_2\}$,
$U_{14.9} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_1,c_2}] \mid [g_{c_1,c_3}] \in K_{12}, c_3 \neq c_1, c_3 \neq c_2\}$,
$U_{14.10} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_2}] \mid [g_{c_2}] \in K_8\}$,
$U_{14.11} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_1,c_2,c_3}] \mid [g_{c_1,c_2,c_3}] \in K_{16}\}$,

$U_{14.12} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_1,c_2,c_3}] \mid [g_{c_1,c_2,c_3}] \in K_{13'}\},$
$U_{14.13} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_3,c_1,c_2}] \mid [g_{c_3,c_1,c_2}] \in K_{13'}\},$
$U_{14.14} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_1,c_3,c_2}] \mid [g_{c_1,c_3,c_2}] \in K_{13'}\},$
$U_{14.15} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_1,c_2,c_3}] \mid [g_{c_1,c_2,c_3}] \in K_{10}\},$
$U_{14.16} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_1,c_2}] \mid [g_{c_1,c_2}] \in K_9\}.$

Лемма 2.15. Для минимальной алгебры $[f_{c_1,c_2,c_3}] \in K_{15}$ надминимальные разложимые алгебры разбиваются на следующие попарно непересекающиеся классы:
$U_{15.1} = \{[f_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_2}] \mid [g_{c_2}] \in K_1\},$
$U_{15.2} = \{[f_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_4,c_2}] \mid [g_{c_4,c_2}] \in K_4\},$
$U_{15.3} = \{[f_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_1,c_2,c_3}] \mid [g_{c_1,c_2,c_3}] \in K_7\},$
$U_{15.4} = \{[f_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_4,c_2}] \mid [g_{c_4,c_2}] \in K_{13}\},$
$U_{15.5} = \{[f_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_4,c_2}] \mid [g_{c_4,c_2}] \in K_{12}\},$
$U_{15.6} = \{[f_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_2}] \mid [g_{c_2}] \in K_8\}.$

Лемма 2.16. Для минимальной алгебры $[f_{c_1,c_2,c_3}] \in K_{16}$ надминимальные разложимые алгебры разбиваются на следующие попарно непересекающиеся классы:
$U_{16.1} = \{[f_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_1}] \mid [g_{c_1}] \in K_1\},$
$U_{16.2} = \{[f_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_1,c_2}] \mid [g_{c_1,c_2}] \in K_4\},$
$U_{16.3} = \{[f_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_1,c_3}] \mid [g_{c_1,c_3}] \in K_4\},$
$U_{16.4} = \{[f_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_1,c_2}] \mid [g_{c_1,c_2}] \in K_{12}\},$
$U_{16.5} = \{[f_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_1,c_3}] \mid [g_{c_1,c_3}] \in K_{12}\},$
$U_{16.6} = \{[f_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_1,c_2}] \mid [g_{c_1,c_2}] \in K_{14}\},$
$U_{16.7} = \{[f_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_1,c_3}] \mid [g_{c_1,c_3}] \in K_{14}\},$
$U_{16.8} = \{[f_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_1,c_2,c_3}] \mid [g_{c_1,c_2,c_3}] \in K_{13'}\},$
$U_{16.9} = \{[f_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_1,c_3,c_2}] \mid [g_{c_1,c_3,c_2}] \in K_{13'}\},$
$U_{16.10} = \{[f_{c_1,c_2,c_3}, g_{c_1,c_2}] \mid [g_{c_1,c_3}2] \in K_9\}.$

6.2. Надминимальные неразложимые алгебры

Лемма 3.1. Для минимальной алгебры $[f_{c_1}] \in K_1$ надминимальные неразложимые алгебры разбиваются на следующие попарно непересекающиеся классы:
$N_{1.1} = \{[g_{c_1,c_2}] \mid c_1, c_2 \in A, c_1 \neq c_2\},$

$$g_{c_1,c_2}(y,x) = \begin{cases} f_{c_2,c_1}(x) \text{ для } y = c_2, & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_4, \\ f_{c_1}(x) \text{ для остальных } y, & \text{где } f_{c_1} \in O_1. \end{cases}$$

