Компьютерные инструменты в образовании, 2020
№ 3: 5–55
УДК: 51, 510, 511, 512, 004, 003
http://cte.eltech.ru
doi:10.32603/2071-2340-2020-3-5-55

алгоритмическая математика и математическое моделирование

КОМПЬЮТЕР КАК НОВАЯ РЕАЛЬНОСТЬ МАТЕМАТИКИ. II. ПРОБЛЕМА ВАРИНГА*

Вавилов Н. А., доктор физико-математических наук, профессор,
✉ nikolai-vavilov@yandex.ru

[1]Санкт-Петербургский государственный университет,
14-я линия Васильевского острова, д. 29, 199178, Санкт-Петербург, Россия

Аннотация

В этой части я обсуждаю роль компьютера в современных исследованиях по аддитивной теории чисел, в первую очередь по классической проблеме Варинга. В своей исходной формулировке XVIII века эта проблема состоит в нахождении для каждого натурального k минимального $s = g(k)$ такого, что все натуральные числа n могут быть представлены как суммы k-х степеней неотрицательных целых чисел $n = x_1^k + \ldots + x_s^k$ в количестве s штук. В XIX веке был поставлен вопрос о поиске минимального $s = G(k)$ такого, что *почти все* n могут быть представлены в таком виде. В XX веке эта проблема была далее уточнена до вопроса нахождения $G(k)$ и точного списка исключений. Однако даже решение проблемы Варинга в исходной формулировке было [почти] завершено только в 1984 году при самом непосредственном использовании компьютеров. В настоящей статье задокументирована история этой классической задачи и ее решения, а также обсуждаются возможности использования этого материала в образовании и дальнейшие связанные с этим вопросы.

Ключевые слова: *суммы степеней, проблема Варинга, суммы квадратов, суммы кубов, суммы биквадратов, полиномиальная компьютерная алгебра, тождества Гильберта, круговой метод, метод подъема.*

Цитирование: Вавилов Н. А. Компьютер как новая реальность математики. II. Проблема варинга // Компьютерные инструменты в образовании. 2020. № 3. С. 5–55. doi: 10.32603/2071-2340-2020-3-5-55

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой и двух следующих частях я обсуждаю роль компьютера в современных исследованиях по аддитивной теории чисел, изучающей, как говорит само ее название, свойства целых чисел относительно сложения. Типичными классическими задачами аддитивной теории чисел являются:

— задачи о суммах делителей (начиная с известных более 2500 лет проблем о совершенных и дружественных числах),

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-29-14141: изучение взаимосвязи концептуальных математических понятий, их цифровых представлений и смыслов, как основы трансформации школьного математического образования.

— проблема Варинга о представлении натурального числа как суммы m-х степеней,
— проблема Гольдбаха о представлении натуральных чисел как сумм двух или трех простых

и различные вариации на эти темы, такие как проблема об аликвотных циклах, легкая проблема Варинга, смешанная проблема Варинга, проблема Варинга—Гольдбаха, проблемы о представлении чисел другими формами высших степеней, суммами степеней и простых и т. д.

В отличие от мультипликативной теории чисел, которая уже в XIX веке оформилась в огромную самостоятельную науку, занимающую одно из центральных мест в математике, аддитивная теория чисел до недавнего времени представляла собой хаотическое нагромождение тонких наблюдений, хитрых трюков и искусственных приемов, и сегодня мы почти столь же далеки от решения многих основных задач этой теории, как 2500 лет назад.

Есть довольно широко распространенная точка зрения, что мы просто мучаем себя подобными бессмысленными вопросами. Например, Лев Давидович Ландау следующим образом комментировал гипотезу Гольдбаха: «Простые числа не нужно складывать, простые числа нужно умножать». Это бонмо неоднократно с одобрением цитировал Владимир Игоревич Арнольд[1].

Для контрбаланса стоит, однако, воспроизвести *прямо противоположное* мнение Леонарда Эйлера. Все мы читали, конечно, статью Вальтера Боро о дружественных числах [2]. Там цитируются (причем даже в оригинале!) слова Эйлера об аддитивной теории чисел. К сожалению, оригинальная цитата там с пропуском и обрывается на полуслове. Работая над настоящей статьей, я, естественно, должен был взглянуть оригинальный текст Эйлера 1772 года, где сформулирована гипотеза Варинга [128]. Пользуясь случаем, а случаи, как известно, бывают разные, я решил найти и полную цитату о дружественных числах. Посмотрев две другие работы Эйлера с тем же названием [126, 127], тоже крайне небезынтересные, я с удивлением обнаружил цитату из лекции Боро в первом томе его посмертных работ [128], прямо рядом с формулировкой гипотезы Варинга.

Я настолько впечатлился *актуальностью* того, что там обсуждается, что воспроизведу здесь целиком § 1 из посмертной заметки Эйлера “De numeris amicabilibus” [128, p. 85]. Мне кажется, следовало бы снова вернуть этот отрывок в текущий дискурс, чтобы каждый мог сам решить, что *Эйлер* думал о “полезном и бесполезном”. В следующей статье этой серии я вернусь к обсуждению основной темы этого отрывка и ее практическим импликациям:

“Inter omnia problemata, quae in mathesi tractari solent, nunc quidem a plerisque nulla magis sterilia atque ab omni usu abhorrentia existimantur, quam ea, quae in contemplatione naturae numerorum et divisorum investigatione versantur. In quo judicio hodierni mathematici a veteribus non mediocriter dissentiunt, qui hujusmodi speculationibus multo majus pretium constituere sunt soliti. Etsi enim Veteres non ignoraverunt ex indagatione naturae numerorum parum utilitatis ad eam matheseos partem, quae applicata vocari solet, et in investigatione rerum ad physicam potissimum pertinentium est posita: tamen nihilominus in scrutandis numerorum proprietatibus multum studii et laboris consumserunt. Praeterquam enim, quod ipsis investigatio veritatis per se laudabilis atque humana cognitione digna videretur, probe etiam senserunt his

[1] Как бы я ни относился к этой фразе по существу и как бы ни восхищался ей в контексте эпохи *как произведением искусства*, замечу, что объективность и такт не являлись сильными сторонами творчества Льва Давидовича и Владимира Игоревича и, главное, *не входили в их эстетические задачи*. Но *самое* смешное здесь все-таки то, что эта фраза украдена у Харди “It is natural to *multiply* primes and unnatural to *add* them”, [139, p. 12]. Но у Харди эта фраза имеет конкретный *смысл* и используется для объяснения различия между ролью степенных рядов в аддитивной теории чисел и рядов Дирихле в мультипликативной теории чисел.

rebus ipsam artem inveniendi mirum in modum ampliflcari, mentisque facultates ad graviora negotia expedienda aptiores reddi. Neque etiam ipsos in hac opinione deceptos fuisse, summa incrementa, quibus analysis ab his temporibus est locupletata, manifesto testantur; maxime enim verisimile videtur hanc scientiam nunquam ad tantum perfectionis gradum perventuram fuisse, nisi Veteres tantum studium in hujusmodi quaestionibus evolvendis, quae hodie ob sterilitatem tantopere a plerisque contemnuntur, collocavissent. Hincque eo minus dubitare licet, quin his rebus ulterius excolendis etiam in posterum analysi insignia incrementa afferantur."[2]

В разных формулировках Эйлер неоднократно возвращается к этой мысли и в других местах. Так, например, в первом абзаце [126] он пишет "Verum tamen certe investigatio proprietatum numerorum saepenumero multo majorem sagacitatem requirit quam subtilissimae quaestiones geometricae. . . " = «Совершенно несомненно, что исследование свойств чисел часто требует гораздо большей проницательности, чем самые тонкие геометрические вопросы . . . ».

Кроме всех прочих, математика имеет также историческое и спортивное измерения, задачи такого рода позволяют легко проверять, являются ли сегодняшние идеи более мощными и продуктивными, сегодняшняя техника более гибкой и рафинированной, и как выросли наши вычислительные возможности. Очевидно, что здесь роль компьютеров двоякая. С одной стороны, они позволяют легко проводить эксперименты, в результате которых каждый школьник может формулировать гипотезы, сбор экспериментальных материалов для которых раньше занимал недели, месяцы, иногда годы. С другой стороны, они позволяют проводить рекордные вычисления, заведомо недоступные в таком объеме математикам предшествующих веков.

Аддитивная теория чисел с понятными ребенку формулировками и в то же время чрезвычайно сложными доказательствами и поражающими воображение оценками предоставляет чрезвычайно обильный материал, где можно зримо наблюдать и сравнивать усилия многих поколений математиков и вычислителей. В этой первой части и ее продолжении я проиллюстристрирую оба упомянутых выше явления на примере различных вариантов классической задачи Варинга о представлении натуральных чисел в виде сумм степеней.

Здесь я не пытаюсь дать сколь-нибудь систематический обзор литературы по аддитивной теории чисел или хотя бы по проблеме Варинга и ее вариантам и обобщениям — это и невозможно было бы сделать в рамках журнальной статьи. К счастью, имеются несколько чрезвычайно полных обзоров, прекрасно покрывающих все основные работы, опубликованные до 2000 года. Если говорить про книги, то это, прежде всего, Глава 25

[2] Наверняка существуют профессиональные филологические переводы этого фрагмента. Но, поскольку мне они неизвестны, ограничусь собственным литературным пересказом: «Из всех проблем, которые рассматриваются в математике, сегодня нет таких, которые большинство считало бы более бесплодными и лишенными каких-либо приложений, чем проблемы, связанные с размышлением о природе чисел и изучением их делителей. Это мнение современных математиков серьезно расходится с воззрениями древних, которые придавали гораздо большее значение исследованиям такого рода. Хотя Древние [именно так, у Эйлера с большой буквы!] не пренебрегали и изучением природы чисел для использования в тех разделах математики, которые можно назвать прикладными и которые в высшей степени полезны для изучения физической реальности [rerum ad physicam], они вкладывали, тем не менее, много рвения и усилий и в детальное изучение свойств чисел как таковых. Они считали похвальными и достойными человеческого познания поиски истины сами по себе, но, кроме того, они полагали, что при этом чудесным образом усиливается изобретательность и способность ума решать все более сложные задачи. И, в конечном счете, есть совершенно ясные свидетельства, что они не только не ошибались в этом отношении, но что в наше время исследования в этом направлении следует расширить. Кажется в высшей степени правдоподобным, что наука никогда не достигла бы такой степени совершенства, если бы Древние не вложили столько рвения [studium] в такого рода вопросы, которые сегодня многие презирают ввиду их [мнимой] бесплодности. Еще менее следует сомневаться в том, что также и дальнейшее изучение этих вещей приведет к великолепному прогрессу в будущем».

во 2-м томе истории Леонарда Диксона [112], конспективно, но энциклопедически описывающая классический период, примерно до конца 1910-х годов, и книга Владыслава Наркевича[3] [198],[4] столь же энциклопедически покрывающая 1920-е, 1930-е и последующие годы. Есть и много других книг, содержащих разделы, посвященные проблеме Варинга, и соответствующую библиографию, отмечу, в частности, классические тексты Харди и Райта [147], Хуа Локена [154], Вацлава Серпиньского [226] и предыдущие книги Наркевича [195, 196]. С точки зрения метода Харди—Литтлвуда, проблема Варинга изложена в книге Роберта Вона[5] [235], а с точки зрения метода Виноградова, — в учебнике Анатолия Алексеевича Карацубы[6] [165].

Если говорить про статьи, то это замечательный обзор Уильяма Эллисона[7] [123], где можно найти *систематизированные* ссылки на основные работы периода 1909–1970 годов и доступное изложение основных идей алгебраического, аналитического и элементарного доказательств теоремы Варинга, а также формулировку Диксона *идеальной* теоремы Варинга. Это обзор Анатолия Алексеевича Карацубы [166], прекрасно описывающий вклад советских математиков. Это превосходный обзор Коичи Кавада[8] [168], посвященный именно борьбе за константы Варинга $g(k)$, который теперь доступен в английском переводе, и статья Рамачандрана Баласубраманиана[9] [41] описывающая (совершенно небанальный!) вклад в это дело индийских математиков. И, наконец, это обзор Роберта Вона и Тревора Вули[10] [236], содержащий чрезвычайно полную библиографию по всем *аналитическим* аспектам теории и историю борьбы за оценки констант $G(k)$ и $G^+(k)$, а также детальное обсуждение *вариантов* проблемы Варинга.

Настоящая статья имеет не научный и не исторический, а именно *методологический* и *методический* характер. Цель ее троякая:

- Обрисовать и задокументрировать основные этапы полного[11] решения *исходной* проблемы Варинга и роль в нем алгебры, анализа и вычислений.
- Привлечь внимание к *широчайшим* возможностям использования этого материала (и различных его вариантов и обобщений!) в образовании.
- Сформулировать несколько связанных с проблемой Варинга задач **полиномиальной компьютерной алгебры** — и не только.

[3] http://www.math.uni.wroc.pl/~narkiew/

[4] Чтобы дать представление об объеме литературы в этой области, отмечу, что библиография только в этой книге — а это только один из его томов истории теории чисел в новое время — состоит из 6849 наименований. По поводу другой его книги [197], где библиография тоже вполне серьезная, около 150 страниц на 8 пунктов, Марк Шейнгорн замечает: “It is amazing that a single individual largely unaided by electronic databases could have produced this volume.” В 1979–1980 годах я проходил стажировку (как бы сейчас сказали, постдок) под руководством Владыслава Наркевича во Вроцлавском университете, видел, как он работает, и могу подтвердить, что он, несомненно, все эти тексты держал в руках, пропустил через себя и осознал.

[5] http://personal.psu.edu/rcv4/

[6] https://ru.wikipedia.org/wiki/Карацуба,_Анатолий_Алексеевич

[7] https://en.wikipedia.org/wiki/William_J._Ellison

[8] На с. 10–11 https://www.iwate-u.ac.jp/upload/images/frontier-research01_english.pdf (“useful for nothing”) Коичи прямо сравнивает аддитивную теорию чисел со спортом: This type of research is done on purpose to explore itself, and probably it will never serve anything else. In fact, this research is not aimed at being useful for something. For example, even if someone could succeed in sprinting 100m in 9.57 seconds, this feat itself would contribute no actual profit directly to our daily lives and society. Still sprinters work hard to attain better records, and those who are interested in it enjoy their new records with admiration. They may present no significance to those who are not interested. It might sound rather arrogant to compare my research with it, but I personally feel some similarity between them.

[9] https://en.wikipedia.org/wiki/Ramachandran_Balasubramanian

[10] https://www.math.purdue.edu/~twooley/

[11] Формально она и сегодня решена только на 99,9999%, но все верят, что в 1984 году поставлена последняя точка, после этого решалась уже задача сформулированная в XIX веке.

Поэтому я включаю в библиографию только несколько ключевых классических текстов и работы алгебраического и вычислительного плана, которые непосредственно цитируются в тексте, в основном относящиеся к *тождествам*, на которых основано доказательство Гильберта, и недавней *компьютерной* борьбе за константы Варинга $g(k)$ и $G(k)$.

2. ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ КАК ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

Мое собственное отношение к адди[к]тивной теории чисел сложнее передать одной фразой, и я отложу это до части, посвященной проблеме Гольдбаха. В то же время, абсолютно независисимо от всех остальных соображений, я считаю теорию чисел *идеальным* материалом для преподавания математики на *любом* уровне, начиная с *младших* классов школы. Основания такой точки зрения очевидны каждому практикующему математику.

• Материал, которым оперирует теория чисел, хорошо известнен и интересен сам по себе и апеллирует к естественному любопытству и любознательности. Она связана с огромным *общекультурным* пластом, ее легко иллюстрировать текстами, музыкальными произведениями и артефактами многих тысячелетий, играми и головоломками, примерами из жизни и т. д.

• Теория чисел имеет огромное *историческое* измерение. Вполне содержательные результаты в этой области были получены еще в классической древности и в эпоху эллинизма, а также древними китайскими и индийскими, средневековыми иранскими математиками и т. д. Не говоря уже про ее расцвет в классическую эпоху европейской математики, начиная с Ферма, Эйлера и Лагранжа [249].

• На элементарном уровне можно *сформулировать* как многие содержательные и важные результаты, так и многие классические проблемы теории, как решенные, так и открытые. Более того, в отличие от геометрии, многие основные результаты могут быть вполне строго *доказаны* на элементарном уровне, с минимумом технических пререквизитов.

Я считаю, что *традиционное* понятие математического доказательства имеет огромное *общекультурное* значение, и овладение культурой доказательных рассуждений является одной из главных целей — может быть вообще главной целью! — изучения математики в школе. Теория чисел (а также некоторые элементарные разделы алгебры и комбинаторики) позволяет проводить элементарные, короткие но вместе с тем абсолютно строгие доказательства, хорошо иллюстрирующие все основные общепринятые методы математических рассуждений[12].

• Теория чисел самым естественным образом связана со многими областями математики: алгеброй, геометрией, анализом (вещественным, комплексным, гармоническим, . . .), комбинаторикой, теорией вероятностей, теоретическими компьютерными науками и т. д. Она естественно готовит и к введению более общих алгебраических понятий: группы, кольца, поля, решетки (и в смысле Verband и в смысле Gitter) и т. д. И действительно, исторически теория чисел была одним из источников возникновения этих понятий и одним из главных полигонов их использования.

[12] Я не предлагаю перестать преподавать геометрию в школе, я всего лишь предлагаю перестать называть то, что рассказывается в элементарных курсах геометрии, доказательствами. Строгое изложение эвклидовой геометрии в синтетическом духе возможно, но никто этого не делает, потому что это приведет к абсолютно нечитаемым текстам. Доказательства, относящиеся к площадям и объемам, заведомо не могут быть удовлетворительно изложены на школьном уровне. Нужно просто честно признать, что школьная геометрия геометрией не является, первое назывется линейной алгеброй, а второе — теорией меры. Чтобы рассказывать вменяемые доказательства, так это и нужно излагать. Кстати, тогда может быть и в школе.

• С предыдущим пунктом связано то, что теория чисел могла бы служить *сквозным* курсом, объединяющим все ступени преподавания математики, со стилем изложения, отвечающим достигнутому общематематическому уровню. Например, в школе асимптотический закон распределения простых или теорема Дирихле о простых в арифметической прогрессии могли бы сообщаться как *экспериментальные факты*. А в университетском курсе рассказываться уже с доказательствами как прекрасные иллюстрации мощи и техники вещественного и [особенно!!] комплексного анализа.

• Раннее изучение теории чисел позволило бы преодолеть одно из абсолютно *катастрофических* явлений современности — непонимание сравнительного размера чисел. До эпохи толерантности было принято иронизировать над “дикарями”, которые считают “один, два, три, много”. Позволю себе заметить, что современные “культурные” люди, то есть подавляющее большинство людей с “гуманитарным” высшим образованием и журналистов[13], которые не чувствуют различия между 10^6 и 10^9, в принципе ничем от них не отличаются. По-английски это явление называется **innumeracy** = незнание чисел, по аналогии с *illiteracy* — незнание букв, неграмотность[14].

• Теория чисел дает широчайший простор для составления задач и контрольных заданий любого формата и любого уровня сложности, включая как элементарные, так и вполне серьезные исследовательские темы для *самостоятельного экспериментирования*, в том числе с использованием компьютеров, графических методов и т. д.

• Теория чисел, вопреки известному мнению Харди [139, 140], стала сегодня одной из важнейших областей математики именно с точки зрения *реальных*[15] приложений. Это относится и к разработке рекордных на сегодня алгоритмов вычислений с большими числами и ко всем аспектам хранения, обработки и передачи информации, включая кодирование и криптографию (протоколы связи, защита информации, в том числе экономической и финансовой, и т. д.)

В качестве скромного эксперимента в этом направлении в 2004 году мы с Владимиром Георгиевичем Халиным ввели изучение теории чисел в программу обучения студентов-экономистов[16] СПбГУ, в рамках курса «Математика и Компьютер».

Мы начинали с изложения с доказательствами некоторого абсолютного минимума элементарной теории чисел: делимость, деление с остатком, модулярная арифметика, алгоритм Эвклида, китайская теорема об остатках, простые числа, основная теорема арифметики, теорема Эвклида о бесконечности числа простых и т. д.

Следующий слой базовых фактов рассказывался уже более бегло, в основном в виде компьютерных экспериментов или же с фрагментами доказательств и эвристическими соображениями. Эта часть могла чуть меняться от года к году, туда входили, например,

[13] Да чего там, часто даже вполне квалифицированных ученых и инженеров за пределами своей прямой специальности.

[14] “. . . innumeracy refers to numbers and arithmetical manipulations in the same kind of way that illiteracy refers to letters and reading. The problem of innumeracy, then, is that there seem to be many people who are unable to cope with numbers, in a manner quite strikingly analogous to the way in which there are quite a few people who are unable to read” [129].

[15] А не *мнимых*, как у многих разделов *прикладной* математики — “pure mathematics is on the whole *distinctly* more useful than applied” [140].

[16] К сожалению, пока не всех, а только тех, кто специализируется по информационным системам в экономике, то есть именно тех, кому в дальнейшем придется заниматься серьезными компьютерными вычислениями, в частности, связанными с хранением, обработкой и защитой информации.

теорема Банга—Жигмонди[17], простые Мерсенна и Ферма, асимптотический закон распределения простых и теорема Дирихле о простых в арифметической прогрессии[18], теоремы Ферма и Эйлера, псевдопростота и тесты простоты, символ Лежандра и квадратичный закон взаимности, и т. д.

В настоящее время я подготовил миникурс по проблеме Варинга, но хотел бы вначале опробовать его на *продвинутых* школьниках, скажем, в «Сириусе», сопроводив, его, как и предыдущий такой курс там, посвященный базисам Гребнера, компьютерным практикумом.

3. СУММЫ КВАДРАТОВ

В настоящем параграфе я воспроизведу с разрешения Володи Халина посвященный суммам квадратов § 5 Главы 8 из нашего задачника [7], который не вошел в [9]. Очевидно, какое влияние на стиль подачи материала оказала уже упоминавшаяся в [5] книга Олега Иванова [22]. Это сделано с тем, чтобы показать, в каком стиле мы планировали обработать для использования в преподавании *на разных уровнях* остальные темы, о которых пойдет речь ниже, — и *частично* уже сделали это в [7, 8]. Кроме всех обычных учебников теории чисел и истории Диксона [112], где суммам квадратов посвящены страницы 225–325, упомяну два менее стандартных источника — статью Ральфа Арчибальда [34], содержащую интересную историческую трактовку этих задач, и книгу Пита Кларка[19] [62], где приведено несколько новых простых доказательств.

3.1. Суммы двух квадратов

Начнем с сумм двух квадратов. Эта тема фактически восходит к «Арифметике» Диофанта [20]. Ответ на вопрос о представимости числа как суммы двух квадратов был сформулирован Ферма и доказан Эйлером.

Задача. Рассмотрев примеры $p \leqslant 1000$, найдите те простые числа, которые нельзя представить как суммы двух квадратов целых (или, что в данном случае то же самое, натуральных) чисел.

Простое число p можно представить как сумму двух квадратов натуральных чисел, в точности когда $p = 2$ или $p = 4m + 1$ для некоторого m. Необходимость этого условия очевидна, а достаточность — и в действительности более точное утверждение о количестве представлений таких p в виде $x^2 + y^2$ — известны с XVII века. Как считается, утверждение о *существовании* таких представлений впервые сформулировал в 1621 году Клод-Гаспар Баше, в связи со своим переводом Диофанта на латынь. А утверждение об их *количестве* — Пьер де Ферма 25 декабря 1640 года в письме к Марину Мерсенну. В простейшем виде этот факт, традиционно называемый **теоремой Ферма**, утверждает, что для любого простого вида $p = 4m + 1$ найдутся такие $x, y \in \mathbb{N}$, что $p = x^2 + y^2$. Это проще всего доказать с помощью целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}[i] = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$, как это делал Дедекинд, или с помощью теоремы Минковского о выпуклом теле. Мне не кажется, что доказательство Дедекинда находится сегодня за пределами понимания среднего российского ученика 7–8 класса. Однако 80 лет назад Харди думал иначе. Вот что он говорит по этому поводу:

[17] В старинных учебниках теории чисел она чаще называется теоремой Биркгофа—Вандивера, которые переоткрыли ее в 1904 году на английском языке.

[18] И то и другое, естественно, без каких-либо аналитических доказательств, именно как *экспериментальные факты*.

[19] На его личной странице http://alpha.math.uga.edu/~pete/expositions2012.html выложены десятки учебных текстов по очень щирокому спектру тем алгебры, теории чисел и алгебраической геометрии.

“Another famous and beautiful theorem is Fermat’s ‘two square’ theorem. The primes may (if we ignore the special prime 2) be arranged in two classes; the primes $5, 13, 17, 29, 37, 41, \ldots$ which leave remainder 1 when divided by 4, and the primes $3, 7, 11, 19, 23, 31, \ldots$ which leave remainder 3. All the primes of the first class, and none of the second, can be expressed as the sum of two integral squares: thus $5 = 1^2 + 2^2$, $13 = 2^2 + 3^2$, $17 = 1^2 + 4^2$, $29 = 2^2 + 5^2$, but 3, 7, 11, and 19 are not expressible in this way (as the reader may check by trial). This is Fermat’s theorem, which is ranked, very justly, as one of the finest of arithmetic. Unfortunately, there is no proof within the comprehension of anybody but a fairly expert mathematician.” [157, p. 20–21].

Я не знаю, какие доказательства Харди имел в виду: доказательства ли Эйлера и Лагранжа, основанные на теории квадратичных форм (или их обработку Гауссом в Disquisitiones Arithmeticae), доказательства Дедекинда или что-то еще, но время не стоит на месте, и теперь мы можем дать доказательство, доступное ученику 5–6 класса. Вот это замечательное **доказательство Цагира**[20] [257]. Рассмотрим множество

$$X = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{N}, x^2 + 4yz = p\}.$$

Легко видеть, что отображение $h : X \longrightarrow X$, заданное посредством

$$(x, y, z) \mapsto \begin{cases} (x + 2z, z, y - x - z), & \text{если } \ x < y - z, \\ (2y - x, y, x - y + z), & \text{если } \ y - z < x < 2y, \\ (x - 2y, x - y + z, y), & \text{если } \ 2y < x, \end{cases}$$

является инволюцией (проверьте!). Ясно, что для *простого* $p = 4m + 1$ у этой инволюции *ровно* одна неподвижная точка на X, а именно $(1, 1, m)$, — а для непростого p это нужно еще доопределять до инволюции! Но тогда инволюция $g : X \longrightarrow X$, $(x, y, z) \mapsto (x, z, y)$, тоже имеет *хотя бы одну* неподвижную точку (x, y, y) — это очевидное утверждение известно как **принцип инволюций**. Таким образом $p = x^2 + 4y^2$, как и утверждалось.

Если Вам кажется, что это доказательство неконструктивно, то это не так. В статье [192] объясняется, как превратить его в алгоритм. В книге Айгнера и Циглера [1] приводится еще одно современное доказательство, почти столь же простое.

Ферма на этом не остановился и 25 сентября 1654 года в письме к Блезу Паскалю сформулировал аналогичные результаты для других бинарных квадратичных форм. В частности, **теорему Ферма—Эйлера**, утверждающую, что простое p тогда и только тогда предствляется как $p = x^2 + 2y^2$, когда p имеет вид $p = 8l + 1$ или $p = 8l + 3$. Совсем простое доказательство этой теоремы в таком же духе приведено в заметке Александра Ивановича Генералова[21] [134], но это все же для математического кружка, а не для общеобразовательной школы.

Примарные числа вида p^2, где $p = 4m + 3$, очевидно являются суммами двух квадратов *целых* чисел, $p^2 = p^2 + 0^2$. То, что произведение двух чисел, каждое из которых представимо как сумма двух квадратов, тоже представимо как сумма двух квадратов, вытекает из из следующей формулы

$$(u^2 + v^2)(x^2 + y^2) = (ux - vy)^2 + (uy + vx)^2,$$

выражающей мультипликативность модуля комплексного числа. Разумеется, само это тождество было известно еще Диофанту, до всяких комплексных чисел.

[20] http://www.mpim-bonn.mpg.de/node/97

[21] http://www.mathnet.ru/php/person.phtml?option_lang=rus&personid=23205

Задача. Найдите все числа $n \leqslant 1000$, которые можно представить как сумму двух квадратов *натуральных* чисел. Сформулируйте ответ в общем случае.