$N_{1.2} = \{[g_{c_1,c_2,c_3}] \mid c_1, c_2, c_3 \in A, c_i \neq c_j\},$

$$g_{c_1,c_2,c_3}(y,x) = \begin{cases} f_{c_2,c_1}(x) \text{ для } y = c_2, & \text{где } f_{c_2,c_1} \in O_4, \\ f_{c_3,c_1}(x) \text{ для } y = c_3, & \text{где } f_{c_3,c_1} \in O_4, \\ f_{c_1}(x) \text{ для } y = c_1, & \text{где } f_{c_1} \in O_1. \end{cases}$$

Лемма 3.2. Для минимальной алгебры $[f_{c_1,c_2}] \in K_4$ надминимальные неразложимые алгебры разбиваются на следующие попарно непересекающиеся классы:
$N_{4.1} = \{[g_{c_1,c_2}] \mid c_1, c_2 \in A, c_1 \neq c_2\},$

$$g_{c_1,c_2}(y,x) = \begin{cases} f_{c_2}(x) \text{ для } y = c_1, & \text{где } f_{c_2} \in O_1 \\ f_{c_2}(x) \text{ для } y = c_2, & \text{где } f_{c_2} \in O_1 \\ f_{c_1,c_2}(x) \text{ для остальных } y, & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_4 \end{cases}$$

$N_{4.2} = \{[g_{c_1,c_2,c_3}] \mid c_1, c_2, c_3 \in A, c_i \neq c_j\},$

$$g_{c_1,c_2,c_3}(y,x) = \begin{cases} f_{c_1,c_2}(x) \text{ для } y = c_1, & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_4 \\ f_{c_1,c_2}(x) \text{ для } y = c_2, & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_4 \\ f_{c_3}(x) \text{ для } y = c_3, & \text{где } f_{c_3} \in O_1 \end{cases}$$

$N_{4.3} = \{[g_{c_1,c_2}] \mid c_1, c_2 \in A, c_1 \neq c_2\}$,

$$g_{c_1,c_2}(y,x) = \begin{cases} f_{c_1,c_2}(x) \text{ для } y = c_1, & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_4, \\ f_{c_1,c_2}(x) \text{ для } y = c_2, & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_4, \\ f_{c_2,c_1}(x) \text{ для остальных } y & \text{где } f_{c_2,c_1} \in O_4. \end{cases}$$

$N_{4.4} = \{[g_{c_1,c_2}] \mid c_1, c_2 \in A, c_1 \neq c_2\}$,

$$g_{c_1,c_2}(y,x) = \begin{cases} f_{c_1,c_2}(x) \text{ для } y = c_1, & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_4, \\ f_{c_1,c_2}(x) \text{ для } y = c_2, & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_4, \\ e(x) \text{ для остальных } y. \end{cases}$$

$N_{4.5} = \{[g_{c_1,c_2,c_3}] \mid c_1, c_2, c_3 \in A, c_i \neq c_j\}$,

$$g_{c_1,c_2,c_3}(y,x) = \begin{cases} f_{c_1,c_2}(x) \text{ для } y = c_1, & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_4, \\ f_{c_1,c_2}(x) \text{ для } y = c_2, & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_4, \\ f_{c_1,c_3}(x) \text{ для } y = c_3, & \text{где } f_{c_1,c_3} \in O_4. \end{cases}$$

$N_{4.6} = \{[g_{c_1,c_2}] \mid c_1, c_2 \in A, c_1 \neq c_2\}$,

$$g_{c_1,c_2}(y,x) = \begin{cases} f_{c_2}(x) \text{ для } y = c_1, & \text{где } f_{c_2} \in O_1, \\ f_{c_1,c_2}(x) \text{ для остальных } y, & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_4. \end{cases}$$

Лемма 3.3. Для минимальной алгебры $[f_{c_1,c_2}] \in K_{13}$ надминимальные неразложимые алгебры разбиваются на следующие попарно непересекающиеся классы:

$N_{13.1} = \{[g_{c_1,c_2}] \mid c_1, c_2 \in A,\ c_1 \neq c_2\}$,

$$g_{c_1,c_2}(y,x) = \begin{cases} f_{c_2,c_1}(x) \text{ для } y = c_1, & \text{где } f_{c_2,c_1} \in O_4, \\ f_{c_1,c_2}(x) \text{ для остальных } y, & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_4. \end{cases}$$

Лемма 3.4. Для минимальной алгебры $[f_{c_1,c_2,c_3}] \in K_{13'}$ надминимальные неразложимые алгебры разбиваются на следующие попарно непересекающиеся классы:

$N_{13'.1} = \{[g_{c_1,c_2,c_3}] \mid c_1, c_2, c_3 \in A,\ c_i \neq c_j\}$,

$$g_{c_1,c_2,c_3}(y,x) = \begin{cases} f_{c_1,c_2}(x) \text{ для } y = c_2, & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_4, \\ f_{c_3}(x) \text{ для } y = c_3, & \text{где } f_{c_3} \in O_1, \\ f_{c_3,c_2} \text{ для } y = c_1, & \text{где } f_{c_3,c_2} \in O_4. \end{cases}$$

Лемма 3.5. Для минимальной алгебры $[f_{c_1,c_2}] \in K_{14}$ надминимальные неразложимые алгебры разбиваются на следующие попарно непересекающиеся классы:

$N_{14.1} = \{[g_{c_1,c_2,c_3}] \mid c_1, c_2, c_3 \in A,\ c_i \neq c_j\}$,

$$g_{c_1,c_2,c_3}(y,x) = \begin{cases} f_{c_1,c_2}(x) \text{ для } y = c_2, & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_4, \\ f_{c_1,c_3}(x) \text{ для } y = c_3, & \text{где } f_{c_3} \in O_4, \\ f_{c_3,c_1}(x) \text{ для } y = c_1, & \text{где } f_{c_3,c_2} \in O_4. \end{cases}$$

$N_{14.2} = \{[g_{c_1,c_2,c_3}] \mid c_1, c_2, c_3 \in A, c_i \neq c_j\}$,

$$g_{c_1,c_2,c_3}(y,x) = \begin{cases} f_{c_1,c_2}(x) \text{ для } y = c_2, & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_4, \\ f_{c_2,c_3}(x) \text{ для } y = c_3, & \text{где } f_{c_2,c_3} \in O_4, \\ e(x) \text{ для } y = c_1. \end{cases}$$

Лемма 3.6. Для минимальной алгебры $[f_{c_1,c_2,c_3}] \in K_{15}$ надминимальные неразложимые алгебры разбиваются на следующие попарно непересекающиеся классы:

$N_{15.1} = \{[g_{c_1,c_2,c_3}] \mid c_1, c_2, c_3 \in A, c_i \neq c_j\}$,

$$g_{c_1,c_2,c_3}(y,x) = \begin{cases} f_{c_1,c_2}(x) \text{ для } y = c_3, & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_4, \\ f_{c_2}(x) \text{ для } y = c_2, & \text{где } f_{c_2} \in O_1, \\ e(x) \text{ для } y = c_1. \end{cases}$$

Лемма 3.7. Для минимальной алгебры $[f_{c_1,c_2,c_3}] \in K_{16}$ надминимальные неразложимые алгебры разбиваются на следующие попарно непересекающиеся классы: $N_{16.1} = \{[g_{c_1,c_2,c_3}] \mid c_1, c_2, c_3 \in A, c_i \neq c_j\}$,

$$g_{c_1,c_2,c_3}(y,x) = \begin{cases} f_{c_1,c_2}(x) \text{ для } y = c_3, & \text{где } [f_{c_1,c_2}] \in K_4, \\ f_{c_1,c_3}(x) \text{ для } y = c_2, & \text{где } [f_{c_1,c_2}] \in K_4, \\ e(x) \text{ для } y = c_1. \end{cases}$$

$$N_{16.2} = \{[g_{c_1,c_2,c_3}] \mid c_1, c_2, c_3 \in A, c_i \neq c_j\},$$

$$g_{c_1,c_2,c_3}(y,x) = \begin{cases} f_{c_1,c_2}(x) \text{ для } y = c_2, & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_5, \\ f_{c_1,c_3}(x) \text{ для } y = c_3, & \text{где } f_{c_1,c_2} \in O_5, \\ e(x) \text{ для } y = c_1. \end{cases}$$