Прямоугольный треугольник с целыми длинами сторон называется **пифагоровым**. Как мы только что убедились, n в том и только том случае является длиной гипотенузы пифагорова треугольника, когда n делится на какое-то простое вида $4m+1$.

Задача. Найдите все числа $n \leqslant 1000$, которые можно представить как сумму двух квадратов *взаимно простых* натуральных чисел. Сформулируйте ответ в общем случае.

3.2. Суммы трех квадратов

Ответ на аналогичный вопрос для сумм трех квадратов без эксперимента угадать уже чуть сложнее.

Задача. Найдите все числа $n \leqslant 1000$, которые нельзя представить как сумму трех квадратов целых чисел.

Получившийся список показывает, что натуральное число n в том и только том случае не может быть представлено как сумма трех квадратов, когда n имеет вид $n = 4^k(8m+7)$ для некоторых $k, m \geqslant 0$. Это действительно так и называется **теоремой Лежандра** о трех квадратах. Первые числа, которые нельзя представить в таком виде, это $7, 15, 23, 28, 31, 39, 47, 55, 60, 63, 71, \ldots$

Теорема Лежандра — уже несколько более трудный факт, по нашим сегодняшним понятиям все-таки скорее для первого университетского курса теории чисел, чем для школьного курса[22]. Это связано в том числе с тем, что ввести на тройках вещественных чисел структуру, аналогичную комплексным числам или кватернионам, невозможно.

Задача. Докажите, что в кольце многочленов $R = \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3]$ не существует таких f, g, h, что
$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = f^2 + g^2 + h^2.$$

К сожалению, арифметика кватернионов помогает здесь мало. С другой стороны, как заметил в 1922–1929 годах Борис Алексеевич Венков [10], она позволяет сразу вывести из теоремы Лежандра более общую **теорему Гаусса** о *количестве* таких представлений в терминах числа классов *бинарных* квадратичных форм, см. [27].

Задача. Верно ли, что любое число вида $n = 8m+3$, где $m \geqslant 0$, можно представить как сумму трех квадратов нечетных чисел?

В следующей задаче предлагается узнать, чему не может равняться длина диагонали прямоугольного параллелепипеда, длины сторон которого целые числа.

Задача. Найдите все числа n, для которых n^2 нельзя представить как сумму *трех* квадратов натуральных чисел.

3.3. Суммы четырех квадратов

Еще в «Арифметике» Диофанта высказано предположение, что *каждое* натуральное число является суммой четырех квадратов *целых* чисел $n = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$. Иными словами, допускается, что некоторые из x_i могут равняться нулю. Важные продвижения

[22] Доказательство Дирихле, конечно, *совсем* элементарное, но все равно предполагает знакомство с теорией квадратичных форм, теоремой о простых в арифметических прогрессиях и квадратичный закон взаимности. См. по этому поводу замечательную статью Пола Поллака и Питера Шорна [214], где доказательство Дирихле превращено в алгоритм и подробно обсуждаются также другие доказательства.

в направлении доказательства этого предположения были получены Ферма и Эйлером, а в 1770 году Лагранж нашел полное доказательство утверждения о представимости любого натурального числа как суммы четырех квадратов. Это утверждение обычно называется **теоремой Лагранжа**.

Задача. Проверьте теорему Лагранжа для всех $n \leqslant 3000$.

Теорема Лагранжа утверждает, что каждое натуральное число есть норма целого *липшицева* кватерниона (*собственно* целого, на языке Венкова и Линника). Мультипликативность нормы кватернионов $N(zw) = N(z)N(w)$ называется обычно **тождеством Эйлера**. В координатной форме это тождество имеет вид

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)\cdot(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2) = (x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-x_4y_4)^2+$$
$$(x_1y_2+x_2y_1+x_3y_4-x_4y_3)^2+(x_1y_3-x_2y_4+x_3y_1+x_4y_2)^2+(x_1y_4+x_2y_3-x_3y_2-x_4y_1)^2$$

и означает, что произведение двух сумм четырех квадратов $x_1^2+x_1^2+x_3^2+x_4^2$ и $y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2$ снова является суммой четырех квадратов $z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2$, причем z_i линейны по x_i и по y_i. Согласно тождеству Эйлера, достаточно научиться представлять как суммы четырех квадратов все *простые* числа. Этот факт сегодня тоже проще всего доказывать через кватернионы, как это делает, например, Юрий Владимирович Линник [185].

Следующие задачи уже чуть другого уровня, их мы обычно предлагали на дом.

Задача. Найдите все числа n, которые нельзя представить как суммы четырех *различных* квадратов целых чисел.

Теорема Якоби утверждает, что в действительности количество различных представлений числа в виде суммы четырех квадратов целых чисел равно $8\sigma^*(n)$, где $\sigma^*(n)$ есть сумма тех делителей числа n, которые не делятся на 4. Например, число 1 имеет 8 таких представлений, так как в равенстве $1 = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$ любая из переменных может принимать значение ± 1, а остальные значение 0.

Задача. Проверьте теорему Якоби для всех $n \leqslant 1000$.

Задача. Найдите все числа n, которые нельзя представить как суммы пяти квадратов *натуральных* чисел.

4. ПРОБЛЕМА ВАРИНГА: ФОРМУЛИРОВКА

4.1. Формулировка гипотезы

В том же 1770 году во втором издании своей книги «Алгебраические медитации» = “Meditationes Algebraicae”[23] английский математик Эдвард Варинг высказал следующее предположение: “Omnis integer numerus vel est cubus, vel e duobus, tribus, 4, 5, 6, 7, 8, vel novem cubis compositus, est etiam quadrato-quadratus vel e duobus, tribus, &c. usque ad novemdecim compositus, & sic deinceps” = «Каждое целое[24] число или само является кубом или суммой двух, трех, 4, 5, 6, 7, 8, или девяти кубов, а также квадрат-квадратом или суммой двух, трех, ..., вплоть до девятнадцати таковых, и так далее» (эта фраза воспроизведена и в издании 1782 года, [241, p. 349], но там к ней есть важное добавление).

[23] Впрочем, первое издание 1762 года носило название «Аналитическая смесь» = “Miscellanea Analytica”.

[24] Он, конечно, имеет в виду *натуральное*. Заменив здесь натуральные числа на целые и/или суммы на суммы со знаками, мы получим так называемую “легкую проблему Варинга”, которая оказалась с вычислительной точки зрения намного сложнее, чем исходная. О ней пойдет речь в следующей части.

Иными словами, речь здесь идет о следующем обобщении теоремы Лагранжа о сумме квадратов: любое натуральное число представимо в виде суммы 9 кубов неотрицательных целых чисел, 19 четвертых степеней и т. д. Таким образом, в исходной формулировке Варинга речь идет о поиске *неотрицательных* целых $x_1, \ldots, x_s$, удовлетворяющих уравнению

$$x_1^k + x_2^k + \ldots + x_s^k = n.$$

Для фиксированного k наименьшее s такое, что это уравнение разрешимо при любом натуральном n, принято обозначать через $g(k)$. В начале XX века стало традиционным интерпретировать предположение Варинга как **проблему Варинга**, то есть вопрос о *существовании* такого $g(k)$.

Воспроизведу в иллюстративных целях совершенно волшебный фрагмент из статьи Обри Кемпнера [171], одного из непосредственных участников *Гильбертовской революции в математике*. Вот его буквальные слова: “Waring stated, without any attempt at proof, an extension to higher powers of the theorem that every number is equal to the sum of four non-negative squares. Waring’s statement is: *For every positive integral exponent k there exists a positive integer g_k, depending only on k, such that every positive integer is the sum of g_k or fewer positive kth powers*.” [171, p. 363]. При этом Кемпнер не какой-то левый человек, который говорит с чужих слов. Его диссертация выполнена в 1912 году в Геттингене под руководством Эдмунда Ландау и непосредственно посвящена проблеме Варинга *в исходной формулировке* [169, 170]. Именно на него ссылается Диксон в своей 25-й главе как на основного эксперта по *истории* проблемы Варинга ([112, p. 717], примечание к названию главы). Ясно, что здесь Кемпнер выражает Zeitgeist, то, как изменилось *понимание* математики между 1896 и 1909 годом — Анри Пуанкаре в своей лаудации [211] формулирует *теорему Варинга* примерно теми же словами.

К счастью, в то время не осознали еще необходимость редактировать сами исторические источники. Поэтому мне, вслед за Якоби [159][25] и самим Диксоном [112], кажется, что в действительности Варинг *на основе экспериментальных данных* утверждал нечто гораздо более точное, а именно что $g(3) = 9$, $g(4) = 19$ “и так далее” — значение $g(2) = 4$ уже было к тому моменту известно из теоремы Лагранжа.

В 1772 году Эйлер уточнил эту **гипотезу Варинга**, заметив, что следующие после 1, 4, 9 и 19 значения, это 37, 73, 143 и 279. Иными словами, он следующим образом расшифровал “и так далее” Варинга: каждое натуральное число представляется в виде суммы $\leqslant 37$ пятых степеней, суммы $\leqslant 73$ шестых степеней, суммы $\leqslant 143$ седьмых степеней и суммы $\leqslant 279$ восьмых степеней натуральных чисел [128, с. 203–204]. В действительности, там же Эйлер приводит и *гипотетическую* общую формулу, в современных обозначениях

$$g(k) = 2^k + \left\lfloor \left(\frac{3}{2}\right)^k \right\rfloor - 2,$$

замечая, что это *минимальное* количество слагаемых, для которого такое представление в принципе могло бы быть возможно: “...ubi pro $3^n/2^n$ numerus integer proxime minor capi debet”.

[25] Статья Якоби 1851 года [159] начинается *буквально* следующей фразой: «В “Алгебраических Медитациях” Варинга... *сформулирована теорема*, что каждое число является суммой не более, чем 9 (целых положительных) кубов, не более, чем 19 (целых) биквадратов». Full stop — пройдите по ссылке, чтобы убедиться! Никаких “и так далее”. При этом Якоби ссылается на страницу 349 издания 1782 года. Из серии — не верьте никому на слово, а проверяйте все ссылки, чтобы знать, что у классиков на самом деле написано, и понимать, что они при этом имели в виду.

В самом деле, поделим 3^k на 2^k с остатком, $3^k = q \cdot 2^k + r$, где $1 \leqslant r \leqslant 2^k - 1$. Тогда наибольшее кратное 2^k, не превосходящее 3^k, равно $q \cdot 2^k$, и число $q \cdot 2^k - 1$ требует для своего представления $q-1$ слагаемых вида 2^k и $2^k - 1$ слагаемое вида 1^k, так что $g(k) \geqslant 2^k + q - 2$. Например, 7 требует 4 квадрата, 23 требует 9 кубов и 79 требует 19 *биквадратов*. Разумеется, q это то, что Эйлер обозначал просто $\frac{3^k}{2^k}$ — кстати, вполне осмысленная запись неполного частного для целей арифметики — и то, что сегодня обозначается $\left\lfloor \frac{3^k}{2^k} \right\rfloor$ или даже $\left\lfloor \left(\frac{3}{2}\right)^k \right\rfloor$.

И действительно, в издании 1782 года после слов "и так далее" Варинг заменяет точку на двоеточие и добавляет фразу в таком духе, но с оговоркой и *без указания точного количества слагаемых*: "consimilia etiam affirmari possunt (exceptis excipiendis) de eodem numero quantitatum earundem dimensionum" [241, p. 349][26]. Поэтому сам Диксон и те более поздние авторы, которые в теме, часто называют утверждение о *точном* значении $g(k)$ **гипотезой Эйлера**.

Однако тут уместно сказать то, что я до сих пор утаивал и без чего понять дальнейшую историю проблемы Варинга совершенно невозможно. Хотя эта заметка и опубликована в посмертных трудах *Леонарда* Эйлера [128], сам этот параграф и сформулированная в нем гипотеза имеют четкую аттрибуцию. Это наблюдение принадлежит *Иоганну Альбрехту* Эйлеру, старшему сыну Леонарда Эйлера, который вернулся с ним в 1766 году в Россию и жил на первом этаже знаменитого дома Эйлера на набережной.

4.2. Экспериментальная проверка

Начиная с 1835 года Якоби предлагал нескольким людям провести экспериментальную проверку *теоремы Варинга*: составить таблицы кубов, четвертых, пятых и шестых степеней и выяснить, сколько слагаемых фиксированной степени необходимо для выражения всех чисел до определенной границы.

Первым был Цорнов[27] *старший* преподаватель гимназии в Кнайпхофе[28]. В статье [258] он воспроизводит процитированный выше текст Варинга, который он называет *теоремой, предложенной без доказательства*, замечает, что смысл последней фразы несколько обскурен и тут же предлагает *обобщить* эту теорему, заменив в ней кубы и биквадраты на произвольные [вероятно, он имеет в виду примитивные целочисленные...] многочлены степеней 3 и 4. Основную часть работы составляет таблица чисел $n \leqslant 3000$ с указанием необходимого для их представления количества кубов — впрочем, по некоторым свидетельствам, это именно то место, до которого досчитал сам Варинг в 1770 году. На основе этой таблицы Цорнов делает неверное заключение "numerum quemlibet praeter 23 aut ex octo cubis aut e minore cuborum numero componi posse" и (возможно!) верное *предсказание* "certo limite transgresso, numeros omnes e quinque cubis aut minore cuborum numero componi".

[26] Я об этом впервые прочитал у Эллисона [123], удивился, почему обычно цитируется без этого добавления, и сверил с оригинальным текстом. Потом, конечно, заметил, что авторы XIX века цитируют не так, как современные, ставя точку после "и так далее", а с этой последней фразой. Перевод Викса "Similar laws may be affirmed for the correspondingly defined numbers or quantities of any degree", [241], представляется мне чудовищным анахронизмом. Независимо от перевода *eodem* как *correspondingly defined*, математики XVIII века не могли задаваться вопросом о *существовании* такого $g(k)$, они могли спрашивать, *чему равно* $g(k)$.

[27] Mathematical Reviews перечисляет две его работы, обе в J. Reine Angew. Math. Первая, геометрическая, 1833 года на французском, вторая [258], 1835 года, на латыни. К сожалению, ни в той, ни в другой не указано его полное имя, только инициал. Орлы из издательства de Gruyter, которому теперь принадлежит журнал, хотят за доступ к 3 страницам текста геометрической статьи 30 евро.

[28] Книпава, с весны 2016 года Остров Иммануила Канта в Калининграде.

Вторым был профессиональный *вычислитель*, знаменитый Захариас Дазе[29]. Его таблицы для кубов доведены до $n = 12000$ (что заняло у того, по словам Якоби, *несколько лет* = “einige Jahren”), обработаны, сданы в печать самим Якоби и опубликованы в 1851 году, в год его смерти. На основе этих вычислений Якоби повторяет предсказание Цорнова “alle Zahlen, welche eine gewisse Grenze übersteigen, die Summen von 5 oder weniger ganzen positiven Cuben sind”. Интересно, что при этом Якоби упоминает сами таблицы [258], но не их автора и не говорит, что эта гипотеза была уже тем сформулирована. Видимо, потому, что его таблицы содержали *многочисленные ошибки* = “mehrere Fehler”.

Эти вычисления были превзойдены только через полвека, когда в 1903 году Роберт Даублебски фон Штернек[30] довел вычисление до 40000, обнаружил, что все числа > 8042, до которых ему удалось досчитать[31], требуют *не больше* шести кубов — но все время продолжают встречаться числа, которые требуют именно шесть, — и сформулировал *гипотезу шести кубов*, которая, очевидно, верна, но, насколько мне известно, не доказана до сих пор.

В отличие от исходной гипотезы Варинга, утверждавшей, что $g(3) = 9$, которую доказали в 1909–1912 годах Виферих [253] и Кемпнер [169, 170], мы до сих пор мало приблизились к доказательству этих несравненно более трудных гипотез фон Штернека и Цорнова—Якоби, утверждающих, что $G(3) \leq 6$ или даже $G(3) \leq 5$, не говоря уже про сформулированную в 1920 годы гипотезу Вестерна $G(3) \leq 4$, см. [251]. Большую часть XX века борьба шла за более скромные оценки, вначале за $G(3) \leq 8$, что было сравнительно легко — в том смысле, что основывалось почти исключительно на аналитической теории чисел XIX века — и потом за $G(3) \leq 7$, даже это оказалось уже намного труднее.

Еще один интересный документ той эпохи, это статья Бретшнайдера [54] 1853 года, в которой аналогичные вычисления проведены для четвертых, пятых и шестых степеней, для всех чисел меньших $4100 \approx 4^6$. В этом интервале подтвердилось как исходное предположение Варинга $g(4) = 19$, так и предположения Эйлера $g(5) = 37$ и $g(6) = 73$.

Одно из последних обширных вычислений, проведенных вручную до грандиозного предприятия Диксона, — это таблицы Альфреда Вестерна [251] чисел, не представимых в виде суммы четырех или пяти кубов, доведенные примерно до 800.000. При этом отдельные таблицы, скажем, числа, представимые в виде суммы двух кубов, для слагаемых, удовлетворяющих дополнительным сравнениям, доведены до миллиардов. Вот что сам Вестерн пишет об организации вычислений: “I wish to record my thanks to the Government Grant Committee of the Royal Society for a grant towards the expenses of the computations, and to my principal computer, Mr. H. W. Acton, Assistant at Greenwich Observatory, for his remarkable accuracy and rapidity. The total number of numbers whose individual character as to representability by either four or five cubes has been found is 254,000.” Обратите внимание на то, в каком смысле использован здесь термин “компьютер”.

[29] Я всегда считал, что у Диксона [112] на странице 717 ошибка, Dase вместо правильного Dahse. Но потом встретил такое же написание у Эдмунда Ландау. Разумеется, это должен быть тот Дазе, которого мы все знаем по истории вычисления π, см. [64] и общий контекст в [48].

[30] Это, разумеется, Роберт Даублебски фон Штернек младший (1871–1928), а не его более знаменитый отец генерал-майор Роберт Даублебски фон Штернек старший (1839–1910).Несмотря на всю широту своих интересов, фон Штернек младший был вполне серьезным математиком, но, как и его отец, по-видимому, вообще просто очень любил считать, см. [51].

[31] Диксон пишет [85], что за четыре недели работы его ассистентке мисс Эвелин Гарбе удалось обнаружить *одну* ошибку в таблицах фон Штернека. А именно, число 32822 является суммой *трех* кубов, а не четырех, как у того указано.

Интересно, что сегодня мы можем повторить *все* классические вычисления на эту тему, выполненные в XVIII–XIX веках, за несколько минут на бытовом компьютере, — и мы с Володей Халиным систематически делали это в классе, начиная с 2005 года, примерно с такими словами. Но чтобы повторить вычисления Вестерна, нужно уже слегка задумываться над используемыми алгоритмами.

5. ПРОБЛЕМА ВАРИНГА: АЛГЕБРА

5.1. Доказательство Лиувилля

Первое *общее* доказательство[32] конечности $g(k)$ для какого-либо $k \geqslant 3$ дал Жозеф Лиувилль в своих лекциях в *Collège de France*. А именно, он доказал, что $g(4) \leqslant 53$. Его доказательство *настолько* красиво и просто и послужило образцом для *такого* количества дальнейших вариаций и обобщений, включая и доказательство Гильберта, что я не удержусь от искушения воспроизвести его здесь. Именно так должна выглядеть, с моей точки зрения, школьная математика — она должна быть интересной, *содержательной*, связанной с остальной математикой и открытой обобщениям.

Прежде всего, он замечает, что для

$$2n = x^2 + y^2 + z^2 + w^2,$$

выполняется **тождество Лиувилля**[33]

$$\begin{aligned} 6n^2 = x^4 + y^4 + z^4 + w^4 + &\\ \left(\frac{1}{2}(x+y+z+w)\right)^4 + \left(\frac{1}{2}(x+y+z-w)\right)^4 + \left(\frac{1}{2}(x+y-z+w)\right)^4 + \left(\frac{1}{2}(x+y-z-w)\right)^4 + &\\ \left(\frac{1}{2}(x-y+z+w)\right)^4 + \left(\frac{1}{2}(x-y+z-w)\right)^4 + \left(\frac{1}{2}(x-y-z+w)\right)^4 + \left(\frac{1}{2}(x-y-z-w)\right)^4. & \end{aligned}$$

Сегодня, конечно, каждый образованный математик с первого взгляда узнает в этом тождестве формулу для норм целых *гурвицевых* кватернионов [25]. Суммирование здесь происходит по парам элементов бинарной группы тетраэдра, рассматриваемой как группа обратимых целых кватернионов — или, что то же самое, по положительным корням системы типа D_4, отвечающей за плотнейшую упаковку шаров в $\mathbb{R}^4$. В самом деле, как заметил в 1876 году Эдуар Люка, линейной заменой переменных это тождество приводится к виду

$$6\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\right)^2 = \sum (x_i + x_j)^4 + \sum (x_i - x_j)^4,$$

где обе суммы в правой части берутся по $1 \leqslant i < j \leqslant 4$. В таком виде связь с системой корней D_4 в обычной реализации становится, конечно, еще более наглядной.

Однако, как мы уже знаем из теоремы Лагранжа, каждое натуральное число есть сумма не более четырех натуральных квадратов. Поэтому каждое кратное 6 есть сумма не более $12 \cdot 4 = 48$ четвертых степеней. А так как все возможные вычеты $0, 1, 2, 3, 4, 5$ по модулю 6 сами представляются как сумма $\leqslant 5$ четвертых степеней 1^4, то вообще каждое натуральное число есть сумма $\leqslant 48 + 5 = 53$ четвертых степеней. Позже эта оценка многократно улучшалась.

---

[32] Оно впервые опубликовано в 1859 году в книге Лебега “Упражнения по численному анализу” [184]. Естественно, Виктора-Амадея Лебега = Victor-Amédée Le Besgue, а не Анри Лебега = Henri-Léon Lebesgue, известного нам из курса математического анализа.

[33] Прежде чем переносить его и дальнейшие тождества сюда в этих исторических формах, я фактически проверил их в `Mathematica`. Книги полны опечаток, в том числе и книги классиков. В *платоновском* смысле эти тождества верны. Если в них есть ошибки, то они возникли при форматировании *текста*.

5.2. Другие ранние доказательства

В 1895 году Эдмон Майе [189] в таком же духе доказал, что $g(3) \leqslant 21$, то есть что каждое натуральное число является суммой не более 21 куба натуральных чисел. Он стартует со скромного наблюдения $(x+y)^3 + (x-y)^3 = 2x^3 + 6xy^2$. Оказывается, однако, что три раза применив эту формулу мы получаем замечательное **тождество Майе**

$$6x(x^2+y^2+z^2+w^2) = (x+y)^3 + (x-y)^3 + (x+z)^3 + (x-z)^3 + (x+w)^3 + (x-w)^3.$$

Юрий Владимирович Линник внес в него арифметическую пертурбацию и переписал в виде

$$4(x_1^3+y_1^3+x_2^3+y_2^3+x_3^3+y_3^3) = (x_1+y_1)^3 + (x_2+y_2)^3 + (x_3+y_4)^3 + \\ 3\big((x_1+y_1)(x_1-y_1)^2 + (x_2+y_2)(x_2-y_2)^2 + (x_3+y_3)(x_3-y_3)^2\big).$$

Тождество Майе позволяет вывести представимость натурального n в виде суммы 21 куба из теоремы Лежандра о представимости некоторых других связанных с n чисел в виде суммы трех квадратов[34]. Это делается примерно в том же жанре, как в доказательстве Лиувилля, нужно только чуть аккуратнее смотреть на возникающие при этом сравнения. Сам Майе почти сразу же улучшил свою оценку до $g(3) \leqslant 17$, а Альберт Флек[35] в [130] заметил, что на самом деле доказательство Майе дает даже оценку $g(3) \leqslant 13$.

В следующем 1896 году Майе близким методом доказал и что $g(5) \leqslant 192$. Это сделано в удивительной статье [190], где он предвосхищает многие из тем, которые станут популярны лет через 25–30. Он доказывает там теорему Варинга не только для x^5, но и для произвольных целозначных многочленов степени $\leqslant 5$, то, что сейчас называется **теоремой Камке**. Конечно, в такой общности он не пишет явных тождеств.

В 1907 году Альберт Флек [131] написал **тождество Флека** для шестых степеней

$$60(x^2+y^2+z^2+w^2)^3 = 36(x^6+y^6+z^6+w^6) + \\ 2\big((x+y)^6 + (x-y)^6 + \ldots + (z+w)^6 + (z-w)^6\big) + \\ (x+y+z)^6 + (x-y+z)^6 + (x+y-z)^6 + (x-y-z)^6 + \ldots + (y-z-w)^6.$$

Поясним, что во второй строке 12 слагаемых (выбор пары и знака), а в третьей строке 16 слагаемых (выбор тройки и два *независимых* выбора знака), всего 32 слагаемых. Используя это тождество, он доказал, что $g(6) \leqslant 2451$.

Эти упражнения продолжались еще пару лет с *нарастающим* воодушевлением. В том же 1907 году Адольф Гурвиц и в 1908 году Майе и Виферих [156, 191, 252] написали *много* дальнейших тождеств такого рода, которые позволили, в частности, улучшить оценку для $g(5)$ до $g(5) \leqslant 59$ и установить конечность $g(7)$ и $g(8)$ — но с ростом k тождества становились все сложнее, а оценки, естественно, все хуже и хуже.

[34] А в форме Линника играет ключевую роль в доказательстве Линника того, что $G(3) \leqslant 7$, но при этом вместо теоремы Лежандра используются весьма глубокие результаты самого Линника о тернарных квадратичных формах.

[35] Интересно, что ни Майе, ни Флек, ни некоторые другие авторы классических работ по проблеме Варинга не были университетскими профессорами математики. Майе инженер, но у него много десятков вполне содержательных математических работ на самые разные темы. Флек — врач. Виферих — школьный учитель. И так далее.

Ограничусь здесь только одним из них, встраивающимся в непрерывную линию развития от Лиувилля к Гильберту, — **тождеством Гурвица**:

$$\begin{aligned}5040(x^2+y^2+z^2+w^2)^4 = 6\big((2x)^8+(2y)^8+(2z)^8+(2w)^8\big)+\\ 60\big((x+y)^8+(x-y)^8+\ldots+(z+w)^8+(z-w)^8\big)+\\ (2x+y+z)^8+(2x-y+z)^8+(2x+y-z)^8+(2x-y-z)^8+\ldots+(-y-z+2w)^{10}+\\ 6\big((x+y+z+w)^8+(x+y+z-w)^8+\ldots+(x-y-z-w)^8\big).\end{aligned}$$

Оно выражает некоторое кратное *четвертой* степени суммы четырех квадратов как целочисленную линейную комбинацию *восьмых* степеней линейных форм. Более того, в [156] Гурвиц предположил существование таких тождеств для *любого* показателя, и в том же году Исайя Шур (см., например, [176], Anhang) действительно написал **тождество Шура**

$$\begin{aligned}22680(x^2+y^2+z^2+w^2)^5 = 9\big((2x)^{10}+(2y)^{10}+(2z)^{10}+(2w)^{10}\big)+\\ 180\big((x+y)^{10}+(x-y)^{10}+\ldots+(z+w)^{10}+(z-w)^{10}\big)+\\ (2x+y+z)^{10}+(2x-y+z)^{10}+(2x+y-z)^{10}+(2x-y-z)^{10}+\ldots+(-y-z+2w)^{10}+\\ 9\big((x+y+z+w)^{10}+(x+y+z-w)^{10}+\ldots+(x-y-z-w)^{10}\big),\end{aligned}$$

выражающее некоторое кратное *пятой* степени суммы четырех квадратов как целочисленную линейную комбинацию *десятых* степеней линейных форм. Чтобы убедиться, что мы одинаково понимаем эти тождества, во второй строке в них 12 слагаемых (выбор пары и знака), в третьей строке 48 слагаемых (выбор одного места из четырех под коэффициент 2, выбор одного места из оставшихся трех под коэффициент 0 и два *независимых* выбора знака на двух остальных местах) и, наконец, в последней строке 8 слагаемых (три *независимых* выбора знака на всех местах, кроме первого) — итого 72 слагаемых.

Упражнение. Зная теорему Лагранжа $g(2)=4$ и теорему Виферих $g(5)\leqslant 59$, оцените $g(10)$ сверху.