7. ПРИМЕР НАДМИНИМАЛЬНЫХ АЛГЕБР

Продемонстируем применения выше сформулированных утверждений для вычисления множества надминимальных алгебр над конкретной минимальной алгеброй. В качестве примера найдем все надминимальные алгебры для алгебры $[g_{1,2}] \in K_4$. Для этого нам потребуется найти унарные операции из множества O_4. Затем, используя теорему 2, найдем операцию $g_{1,2}$, после чего, используя леммы 2.4 и 3.4, найдем классы $U_{4.1} - U_{4.6}$, $N_{4.1} - N_{4.6}$.

В качестве иллюстрации найдем все унарные операции из множества O_4, которое задано следующим образом:

$$O_4 = \{f_{c,d} \mid f_{c,d}(a) = a, f_{c,d}(b) = b, f_{c,d}(c) = d, \text{где } a \neq b, a \neq c, b \neq c, c \neq d \ \ a, b, c, d \in A\}.$$

Составим таблицу параметров a, b, c, d, входящих в определение O_4 (см. таблицу 2).

Таблица 2. Операции из O_4

a	b	c	d	$f_{c,d}$
1	2	4	1	(121)
1	2	4	2	(122)
1	4	2	1	(114)
1	4	2	4	(144)
2	1	4	1	(121)
2	1	4	2	(122)
2	4	1	2	(224)
2	4	1	4	(424)
4	1	2	1	(114)
4	1	2	4	(144)
4	2	1	2	(224)
4	2	1	4	(424)

Таким образом, получим 6 унарных операций: (121), (122), (114), (144), (224), (424). Используя полученные унарные операции из O_4 и определение из теоремы 2, получим бинарные операции, порождающие алгебры из K_4 (см. таблицу 3).

Таблица 3. Операции, порождающие алгебры из K_4

c_1	c_2	g_{c_1,c_2}
1	2	(224224224)
1	4	(424424424)
2	1	(114114114)
2	4	(144144144)
4	1	(121121121)
4	2	(122122122)

В качестве примера использования теоремы распишем получение бинарной операции $g_{1,2} \in K_4$ (из первой строчки таблицы 3):

$$g_{1,2}(y,x) = \begin{cases} f_{1,2}(x) \text{ для } y = 1, & \text{где } f_{1,2} \in O_4, \\ f_{1,2}(x) \text{ для } y = 2, & \text{где } f_{1,2} \in O_4, \\ f_{1,2}(x) \text{ для } y = 4 & \text{где } f_{1,2} \in O_4. \end{cases}$$

Результаты вычислений представлены в таблице 4.

Таблица 4. Получение операции $g_{1,2}$

y	x	$f(x)$	$g(y,x)$
1	1	$f_{1,2}(1) = 2$	$g_{1,2}(1,1) = f_{1,2}(1) = 2$
1	2	$f_{1,2}(2) = 2$	$g_{1,2}(1,2) = f_{1,2}(2) = 2$
1	4	$f_{1,2}(4) = 4$	$g_{1,2}(1,4) = f_{1,2}(4) = 4$
2	1	$f_{1,2}(1) = 2$	$g_{1,2}(2,1) = f_{1,2}(1) = 2$
2	2	$f_{1,2}(2) = 2$	$g_{1,2}(2,2) = f_{1,2}(2) = 2$
2	4	$f_{1,2}(4) = 4$	$g_{1,2}(2,4) = f_{1,2}(4) = 4$
4	1	$f_{1,2}(1) = 2$	$g_{1,2}(4,1) = f_{1,2}(1) = 2$
4	2	$f_{1,2}(2) = 2$	$g_{1,2}(4,2) = f_{1,2}(2) = 2$
4	4	$f_{1,2}(4) = 4$	$g_{1,2}(4,4) = f_{1,2}(4) = 4$