Эти решения и соответствующие формулы собраны в книге Пауля Бахмана [36]. В 1911 году Йозеф Кюршак [174] обобщил тождество Лиувилля на суммы 7, 10, 13, … квадратов, а в 1912 году Кемпнер [169] написал явные тождества такого вида для степеней 12 и 14, но это было сделано уже *постфактум*, после того как Гильберт предложил свое общее решение. Мне кажется, сегодня было бы интересно посмотреть чуть *пристальнее* как на тожества типа Лиувилля—Флека—Гурвица—Шура—Кюршака—Кемпнера для четных степеней, так и — особенно!! — на тождества типа Майе и Виферих для *нечетных* степеней.

5.3. Доказательство Гильберта

В замечательной статье 1909 года [151], посвященной памяти только что умершего тогда Германа Минковского, Давид Гильберт получил принципиальное решение *проблемы* Варинга, придумав достаточно простое доказательство того, что для любого натурального k найдется такое $g(k)$, что любое натуральное число n представимо в виде суммы $g(k)$ неотрицательных k-х степеней.

Как и все предыдущие (но не последующие!) доказательства, доказательство Гильберта основано на тождествах, выражающих какое-то кратное k-й степени суммы m

квадратов как *положительную* линейную комбинацию $(2k)$-х степеней *линейных форм* в количестве $q = \binom{2k+1}{m}$ штук:

$$a(x_1^2 + \ldots + x_m^2)^k = a_1(b_{11}x_1 + \ldots + b_{1m}x_m)^{2k} + \ldots + a_q(b_{q1}x_1 + \ldots + b_{qm}x_m)^{2k},$$

где $a, a_i \in \mathbb{N}$ и $b_{ij} \in \mathbb{Z}$, для $1 \leqslant i \leqslant q$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Фактически в своем решении проблемы Варинга Гильберт использовал только тождества для $m = 5$, но его метод совершенно общий и позволяет доказать существование подобных **тождеств Гильберта** для всех m и k. На самом деле написать *какое-то* выражение k-й степени суммы квадратов в виде *линейной комбинации* $(2k)$-х степеней линейных форм не фокус, основная техническая трудность состоит в том, чтобы найти такую линейную комбинацию, все коэффициенты которой *положительны*.

Чтобы понять, насколько непросто было сделать это чисто алгебраически, читатель может попробовать сам написать несколько таких тождеств с $m = 5$ для небольших значений k, типа тех, которые фигурировали в предыдущем пункте. Поэтому Гильберт истолковывает k-ю степень суммы квадратов в левой части как определенный интеграл по m-мерному шару (в первой версии статьи по шару размерности m^2, как в работе Феликса Хаусдорфа [148]) и дальше сводит задачу построения искомых тождеств к выпуклой геометрии (что-то в духе теоремы Каратеодори о выпуклой оболочке) — что, конечно, делает посвящение статьи Минковскому еще более уместным.

Разумеется, эти тождества сразу влекут существование $g(k)$ для всех $k = 2^l$. Существование $g(k)$ вообще для всех k следует отсюда при помощи элементарного, хотя и довольно утомительного рассуждения, использующего неравенства и 2-адические разложения.

В первом абзаце на второй странице своей работы Гильберт делает довольно смешное замечание на тему “einer neuartigen Anwendung der Analysis auf die Zahlentheorie”. Что еще забавнее, потом Пуанкаре воспроизводит это замечание: “Ce qui mérite surtout d’attirer l’attention dans la démonstration de M. Hilbert, c’est qu’elle repose sur une façon nouvelle d’introduire les variables continues dans la thèorie des nombres. On part d’une identitè où une intégrale 25$^{\text{uple}}$ est égalée à la puissance m^c de la somme de cinq carrés” [211]. *Казалось бы*, что после того, как полиномиальные тождества написаны, их можно доказывать любым образом, так что интегралы играют здесь чисто эвристическую роль.

Тем не менее, Гильберт и Пуанкаре несомненно правы! Дело в том, что — в отличие от всех предшествующих доказательств! — Гильберт не написал свои тождества, он *доказал их существование*. Часто говорят, что “доказательство Гильберта дает *явно завышенную* оценку для $g(k)$”. Это не так. Подлинная проблема состоит в том, что *в своем исходном виде* доказательство Гильберта *неэффективно*, то есть не дает вообще *никакой* оценки для $g(k)$. Дело в том, что там вначале выбираются вершины симплекса с *вещественными* координатами, содержащего данную точку (что нужно для положительности коэффициентов искомой линейной комбинации), а потом уже вблизи них выбираются точки с *рациональными* координатами. При этом, конечно, нет никакого *простого* способа ограничить знаменатели этих рациональных координат, а без этого нет и никакой возможности оценить коэффициенты в получающихся тождествах, что абсолютно необходимо для оценки $g(k)$.

Конечно, все интегралы из доказательства Гильберта тут же изгнали. В том же 1909 году Феликс Хаусдорф [149] предложил редакцию этого доказательства, в которой использовались только обычные одномерные интегралы, и только для доказательства положительности коэффициентов. В 1910–1911 годах Стридсберг [230] еще упростил доказательство Хаусдорфа, обратив внимание на роль систем линейных уравнений и рекуррентных соотношений. Работа Стридсберга первоначально опубликована на шведском, но в 1912 году по предложению самого Гильберта переведена и снова опубликована, на этот раз в Math. Ann.

Это доказательство дальше упрощали Роберт Ремак, Адольф Гурвиц, Георг Фробениус, Эрхард Шмидт и другие см., в частности, [132, 157, 219, 225]. При этом удалось полностью элиминировать интегралы[36] и эксплицировать ссылки на геометрию[37]. Со всеми улучшениями доказательство Стридсберга изложил Александр Оппенхайм в [203]. Тем не менее, все эти доказательства продолжали оставаться неэффективными, то есть не давали никаких оценок для $g(k)$. Разные варианты и переработки того, что получается на этом пути, изложены во многих учебниках и статьях, например, в *старых* изданиях учебника Владыслава Наркевича [195] (начиная с 2003 года там воспроизводится доказательство Ньюмана [201], являющееся упрощением доказательства Шнирельмана—Линника).

В целом, невозможно оценить подход Гильберта точнее, чем это сделал в 1920 году Харди: "Within the limits which it has set for itself, it is absolutely and triumphantly successful". Это блистательный успех, *в тех рамках, которые он себе ставил* [157]. Сами эти рамки, однако, как и все остальное в нашей жизни, носят условный исторический характер. Гильберт близко не решил задачу Варинга в том виде, как ее ставили математики XVIII века, как ее понимали математики XIX века или как мы понимаем ее сегодня, после повления компьютеров. Исходная гипотеза Варинга тоже доказана, для кубов в 1909–1912 годах, о чем уже говорилось, но для четвертых степеней ее полное решение заняло больше 125 лет после первоначального прорыва Лиувилля и ровно 75 лет после доказательства Гильберта, последняя точка в доказательстве равенства $g(4) = 19$ была поставлена только в 1984 году Рамачандраном Баласубраманианом, Франсуа Дрессом[38] и Жан-Марком Дезуйе[39] [74].

Первую эффективизацию доказательства Гильберта провел Георг Йоганн Ригер в 1953 году [221]. Его первоначальная оценка для $g(k)$ на этом пути

$$g(k) < (2k+1)^{260(k+3)^{3k+8}}.$$

В дальнейшем в [222] он приводит гораздо лучшую оценку

$$g(k) < (2k+1)^{260(k+1)^{8}},$$

которая, впрочем, все равно несравненно хуже уже давно полученных к тому моменту на других путях *настоящих* оценок. В дальнейшем эти оценки еще улучшались, например, в работах Франсуа Дресса и Пола Поллака[40] [114, 115, 211]. Скажем, Поллак в 2011 году дает оценку

$$g(k) < (2k+1)^{1808k^{5}},$$

[36] Гурвиц делает по этому поводу следующее характерное замечание "Da indessen die Sätze rein algebraischer Natur sind, so wird man fordern dürfen, daß auch ihre Beweise nur algebraische Hilsmittel benutzen sollen", с которым невозможно не согласиться.

[37] В письме Эрхарда Шмидта Гильберту [225] содержатся явные ссылки на Минковского и Каратеодори.

[38] https://www.math.u-bordeaux.fr/~fdress/

[39] https://en.wikipedia.org/wiki/Jean-Marc_Deshouillers. Вот, что пишет Хенрык Иванец в статье, посвященной его 60-летию "My favorite observation about Jean-Marc in action concerns his fascination in the 'medium size numbers'. I mean it often takes more than just numerical computations to cover missing ranges in analytic estimates which alone are not practical, because the implied constants are of astronomical magnitude. One needs new ideas to finish a problem. Jean-Marc succeeded in many cases, particularly in the Waring problem for biquadrates and the Goldbach—Shnirel'man problem for primes. The paper [74] of Jean-Marc alone is an absolute masterpiece, it contains the last key contribution to the solution of $g(4) = 19$" [158].

[40] На странице Поллака http://pollack.uga.edu/ масса текстов о вычислениях в теории чисел, в том числе учебного характера.

которая, конечно, лучше чем все предыдущие, полученные на этом пути, но все равно не приближается к настоящему значению $g(k)$.

Можно ли доказать гипотезу Варинг а на гильбертовском пути, это вопрос широко открытый — и с моей точки зрения чрезвычайно интересный не только как непосредственный математический и вычислительный вызов, но и в методологическом, историческом и философском отношениях. Если математика устроена так, как нам кажется, то это должно быть возможно. Но для этого, конечно, нужно не упираться в конструкцию этих тождеств у самого Гильберта, а для начала провести *систематический* компьютерный поиск тождеств такого типа с небольшими коэффициентами, притом не только для четных, но и для нечетных степеней. Это типичная задача **полиномиальной компьютерной алгебры** и много новых тождеств чуть другого типа было открыто в последние десятилетия для решения легкой проблемы Варинга и других близких задач[41].

6. ПРОБЛЕМА ВАРИНГА: АНАЛИЗ

В 1920–1925 годах Харольд Годфри Харди и Джон Литтлвуд предложили совершенно другой подход к проблеме Варинга, см. [139, 141–145] (все эти работы собраны в [146]) и замечательное изложение в книге Вона [235]. Этот подход *значительно* труднее и с точки зрения используемых методов и с точки зрения технических деталей. Зато он позволил получить несравненно более точные результаты, в том числе и далеко выходящие за рамки того, как ставился сам вопрос в XVIII и XIX веках.

6.1. Метод Харди—Литтлвуда

Харди и Литтлвуд начинают свою статью [141] со следующей констатации: “The problem proposed by Waring then falls naturally into two parts. The first is the proof of the existence of $g(k)$, the second the determination of its actual value as a function of k... The second problem is still unsolved, except when k is 2 or 3.” Первую из этих задач Варинг не ставил и не мог ставить в такой форме в XVIII веке. А вторую Гильберт не решал.

Для начала Харди и Литтлвуд *переформулировали* задачу Варинга в духе Леонарда Эйлера и предшествующих совместных работ самого Харди со Сринивасой Рамануджаном, а потом *видоизменили* ее. Именно это видоизменение в сочетании с нашими возрастающими вычислительными возможностями и позволило в конце концов решить задачу Варинга в исходной формулировке.

Отправная точка Харди и Литтлвуда состоит в следующем. При фиксированном показателе k они рассматривают ряд[42]

$$f_k(z) = 1 + z^{1^k} + z^{2^k} + z^{3^k} + \ldots$$

[41] Эберхард Беккер [44] доказал существование тождеств Гильберта вида $(x_1^l + \ldots + x_m^l)^k = f_1(x_1, \ldots, x_m)^{lk} + \ldots + f_q(x_1, \ldots, x_m)^{lk}$ для произвольных k, l, m. Но f_j здесь должны быть рациональными дробями при $l \geqslant 4$. Если бы все они были многочленами, то должны были бы быть линейными формами, что сразу ведет к противоречию.

[42] На самом деле фактически они рассматривают ряд $f_k(z) = 1 + 2z^{1^k} + 2z^{2^k} + 2z^{3^k} + \ldots$ являющей производящей функцией для последовательности значений функции $n \mapsto |n^k|$, $n \in \mathbb{Z}$. Почему они это делают, долгое время оставалось для меня загадкой. Хотя Харди и Литтлвуд гораздо больше обсуждают общие идеи, чем это обычно принято в аналитических текстах, я не смог найти у них никаких обоснований и только из лекций Андре Вейля [248] понял, что такой выбор $f_k(z)$ унаследован из статей про суммы квадратов. Там он был более чем осмысленным, так как приводил к тэта-функции Якоби и явным формулам. Для высших степеней

являющийся производящей функцией для последовательности значений функции $n \mapsto n^k$, $n \in \mathbb{N}$. Как хорошо известно со времен Эйлера, его s-я степень

$$f_k(z)^s = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r_{k,s}(n) z^n$$

является тогда производящей функцией для количества представлений натуральных чисел как *сумм* k-х степеней натуральных чисел в количестве $\leqslant s$ штук[43]. *Существование* такого представления для данного n эквивалентно тому, что коэффициент ряда $f_k(z)^s$ ненулевой, $r_{k,s}(n) \neq 0$. Таким образом, исходная гипотеза Варинга эквивалентна тому, что $r_{3,9}(n) \neq 0$ и $r_{4,19}(n) \neq 0$ для всех натуральных n.

Как функция комплексного аргумента $z \in \mathbb{C}$ этот ряд сходится при $|z| < 1$, но окружность $|z| = 1$ целиком состоит из особых точек. По формуле Коши

$$r_{k,s}(n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f_k(z)^s}{z^{n+1}} dz,$$

где C — это окружность радиуса $0 < \rho < 1$. Однако *вычислять* этот интеграл никто не умеет. Основная идея предложенного Харди, Рамануджаном и Литтлвудом **кругового метода** состоит в том, чтобы научиться *оценивать* его при ρ близких к 1, используя характер особенностей на единичной окружности[44].

Здесь невозможно, конечно, рассказать даже в общих чертах, как именно это делается. Самый общий план такой. На контуре интегрирования функция f_k имеет пики вблизи корней из 1, в которых расположены ее самые суровые особенности на единичной окружности. Контур разбивается на две части в зависимости от близости к этим пикам, главную часть отвечающую **большим дугам**[45] и второстепенную часть отвечающую **малым дугам**. Для главной части строится очень хорошая асимптотика с остаточным членом, который мало влияет на окончательный результат. Интеграл по второстепенной части просто оценивается сверху методом Вейля.

Таким образом, вместо того, чтобы непосредственно доказывать, что коэффициенты $r_{k,s}(n)$ ненулевые, Харди и Литтлвуд изучают их **асимптотическое поведение**. На этом пути им удается не только доказать, что при любом $s > (k-2)2^{k-1}+5$ все эти коэффициенты, кроме конечного их числа, ненулевые, но и оценить порядок роста $r_{k,s}(n)$ как функции от n, что до этого было известно только для сумм квадратов. Чтение этих работ и сегодня производит совершенно ошеломляющее впечатление — даже с учетом всего послезнания,

мы не знаем, какие коэффициенты нужно брать, чтобы получать функции, удовлетворяющие простым функциональным уравнениям, так что никаких структурных оснований именно для такого выбора нет, только исторические. Вывод отсюда всего лишь один. Максимум два. Ну, от силы четыре. Во-первых, алгебраисты объясняют лучше, чем остальные. Во-вторых, историю математики могут писать *только* профессиональные математики, понимающие, что на самом деле происходит. Ну и, в-четвертых, question more!

[43] Для той функции, которую фактически использовали Харди и Литтлвуд, связь при нечетном k чуть менее очевидна, но тоже легко написать явную формулу. Ясно, однако, как этот выбор повлиял на повальное увлечение “легкой гипотезой Варинга” в 1930-х годах.

[44] Русское название метода является результатом недоразумения. Разумеется, речь в нем идет об особенностях на *окружности*. Но чтобы переводить такие вещи нужно немного понимать содержание или немного знать язык, скажем, на уровне различия между circle и disk, sphere и ball, quotient и ratio, speed и velocity, ...

[45] Опять же, *major arcs* и *minor arcs*, это, разумеется, не какие-то мифические “большие” и “малые” дуги, а *главные и второстепенные дуги*, но нет никакого смысла пытаться менять используемую много десятилетий терминологию, пусть и возникшую в результате непонимания языка оригинала. Тем более, что по-немецки тоже *große Bögen* и *kleine Bögen*. Возможно, кстати, что именно с немецкого и переводили в 1920-е годы. На самом деле major arcs составляют небольшую часть окружности.

что все эти красоты оказались не нужны и для получения настоящих оценок можно ограничиться гораздо более простыми методами.

6.2. Оценки $G(k)$ и $G^+(k)$

Уже Якоби обсуждал наименьшее s такое, что любое *достаточно большое* натуральное число n представимо в виде суммы s неотрицательных k-х степеней, Харди и Литтлвуд обозначают такое s через $G(k)$. Они замечают, что в каком-то смысле $G(k)$ *гораздо интереснее*, чем $g(k)$, потому что отвечает за фундаментальные свойства больших чисел, а не определяется случайными арифметическими совпадениями[46]. Вот как эта мысль выражена в учебнике Харди и Райта: “It will be observed that there is much more uncertainty about the value of $G(k)$ than about that of $g(k)$; the most striking case is $k = 3$. This is natural, since the value of $G(k)$ depends on the deeper properties of the whole sequence of integers, and that of $g(k)$ on the more trivial properties of special numbers near the beginning.”

По самому определению $G(k) \leqslant g(k)$. С другой стороны, конечность $G(k)$ сразу влечет конечность $g(k)$. В самом деле, если любое число большее N представляется в виде суммы k-х степеней в количестве $\leqslant G(k)$, то заведомо $g(k) \leqslant \max(G(k), N)$. В 1908 году Гурвиц и Майе заметили очевидную нижнюю оценку $G(k) \geq k+1$, замечательно простое доказательство этого неравенства приведено в [147], Теорема 394, или в [154], Теорема 18.2.2. В частности, $G(3) \geqslant 4$. Используя сравнения для многих k это неравенство можно значительно усилить. Так, например, в 1912 году Кемпнер заметил, что $G(4) \geqslant 16$ и вообще $G(2^m) \geqslant 2^{m+2}$ для всех $m \geqslant 2$, это [147], Теоремы 395 и 396 или [31], Теорема 18.2.3.

Теорема Лагранжа утверждает, что $G(2) = g(2) = 4$. К моменту появления первой работы Харди—Литтлвуда нетривиальная оценка $G(k)$ была известна еще ровно в одном случае. А именно, в 1908 году Эдмунд Ландау [176] доказал, что $G(3) \leqslant 8$. Напомним, что по теореме Вифериха—Кемпнера $g(3) = 9$, так что, вообще говоря, при $k \geqslant 3$ следует ожидать строгое неравенство $G(k) < g(k)$. В связи с исходной гипотезой Варинга наибольший интерес представляет случай биквадратов. Полученная в 1920 году в [142] общая оценка дает $G(4) \leqslant 33$. За счет более детального анализа в 1921 году в [143] они улучшили эту оценку до $G(4) \leqslant 21$, а в дальнейшем в 1925 году в [145] до $G(4) \leqslant 19$. Конечно, это еще не решение проблемы Варинга для $k = 4$, но очень очень важное продвижение в этом направлении. В последних двух параграфах мы подробно обсудим современные результаты для $k = 3, 4$ полученные с помощью компьютеров.

Функция $G(k)$ отвечает самому простому пониманию выражения *почти все* натуральные числа представляются как суммы k-х степеней в количестве $\leqslant s$. А именно, здесь это означает *все кроме конечного числа = все, начиная с некоторого места*. Но возможны, очевидно и другие понимания, когда исключений бесконечно много, но встречаются они все реже и реже. Одна из возможных формализаций выражения *почти все* в этом смысле дается понятием **натуральной плотности**[47]. Говорят, что множество $X \subseteq \mathbb{N}$ имеет плотность p если $|X(n)|/n \longrightarrow p$ при $n \longrightarrow \infty$, где $X(n) = \{x \in X \mid x \leq n\}$.

Обозначим через $G^+(m)$ наименьшее s такое, что *почти любое* (в смысле натуральной плотности) натуральное число n представимо в виде суммы s неотрицательных k-х степеней. Ясно, что $G^+(s) \leqslant G(s)$. Из теоремы Лагранжа сразу вытекает, что $G^+(2) = G(2) =$

[46] Сегодня это известно как **Сильный Закон Маленьких Чисел** [135, 136] = *почти все* натуральные числа очень-очень-очень велики: EARLY EXCEPTIONS ECLIPSE EVENTUAL ESSENTIALS.

[47] Интуитивно натуральная плотность представляется чрезвычайно *естественной*, но вычислять ее довольно трудно. Поэтому в теории чисел широко используются другие понятия плотности, более приспособленные для вычислений, плотность Дирихле, плотность Шнирельмана и т. д.

$g(2) = 4$. В 1925 году Харди и Литтлвуд доказали, что $G^+(4) = 15$, то есть заведомо меньше, чем $G(4)$, а в 1939 году Харольд Дэвенпорт[48] получил уже совершенно удивительные результаты $G^+(3) = 4$ и $G(4) = 16$.

6.3. Метод Виноградова

Поскольку нас интересует только вычисление $g(k)$, которое было в основном завершено в 1936 году, стоит упомянуть только одно ключевое продвижение по сравнению с Харди—Литтлвудом, за счет которого это было достигнуто. А именно, Харди и Литтлвуд первоначально дали **экспоненциальную** по k оценку $G(k)$ с главным членом $(k-2)2^{k-2}$. Но Иван Матвеевич Виноградов в 1934–1935 годах улучшил ее до **полиномиальной** по k оценки, вначале примерно **квадратичной**, но почти сразу до примерно **линейной** для больших k. Сегодня нам не нужно объяснять разницу между экспоненциальными и полиномиальными оценками с точки зрения фактических вычислений, но тогда это не было еще общим местом и первым, кто осознал *практические* импликации оценок виноградовского типа, был Леонард Диксон. В качестве иллюстрации он сравнивает оценку Виноградова $G(17) \leqslant 448$ из [239] с оценкой Харди—Литтлвуда $G(17) \leqslant 491711$.

Вот первые работы Виноградова, посвященные проблеме Варинга: [11–15, 237–240, 255], большинство этих текстов собрано в его избранных трудах [16] (мы не цитируем более поздние работы, посвященные улучшению оценок для $G(n)$, так как они не оказали влияния на вычисление $g(n)$, которое мы здесь обсуждаем). Идея Виноградова настолько по-детски проста, что вообще непонятно, как все эти умнейшие люди и изощреннейшие математики, которые этим занимались — Ландау, Харди, Литтлвуд и другие, не говоря уже про Германа Вейля [251], который контролировал всю современную ему математику (в наше время это представляется совершенно невозможным) — ее пропустили. А именно, он заметил, что если нас интересует количество представлений *фиксированного* n как суммы s неотрицательных k-х степеней, то весь бесконечный хвост производящей функции вообще не имеет значения, так что можно ограничиться *многочленом*

$$f_{k,N}(z) = 1 + z^{1^k} + z^{2^k} + \ldots + z^{N^k}.$$

Тогда коэффициент $r^N_{k,s}(n)$ при z^n в *многочлене*

$$f_{k,N}(z)^s = 1 + \sum_{n=1}^{sN} r^N_{k,s}(n) z^n$$

равен количеству представлений числа n как *сумм* k-х степеней чисел $1 \leqslant m \leqslant N$ в количестве $\leqslant s$ штук.

Ясно, однако, что числа m для которых $m^k > n$ не могут участвовать в таком представлении. Поэтому при любом $N \geqslant \sqrt[k]{n}$ имеет место равенство $r^N_{k,s}(n) = r_{k,s}(n)$. Таким образом, вместо того чтобы переходить к пределу по $\rho \longrightarrow 1$ в интеграле Харди—Литтлвуда, можно сразу положить $\rho = 1$ и переходить вместо этого к пределу по $N \longrightarrow \infty$. Понятно, что все основные моменты теории Харди—Литтлвуда, типа особой роли корней из 1, больших дуг и пр. при этом тоже в той или иной форме возникают, но их преодоление становится *технически* много легче. Вот что пишут об этом Касселс и Вон: “The simplification that results

[48] Кстати, сын Харольда Дэвенпорта, *Джеймс* Харольд Дэвенпорт https://people.bath.ac.uk/masjhd/, один из лучших специалистов по компьютерной алгебре, в частности в области символьного интегрирования. Именно из его лекций [71] я понял, почему вычисление определенных интегралов настолько сложнее вычисления неопределенных интегралов, о чем и рассказывал в следующем году в курсе «Компьютерная алгебра», см. https://www.lektorium.tv/node/32988.

from the replacement of infinite series by finite sums is such that thereafter all applications of the Hardy—Littlewood method adopt this approach” [55].

Ну, там много других технических моментов, например, раз мы теперь интегрируем по единичной окружности $|z| = 1$, то можно сделать замену переменной $z = e^{2\pi i t}$, так что многочлен $f_{k,N}(z)$ превращается в экспоненциальную сумму

$$1 + e^{2\pi i 1^k t} + e^{2\pi i 2^k t} + \ldots + e^{2\pi i N^k t}$$

и интегрировать вместо этого по отрезку $[0,1]$. Это и дало традиционное название методу Виноградова, **метод тригонометрических сумм**. Потом в работах самого Виноградова, Хуа Локена [31, 152, 153, 155] и других появилось еще *много* разных вещей: новые варианты оценок Вейля, связанные со сглаживанием и усреднением; роль при этом совместных решений уравнений $x_1^l + \ldots + x_s^l = y_1^l + \ldots + y_s^l$ при $1 \leqslant l \leqslant k$ — то, что в развлекательной математике называется *проблемой Пруэ—Тэрри—Эскотта* а на более возвышенном языке *теоремой Виноградова о среднем значении*; роль сравнений по большому модулю и т. д.

Но *основная суть* **метода Виноградова** полностью изложена выше, она состоит в осознании того, что проблема Варинга, проблема Гольдбаха и все остальные задачи аддитивной теории чисел, это на самом деле задачи **полиномиальной алгебры** — то есть вычисление коэффициентов абсолютно конкретных (хотя и очень больших) многочленов явно заданных как произведения некоторых других многочленов. Тому, кто не знаком с **компьютерной математикой**, и считает, что умножение многочленов в столбик — то есть свертка коэффициентов сомножителей — это самый эффективный способ вычисления коэффициентов произведения, может показаться, что это просто переформулировка и что никакого реального упрощения при этом не наступает, поскольку чтобы найти коэффициент как раз и нужно найти все разложения его номера в сумму соответствующего вида.

Это, однако, совершенно не так. Многочлены имеют гораздо больше структуры чем целые числа, и сегодня известны гораздо более эффективные способы вычисления их коэффициентов см., например, [133, 172]. Поэтому я предлагаю *попробовать* решить некоторые задачи аддитивной теории чисел именно как задачи **полиномиальной компьютерной алгебры**. Хотя бы для начала провести достаточно обширные эксперименты, чтобы оценить необходимый для полного решения объем вычислений и попытаться обнаружить новые закономерности (типа сравнений для коэффициентов). Более того, для задач варинговского типа это не должно быть даже слишком сложно, поскольку показатели степени сами являются значениями некоторых *целозначных* многочленов[49], так что к этим многочленам непосредственно применимы алгоритмы Стивена Уотта вычислений с разреженными символическими многочленами в **кольце символических многочленов**, см., например, [244–247], которые теперь имплементированы прямо в `Maple`.

Вернемся теперь снова в 1920–1930 годы. Читать работы самого Виноградова, да и многих других *писателей* того времени, крайне непросто, поскольку там не объясняется, что происходит, и слишком много [неправильных] букв. Вот что говорит по этому поводу Эдмунд Ландау: “Im Bd. XXXI (1924, S. 490–507) des Recueil mathématique de la société mathématique de Moscou steht eine Arbeit yon Herrn Winogradow mit dem Titel *Sur un théorème général de Waring*. Sie enthält manche Fehlschlüsse (schon sein lemme I ist weder von ihm bewiesen noch richtig); seine Formulierung des Endergebnisses (sein théorème I und sein aus diesem auf wenigen Zeilen — übrigens falsch — hergeleitetes théorème II) enthält nicht

[49] К сожалению, для задач гольдбаховского типа такой подход совершенно не имеет шансов, так как в этом случае показатели степени сами не задаются *столь же просто* значениями многочленов.

einmal den HILBERTschen Satz; ... Und doch wird die folgende Reinschrift zeigen, wie viel die Wissenschaft Herrn Winogradow zu verdanken hat." — своими словами: "В работе Господина Виноградова полно ошибок, Лемма 1 не доказана и неверна, теорема 2 сформулирована неправильно и ее вывод из теоремы 1 некорректен — и, тем не менее, все вместе грандиозный вклад в науку." Пользуясь идеей этой первой работы Виноградова сам Ландау *тут же* [179–181] получил для $g(k)$ оценку того же порядка, как оценка $G(k)$ в работе Харди—Литтлвуда.