Найдем все разложимые надминимальные алгебры над $f_{1,2} = (224224224)$, используя лемму 2.4:

$U_{4.1} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_3}] \mid [g_{c_3}] \in K_1,\ c_3 \neq c_1\}$,

$U_{4.1} = \{[f_{1,2}, g_{c_3}] \mid [g_{c_3}] \in K_1,\ c_3 \neq 1\}$.

Составим таблицу параметров для нахождения g_{c_3} (см. таблицу 5).

Таблица 5. Параметры для нахождения g_{c_3}

c_1	c_2	c_3	g_{c_3}
1	2	2	(222222222)
1	2	4	(444444444)

Таким образом, в класс $U_{4.1}$ входят две алгебры:

$[f_{1,2}, g_2] = [(224224224), (222222222)]$,

$[f_{1,2}, g_4] = [(224224224), (444444444)]$.

Остальные алгебры получаются аналогичным образом:

$U_{4.2} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_1,c_3}] \mid [g_{c_1,c_3}] \in K_4,\ c_3 \neq c_2\}$,

$U_{4.2} = \{[f_{1,2}, g_{1,4}] \mid [g_{1,4}] \in K_4\} = [(224224224), (424424424)]$,

$U_{4.3} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_2,c_1}] \mid [g_{c_2,c_1}] \in K_4\}$,

$U_{4.3} = \{[f_{1,2}, g_{2,1}] \mid [g_{2,1}] \in K_4\} = [(224224224), (114114114)]$,

$U_{4.4} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_1,c_2}] \mid [g_{c_1,c_2}] \in K_{13}\}$,

$U_{4.4} = \{[f_{1,2}, g_{1,2}] \mid [g_{1,2}] \in K_{13}\} = [(224224224), (124124224)]$,

$U_{4.5} = \{[f_{c_1,c_2}, g_{c_1,c_2}] \mid [g_{c_1,c_2}] \in K_{12}\}$,

$U_{4.5} = \{[f_{1,2}, g_{1,2}] \mid [g_{1,2}] \in K_{12}\} = [(224224224), (124224224)]$.

Найдем все неразложимые надминимальные алгебры для $f_{1,2} \in K_4$ используя лемму 3.2.

$N_{4.1} = \{[g_{1,2}] \mid c_1, c_2 \in A, c_1 \neq c_2\} = [(222222224)]$, так как:

$$g_{1,2}(y,x) = \begin{cases} f_2(x) \text{ для } y = 1, & \text{где } f_2 \in O_1 & f_2 = (222), \\ f_2(x) \text{ для } y = 2, & \text{где } f_2 \in O_1 & f_2 = (222), \\ f_{1,2}(x) \text{ для остальных } y, & \text{где } f_{1,2} \in O_4 & f_{1,2} = (224). \end{cases}$$

Отсюда $g_{1,2} = (222222224)$.

Остальные алгебры получаются аналогичным образом:

$N_{4.2} = \{[g_{1,2,4}]\} = [(224224444)]$,
$N_{4.3} = \{[g_{1,2}]\} = [(224224114)]$,
$N_{4.4} = \{[g_{1,2}]\} = [(224224124)]$,
$N_{4.5} = \{[g_{1,2,4}]\} = [(224224424)]$,
$N_{4.6} = \{[g_{1,2}]\} = [(222224224)]$.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для решения поставленной задачи надминимальные алгебры бинарных операций ранга 3 были разбиты на два множества: разложимые и неразложимые. Для поиска неразложимых алгебр была сформулирована лемма 1 о свойстве операций, порождающих неразложимые надминимальные алгебры. Используя данное свойство, удалось найти 87 неразложимых алгебр над всеми минимальными алгебрами. Для поиска разложимых надминимальных алгебр использовались ранее полученные результаты о минимальных алгебрах из работы [1]. Всего было получено 474 разложимых надминимальных алгебр над всеми минимальными алгебрами. Также была сделана классификация минимальных и надминимальных алгебр, представленная в виде теоремы 2 и лемм.