Из соображений местного патриотизма, да и элементарной справедливости, невозможно не упомянуть еще одну важную работу того времени, статью Михаила Александровича Гельбке[50] [134], посвященную тому, что в те годы называлось "die zweite Winogradoff—Landausche Methode"[51] [182]. Ландау и Гельбке вернули основные улучшения Виноградова в контекст теории Харди—Литтлвуда. Идею того, что там происходит, можно объяснить так. Большие дуги подразделяются дальше, на их центральной части строится асимптотика с гораздо лучшим остаточным членом. А периферийные части трактуются вообще без главного члена, просто усилениями оценок Вейля. Ландау показал, что в таком духе можно заметно усилить первую теорему Харди—Литтлвуда, а Гельбке заметил, что и сами асимптотики тоже.

Отправляясь от работ Гельбке [17, 134] Ральф Джеймс [160] (см. также [161, 162]) сразу усилил оценку Ландау еще в 2 раза. Именно в такой форме, как **метод Харди—Литтлвуда—Виноградова**, а не буквально в виде тригонометрических сумм, первоначально использовали идеи Виноградова великие классики 1930-х годов, Ханс Хейльброн, Харольд Дэвенпорт и другие [66, 67, 70] при улучшении оценок Харди—Литтлвуда для маленьких k. Впрочем, Теодор Эстерман [124, 125] ссылался уже непосредственно на работу Виноградова [239]. Ну а Хуа Локен, конечно, почти с самого начала использовал именно тригонометрические суммы. Но он и не был ни британским, ни немецким[52] математиком.

Здесь не место обсуждать еще один популярный метод доказательства проблемы Варинга в формулировке Гильберта, метод Шнирельмана—Линника [26, 32, 33]. Хотя решения Шнирельмана и Линника вербализованы по-разному, их основная идея довольно близка. В исходном виде они неэффективны, эффективизация Ригера [222] дает оценку

$$g(n) < 2^{2\cdot 16^k (k+1)!},$$

которая на вид еще хуже, чем оценка в доказательстве Гильберта. Впрочем, трудно ожидать чего-то большего от доказательства, в котором изучается поведение $r_{k,s}(n)$ *в среднем*. Хотя, конечно, метод Шнирельмана позволяет решить — в гильбертовском смысле *существования* константы Шнирельмана, без конкретной оценки — одновременно *все*

---

[50] Фамилия в наших краях нечастая, это действительно младший сын врача Александра Фердинандовича Гельбке и внук переводчика Фердинанда Карловича Гельбке. Его дед в 1850–1870 годы преподавал немецкий язык и литературу в Президентском физико-математическом лицее № 239. Впрочем, в те годы *школа* № 239 называлась иначе, *Sankt Annen-Schule*. Сам Михаил Александрович погиб в Ленинграде поздней зимой или ранней весной 1942 года.

[51] На странице виртуального музея СПбПУ забавное квипрокво: «28 мая 1935 года защитил диссертацию на тему "К задаче Варинга", проблему теории чисел, которую разрабатывали также академики Ландау и Виноградов», http://comtext.net.ru/museum/index.php/Гельбке_Михаил_Александрович Ну, как разрабатывал проблемы аддитивной теории чисел академик Лев Ландау, мы уже видели во введении. Конечно, до 1933 года Эдмунд Ландау был членом *Геттингенской* Академии, а после этого иностранным *почетным* членом АН СССР. Но тогда по советской иерархии, вроде, должно быть "Виноградов и Ландау".

[52] Впрочем, почти все немецкие математики в этой области тоже скоро стали британскими, кто в 1929 году, кто в 1933, а последние в 1938–1939.

проблемы, включая проблему Варинга—Гольдбаха о представлении числа суммами степеней простых $n = p_1^{k_1} + \ldots + p_s^{k_s}$, причем даже различных степеней k_i, если только ряд $\sum \frac{1}{k_i}$ расходится. Различные доказательства основанные на этой идее изложены в огромном количестве текстов, в том числе в [3, 4, 18, 29, 138, 151, 199, 200].

7. ТОЧНОЕ ЗНАЧЕНИЕ $g(k)$ В ПРОБЛЕМЕ ВАРИНГА

7.1. Писатель в области теории чисел

Несмотря на все замечательные достижения, описанные в предыдущих двух параграфах, к концу 1920-х годов *точное* значение $g(k)$ было по-прежнему известно только в двух случаях, $g(2) = 4$ и $g(3) = 9$. Работы Харди, Литтлвуда, Виноградова и их последователей давали оценку $G(k)$, но не реалистическую оценку того места, начиная с которого все числа представляются как суммы k-х степеней в количестве $G(k)$.

Воспроизведу комментарий Оливье Рамаре[53]: “La région sans zéros de type Vinogradov a elle aussi été utilisée par Cheng[54] [59]. Il montre qu'il existe un nombre premier entre deux cubes consécutifs n^3 et $(n+1)^3$, pourvu que $n \geqslant n_0$ où ce n_0 est numérique et vaut $\ldots 10^{6000000000000000000}$. Cet exemple illustre assez clairement il me semble(!) qu'il reste des progrès à réaliser.” [217]. В этой статье Рамаре, конечно, речь идет о задачах чебышевского типа, но и в задачах варинговского типа исходные оценки на то место, начиная с которого справедлив тот или иной результат, часто носили ровно такой же умозрительный характер (вторая экспонента = бесконечность в смысле ван Данцига).

До доказательства *исходной* гипотезы Варинга, утверждавшей, что $g(4) = 19$, в 1925 году было *почти* так же далеко, как до этого и она, возможно, еще долго оставалась бы нерешенной, если бы не невероятная стамина еще одного центрального персонажа всего этого грандиозного предприятия, Леонарда Диксона.

Году в 1972 или 1973 что ли, милейший Александр Васильевич Малышев начал свой спецкурс по теории квадратичных форм с констатации: «Был такой *писатель*[55] в области теории чисел Леонард Диксон...» Конечно, это было не его личным мнением, а господствующим настроением большой и влиятельной группы людей. Более того, я хорошо понимаю, что так раздражало вождей советской теории чисел в стилистике Диксона. Это был вопрос одновременно и идеологии и эстетики и чистой прагматики. Прагматики потому, что признав, что Гильберт не доказал гипотезу Варинга, следовало признать и то, что Виноградов не доказал гипотезу Гольдбаха. Но, конечно, причины неприятия и замалчивания Диксона носили гораздо более глубокий характер. Его математика была математикой совершенно другого стиля, одинаково неприемлемого и для школы Гильберта и для школы Харди—Литтлвуда и для школы Виноградова—Линника и, тем более, для тех, кто пришел им на смену. Позволю себе автоцитирование: «Однако когда в тридцатые

[53] На его личной странице http://iml.univ-mrs.fr/~ramare/ есть фантастический и постоянно обновляемый раздел, связанный с тем, что он называет *мультипликативной* теорией чисел. И много всего другого интересного.

[54] Здесь имеется в виду Чэн Юанью https://primes.utm.edu/references/refs.cgi?author=Cheng, более известный как “Фред” = Фуруй.

[55] Интересно, что за 40–50 лет до этого Харди совершенно не воспринимал эту оценку как пейоративную и называл таких людей, как Ландау “writers in number theory”. Сам Диксон тоже называл себя писателем: “his errors are avoided in the much simpler proof by the writer”. Очевидно, и у Харди и у Диксона это не оценочное суждение, а просто синоним более позднего “author”. Поскольку мое собственное восприятие математики в основном визуально, вербализация дается мне с огромным трудом, себя я воспринимаю не как писателя, а как мастера синопий.

годы XX века в математике началось победное шествие абстракционизма, *конкретные* работы Диксона были не поняты и забыты» [6].

Хотя с точки зрения сегодняшнего дня следует констатировать, что проблему Варинга решили в основном именно Диксон и его последователи в 1928–1984 годах (разумеется, полностью опираясь при этом на достижения других школ!) Из нескольких сотен его работ штук 30–40 трактуют непосредственно проблему Варинга и близкие задачи, см., например, [84–109] и это, конечно, далеко не все его работы на эту тему[56] Не говоря уже про то, что с конца 1920-х годов до начала 1940-х вариантам проблемы Варинга и ее обобщениям посвящено примерно 20 диссертаций учеников самого Диксона[57] и учеников его учеников. Мне *лично* его работы 1930-х годов представляются менее интересными, более рутинными, что ли, чем его работы по линейным группам, теории алгебр и квадратичным формам. Но это уже из серии «зачем от гор и мимо башен летит орел, тяжел и страшен, на черный пень?»

У Оскара Уайльда есть прекрасный образ, почему боги скрыты друг от друга и могут видеть только своих адептов. Пока энергия творения безрассудно влечет их к цели, колеса их колесниц поднимают облака пыли. В результате они оказываются неспособны судить не только о работе других, но и о своей собственной. Во всех 30++ работах Диксона по проблеме Варинга Гильберт в связи с ней не упоминается ни разу. Он цитирует Харди и Литтлвуда, Виноградова, Ландау, Гельбке, Майе, Вифериха, Кемпнера, Камке (которого он упорно называет Кампке), естественно, своих учеников, Пиллаи, ... — единственный, кого он *не* цитирует в контексте проблемы Варинга, это Гильберт. При том, что в своей Истории [64] он излагает работу Гильберта [151], а в тех же работах по проблеме Варинга он вполне цитирует *другие* результаты Гильберта, скажем его теорему о многочленах Гильберта.

Но мы то, сидящие на ступенях амфитеатра, могли бы судить иначе? Тем не менее, все эти идеологические разногласия почти столетней давности оказались почти полностью перенесены и в наши дни. Обзор Роберта Вона и Тревора Вули [236] начинается с формулировки идеальной теоремы Варинга со следующим комментарием: “as the result of the work of many mathematicians we know that...” — это, конечно, абсолютно верно, с тем, что на 90–95 % “много математиков”, о которых здесь идет речь, это *один человек*, Леонард Диксон, но его имя не называется. Возможно, кстати, именно потому, что сочинители [236] сами не зрители, а центральные акторы этой неоконченной истории.

7.2. Решение проблемы Варинга

Сформулируем, прежде всего, ответ. На 99,9999 % мы уверены, что это в точности тот ответ, который предсказал Эйлер младший в XVIII веке, то, что называется **идеальная теорема Варинга**. А именно, пусть $3^k = q\cdot 2^k + r$, где $1 \leqslant r \leqslant 2^k - 1$.

• В 1935–1936 годах Леонард Диксон и Суббайа Сивасанкаранарайана Пиллай практически одновременно *почти* полностью доказали гипотезу Варинга при $k \geqslant 7$. Из результатов работ [101–105, 207, 208][58] вытекает, что если $k \geqslant 7$ и $q + r \leqslant 2^k$, то

$$g(k) = 2^k + q - 2.$$

[56] Основная часть этих работ собрана в трудах Диксона [110].

[57] Одним из первых его учеников защитивших диссертацию по проблеме Варинга был Янг Кочуен, отец будущего нобелевского лауреата по физике Янг Чженьнина (поля Янга—Миллса, уравнения Янга—Бакстера). Позже Янг Кочуен преподавал в Цинхуа и именно от него Хуа Локен узнал про проблему Варинга, см. [120].

[58] Найти оригиналы работ Пиллая довольно трудно, но сами тексты собраны в [210].

Два остававшихся маленьких случая, не охваченных первоначальным результатом Диксона—Пиллая, были полностью рассмотрены, один вскоре, но другой потребовал еще четверть века.

• $g(6) = 73$, Пиллай [209], 1940 год.

• $g(5) = 37$, Джинжун Чэнь [57], 1964 (перед этим в 1959 году Чэнь [56] уже улучшал оценку Диксона $g(5) \leqslant 54$ до $g(5) \leqslant 40$).

Таким образом, гипотеза Эйлера *почти* доказана — по модулю возможности патологического поведения неполного частного и остатка при делении 3^k на 2^k. Но вот *исходная* гипотеза Варинга для $k = 4$ так и оставалась недоказанной ни в 1936 году, ни в 1964. Hold on, hold on...

Есть все основания верить, что условие $q + r \leqslant 2^k$ выполняется *всегда*, это утверждение известно как **гипотеза Пиллая**. Сам Пиллай проверял это условие вручную, а Диксон доказал его выполнение при $2 \leqslant k \leqslant 400$. Вскоре Сарвадаман Чоула [60] показал, что те числа для которых оно выполнено, имеют [верхнюю] плотность 1, а Курт Малер заметил, что этим свойством обладают все достаточно большие числа, так что имеется не более конечного количества исключений [188]. Но результат Малера основан на теореме Рота и поэтому неэффективен. Эрнст Трост [233] приводит элементарное доказательство того, что хороших степеней по крайней мере бесконечно много.

В 1963 году Хартмут Элих [121] на `Siemens 2002` проверил выполнение условия при $k \leqslant 50000$, а уже 1964 году Розмари Стеммлер [230] на `IBM 7090` продолжила это вычисление до $k \leqslant 200000$. Наконец, в 1990 году Кубина и Вундерлих [173] за 240 часов вычисления на суперкомпьютере `Connection Machine` в Мэриленде проверили справедливость условия для всех $k \leqslant 471600000$. Более того, самая длинная цепочка переносов, которая при этом возникла для $k = 92600006$, это 29 разрядов, в то время как для нарушения условия $q + r \leqslant 2^{92600006}$ нужна была бы цепочка переносов из $> 38{,}4 \cdot 10^6$ двоичных разрядов.

Таким образом, есть *убедительнейшие* свидетельства в пользу того, что это условие выполняется всегда, но доказать это полностью не удается, несмотря на продолжающиеся усилия многих людей, см., например, [21, 45–47, 50, 72, 137]. Вот еще подтверждение гипотезы Пиллая. Как мы сейчас поймем, условие, которое мы хотим проверить, состоит в том, что расстояние $\|3^k/2^k\|$ от $3^k/2^k$ до ближайшего целого больше, чем $3^k/4^k$. Эффективизировав асимптотические результаты для Паде аппроксимаций функции $(1-t)^{a+b}/t^b$, Лоран Абсигер[59] [137] проверил, что для $k \geqslant 64440000$ выполняется более слабое неравенство

$$\|3^k/2^k\| > 2^{-0.8k} = (0{,}5744\ldots)^k.$$

После этого, используя `PARI` он проверил прямым компьютерным вычислением, что то же неравенство выполняется вообще для всех $k \geqslant 5$.