Список литературы

1. *Еременко Д. А.* Минимальные алгебры бинарных операций ранга 3 // Компьютерные инструменты в образовании. 2020. № 1. С. 38–48.
2. *Яблонский С. И.* Функциональные построения в k-значной логике // Труды Математического института им. В. А. Стеклова, 1958. Т. 51. С. 5–142.
3. *Гниденко В. М.* Нахождение порядков предполных классов в трёхзнач-ной логике // Проблемы кибернетики. 1962. Вып 8. С. 341–346.
4. *Csakany B.* All minimal clones on three-element set // Acta Cybernetyca. 1983. Vol. 6. P. 227—237.
5. *Перязев Н. А.* Алгебры n-местных операций и мультиопераций // Материалы XV междунар. конф. «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения» (Тула, 28–31 мая 2018 г.). Тула: ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2018. С. 113–116.

Поступила в редакцию 10.11.2021, окончательный вариант — 16.12.2021.

Еременко Дмитрий Александрович, аспирант кафедры ВТ факультета компьютерных технологий и информатики СПбГЭТУ «ЛЭТИ», ✉ **er_92@list.ru**

Computer tools in education, 2021
№ 4: 72–87
http://cte.eltech.ru
doi:10.32603/2071-2340-2021-4-72-87

Upminimal Algebras of Binary Operations of Rank 3

Eremenko D. A.[1], Postgraduate, ✉ er_92@list.ru

[1]Saint Petersburg Electrotechnical University,
5, building 3, st. Professora Popova, 197376, Saint Petersburg, Russia

Abstract

The work is devoted to the study of the lattice of algebras of binary operations of rank 3 and finding the upminimal algebras of binary operations of rank 3. Upminimal algebras were divided into two classes: reducible algebras and irreducible algebras. The property of operations generating irreducible upminimal algebras was obtained. The use of this property made it possible to find all irreducible algebras of binary operations of rank 3. To search for reducible algebras, we used the previously obtained results on minimal algebras of binary operations of rank 3. The results of the work are presented in tabular form.

Keywords: *operations, lattice of algebras operations, upminimal algebras of operations.*

Citation: D. A. Eremenko, "Upminimal Algebras of Binary Operations of Rank 3," *Computer tools in education*, no. 4, pp. 72–87, 2021 (in Russian); doi:10.32603/2071-2340-2021-4-72–87

References

1. D. A. Eremenko, "Minimal Algebras of Binary Operations of Rank3," *Computer tools in education*, no. 1, pp. 38–48, 2020 (in Russian); doi: 10.32603/2071-2340-2020-1-38–48
2. S. V. Yablonskii, "Functional constructions in a k-valued logic," *Collection of articles on mathematical logic and its applications to some questions of cybernetics*, Moscow, USSR: Acad. Sci., vol. 51, pp. 5–142, 1958 (in Russian).
3. V. M. Gnidenko, "Nakhozhdenie poryadkov predpolnykh klassov v trekhznachnoi logike," *Problemy kibernetiki*, no. 8, pp. 341–346, 1962 (in Russian).
4. B. Csakany, "All minimal clones on three-element set," *Acta Cybernetyca*, vol. 6, pp. 227–237, 1983 (in Russian).
5. N. A. Peryazev, "Algebras of n-ary Operations and Multioperations," in *Proc. of XV Int. Conf. Algebra, Number Theory and Discrete Geometry: modern problems and applications, Tula, 28–31 May, 2018*, Tula, Russia: TGPU im. L. N. Tolstogo, 2018, pp. 113–116 (in Russian).

Received 10-11-2021, the final version — 16-12-2021.

Dmitry Eremenko, Postgraduate, Department of Computer Science and Engineering, Faculty of Computer Science and Technology, Saint Petersburg Electrotechnical University, ✉ er_92@list.ru