• Впрочем, Диксон в 1936 году точно выяснил, что происходит если гипотеза Пиллая — и, тем самым, гипотеза Эйлера — неверна. В этом случае число, которое требует для своего представления наибольшего количества k-х степеней встречается не между 2^k и 3^k, а между 3^k и 4^k и строится следующим образом. Вначале мы смотрим на наибольшее кратное 3^k не превосходящее 4^k, а потом заменяем в нем последнее слагаемое 3^k на $2^k + q - 2$ и смотрим, не возникло ли при этом двоичного переноса. Иными словами, пусть

[59] Фамилию Habsieger хочется произнести по-немецки, Хабзигер, или по-французски, Абсьеже, но правильно как в тексте, с ударением на последнем слоге, https://dblp.org/pid/29/545.html.

$4^k = q' \cdot 3^k + r'$, где $0 < r' < 3^k$. Тогда

$$g(k) = \begin{cases} 2^k + q + q' - 2, & \text{если } qq' + q + q' = 2^k, \\ 2^k + q + q' - 3, & \text{если } qq' + q + q' > 2^k. \end{cases}$$

У самого Диксона случаев было больше, но, как заметил в 1942 году Р. К. Рубугундай [224] (и потом объяснил проще Чоула [61]), один из них не реализуется, а еще в одном, как убедился в 1944 году Айвен Нивен [202], ответ такой же, как у Диксона.

7.3. Как это было сделано?

Диксон начинает всерьез заниматься проблемой Варинга в 1927 году и сразу же предлагает свой **процесс подъема** — то, что получило в литературе того времени название *Dickson's ascent* или *Aufstiegsverfahren*. Речь идет о том, чтобы стартуя со сравнительно небольших таблиц при помощи минимальных вычислений доказывать за несколько шагов, что чрезвычайно большие числа представляются в виде сумм небольшого количества k-х степеней.

Вот как он иллюстрирует эту идею в [89] (сравни также изложение метода Диксона в написанной по свежим следам научно-популярной статье Полf Батчелдера 1936 года [43]). Как мы знаем, фон Штернек прямым вычислением проверил, что все числа между 8042 и 40000 являются суммами $\leqslant 6$ кубов. Сдвигая этот интервал на 30^3, мы видим, что все числа между $8042 + 30^3 = 35042 \leqslant 40000$ и $40000 + 30^3 = 67000$ являются суммами $\leqslant 7$ кубов. Сдвигая теперь этот интервал на 38^3, мы видим, что все числа между $8042 + 38^3 = 62914 \leqslant 67000$ и $40000 + 38^3 = 94872$ тоже являются суммами $\leqslant 7$ кубов. Мы можем продолжать этот процесс пока не дойдем до 103^3, после этого сдвиги исходного интервала перестанут перекрываться. Но за это время мы успели — не проводя никаких вычислений, кроме таких, которые можно провести за четверть часа на паре листков бумаги[60] — убедиться, что все числа между 8042 и 1132727 являются суммами $\leqslant 7$ кубов. А ведь это только *первый* шаг процесса подъема. Теперь точно такое же рассуждение — второй шаг подъема — показывает, что все числа между 454 и 232604691 являются суммами $\leqslant 8$ кубов. В 1909 году Виферих показал, что каждое число $\geqslant 2,25 \cdot 10^9$ является суммой $\leqslant 9$ кубов. Но ведь третий шаг подъема перекрывает эту границу, так что и все числа ниже этой границы тоже являются суммами $\leqslant 9$ кубов и, тем самым, $g(3) = 9$.

Ну, на самом деле это только первая идея метода подъема, для кубов ее достаточно, в общем случае нужны были чуть более тонкие соображения. Например, использовать более детальную информацию о перекрытии сдвигов и/или длине разложений чисел поднимаемого интервала в суммы k-х степеней. Допустим, из таблиц известно, что каждое число в интервале между 32107 и 67232 является суммой $\leqslant 18$ положительных пятых степеней, но при этом ровно 10 среди тех, которые больше 50425, требуют 18 слагаемых, а остальные меньшего количества. Сдвинув теперь этот интервал на $7^5 = 16807$, мы видим, что ровно десять из вновь получившихся чисел требуют 19 пятых степеней, а все остальные $\leqslant 18$. Скажем, первое такое исключительное число в интересующем нас интервале, требующее 18 пятых степеней, это 54430. Тогда казалось бы, что $54430 + 7^5 = 71237$ требует 19 пятых степеней. Но это не так, поскольку $71237 - 8^5 = 38469$ требует для своего выражения $\leqslant 17$ пятых степеней, так что и 71237 тоже требует не больше 18. То же самое работает и для всех остальных исключительных чисел в исходном интервале. Это значит, что мы

[60] В действительности, конечно, и этого не нужно, потому что таблицы степеней были уже заранее составлены *компьютером* (того времени) методом конечных разностей.

смогли *с минимумом вычислений* отодвинуть правую границу исходного интервала, про который мы знаем, что все числа в нем требуют $\leqslant 18$ пятых степеней, с 67232 до 84039.

Чтобы оценить объем стоящей за этим работы, приведу один пример. В таблицах [91] затабулированы разложения всех чисел до 150000 в суммы пятых степеней, и длины таких разложений для всех чисел до 300000. Но и большую часть книги Диксона [99], а именно страницы 84–257, тоже составляют *таблицы*, необходимые для следующего шага подъема, в которых для каждого числа между 3,470,000 и 3,600,000 указано его кратчайшее разложение в сумму пятых степеней. Это кажется неправдоподобным, но 130 тысяч чисел, это довольно много чисел. Конечно, эти таблицы Диксон вычислял не сам, а поручал своим ассистенткам. И, что самое обидное, доказать идеальную теорему Варинга для $k = 5$ на этом пути Диксону все равно не удалось, хотя он и дошел вручную методом подъема до 10^{483}. Но, конечно, эти его таблицы использовались и в дальнейшем.

Ну там еще много такого, использование целочисленных линейных зависимостей, логарифмические вычисления, когда для реально больших чисел, начиная примерно с десятков миллиардов, считаются не концы интервалов, а только количество цифр в них, и много еще разного. Идеи все *детские*. Но я не понимаю, чем одни детские идеи хуже других детских идей, *если они работают*. А у Диксона они вполне работали, для небольших k он между 1928 и 1934 годами улучшил большинство имевшихся к тому моменту оценок $g(k)$ элементарными методами. В целом, глядя из сегодняшнего дня, можно сказать, что вся эта деятельность Диксона, это чистая алгоритмика, которая стала входить в моду лет через 30, то, что можно было бы назвать **компьютерной математикой без компьютеров**[61]. Но, конечно, никаких перспектив доказать на этом пути идеальную теорему Варинга на основе *экспоненциальной* асимптотики для $G(k)$ в духе Харди—Литтлвуда у него не было.

Но в этот момент появились работы Виноградова [237–239], содержащие *полиномиальную* асимптотику для $G(k)$, и Диксон свой шанс не упустил. В 1935 году он восстановил все детали в работе Виноградова [239] явно прописав все константы, и получил явную оценку того N, начиная с которого каждое натуральное число является суммой $\leqslant 4k + 2k\ln(k) + k\ln(6)$ неотрицательных k-х степеней. Вот что у него получилось: $N = 10^{10^{0.6621k^2}}$, детали этой оценки опубликованы в [101], но использовать ее Диксон начал раньше. К счастью, он еще не знал, что интуиционисты уже провозгласили (или скоро провозгласят) это число актуальной бесконечностью, не устрашился, и легко досчитал до него вручную. Он и Герберт Цукерман [163, 259] использовали эту оценку, чтобы доказать идеальную теорему Варинга для $11 \leqslant k \leqslant 20$.

В следующем году произошел решительный прорыв. Осознав, что между линейным и экспоненциальным ростом довольно много места, в 1936 году Диксон перестал бороться за эффективизацию результата Виноградова с лучшей на то время оценкой для $G(k)$, а начал вместо этого бороться за лучшую оценку N. Вот что у него получилось со второго захода: $N = 10^{2k^7}$. Ну, как бы, все. Подняться до числа такого порядка, имея в своем распоряжении экспоненциальное количество шагов, вообще без проблем. Ровно это и было сделано в 1936 году Диксоном и Пиллаем (конечно, Пиллай тоже использовал метод Диксона). Более того, выясняется, что при таком подходе большие показатели степени k оказываются проще маленьких и средних, потому что для них x^k быстро растет с ростом x, так что большие степени требуют *меньше* фактических вычислений. Но степени

[61] No artist is ahead of his time. It's just that most people are far behind theirs. Это одинаково применимо и к Гильберту и к Диксону и, конечно, к Харди и Литтлвуду. Никто из них не был впереди своего времени. Просто все остальные были *далеко позади*.

$7 \leqslant k \leqslant 180$ Диксон к тому моменту уже сделал, а совсем маленькие потом доделывали Пиллай, Чэнь Джинжун и — hold on, hold on...

8. СУММЫ КУБОВ

Суммы девяти кубов. Как мы уже упоминали, в 1909 году Виферих [253] доказал, что любое натуральное число можно представить как сумму *девяти* кубов, $g(3) \leqslant 9$. В его доказательстве содержался незначительный пробел, который был заполнен Кемпнером [169, 170] в 1912 году и потом снова Диксоном [89] как разминка перед доказательством его идеальной теоремы Варинга. Так как 23 фактически требует для своего представления 9 кубов, то $g(3) = 9$, что решает первую часть исходной проблемы Варинга.

Суммы восьми кубов. Если нас интересует представление не всех, а лишь достаточно больших натуральных чисел, то есть вычисление $G(3)$, а не $g(3)$, то ситуация меняется. В том же 1909 году Эдмунд Ландау [175] доказал средствами *элементарной* аналитической теории чисел[62], что $G(3) \leqslant 8$, иными словами, все натуральные числа *начиная с некоторого места* представимы как суммы *восьми* кубов, см. также [243]. Это совершенно поразительный результат по тем временам, единственный общий результат, который не был сразу превзойден на пути Харди—Литтлвуда. Почти сразу же в 1913 году Бэр [38] эффективизировал эту теорему, показав, что все целые $n \geqslant 14,1 \cdot 233^6 \approx 2,26 \cdot 10^{15}$ представляются как суммы восьми кубов.

Но здесь уже появляются исключения, 23 и 239. В 1939 году, уже после доказательства своей *идеальной теоремы*, Диксон [109] доказал, что в действительности *все* целые, кроме этих двух, представляются как суммы *восьми* неотрицательных целых кубов. Разумеется, если допускать отрицательные числа, как мы это будем делать в следующей части, то 23 представляется уже как сумма *четырех* кубов, например, $23 = 2^3 + 2^3 + 2^3 + (-1)^3$ или $23 = 29^3 + 17^3 + 8^3 + (-31)^3$.

Суммы семи кубов, начало. В 1913 году Бэр [37, 38] доказал, что достаточно большие числа удовлетворяющие некоторым сравнениям представляются как суммы семи кубов. В частности, множество таких чисел имеет положительную плотность.

В 1943 году Юрий Владимирович Линник [185] доказал знаменитую теорему о семи кубах, утверждающую, что $G(3) \leqslant 7$. При этом самым существенным образом используются трудные[63] результаты Линника о тернарных квадратичных формах. И эти результаты и саму теорему Линника естественнее всего доказывать с использованием кватернионов, как это делается в статье Линника и Малышева [28].

В 1951 году Уотсон [242] дал более простое доказательство этого результата. Однако, при этом он тоже опирался на теорему Зигеля—Вальфиша об оценке числа простых в арифметических прогрессиях и поэтому и его доказательство неэффективно. Только в 1986 году Вон смог доказать этот результат на пути Харди—Литтлвуда [234], см. также [256].

Только в 1984 году Роджер Кук [63] и Кевин МакКерли [194] эффективизировали теорему Линника, причем МакКерли дает даже следующую явную оценку: все числа

$$n \geqslant e^{e^{13.94}} \approx 8,48450929 \cdot 10^{491868}$$

представляются как сумма семи кубов. Вскоре мы вернемся к обсуждению этой оценки.

[62] То есть при помощи тех инструментов, которые были доступны Чебышеву, Адамару и Валле-Пуссену.

[63] Первоначальное доказательство Линника содержало серьезную ошибку, исправленную Гордоном Поллом, но доказательство в [205] опирается на оценки Зигеля.

Суммы шести, пяти и четырех кубов. Есть все основания верить, что 8042 это самое большое число, которое нельзя представить в виде суммы шести кубов. В 1971–1972 годах Анатолий Николаевич Андрианов предложил автору в качестве курсовой работы на третьем курсе доказать теорему о шести кубах[64] то есть установить неравенство $G(3) \leqslant 6$.

Как мы знаем, в 1851 году Якоби высказывал даже предположение, что $G(3) \leqslant 5$. До сих пор это предположение доказано только в том смысле, что *почти все* (в смысле натуральной плотности) натуральные числа представимы в таком виде.

На самом деле в 1939 Харольд Дэвенпорт [66] доказал даже, что почти все натуральные числа представимы как суммы *четырех* неотрицательных кубов, так что $G^{+}(3) = 4$.

Интересно, что Дэвенпорт доказывал именно представимость, но не асимптотическую формулу для количества представлений. Напомню, что первоначально в 1922 году Харди и Литтлвуд смогли получить такую формулу только для сумм *девяти* кубов. Аналогичные оценки для сумм восьми, семи и меньшего числа кубов начали возникать только в 1980-е годы в работах Хули, Вона, Брюдерна, Кавада, Вули и других, но здесь нет, конечно, никакой возможности их обсуждать.

Экспериментальные данные. Уже в 1926 году Вестерн [250] приводит эвристические соображения в пользу того, что $G(3) = 4$. Более того, он делает даже конкретное предсказание — блестяще подтвердившееся в дальнейшем, в том, что касается существования такого числа! — что самое большое число, которое не представляется как сумма четырех кубов, расположено между 10^{12} и 10^{14}. В процессе доказательства своей теоремы о восьми кубах в 1939 году Диксон [109] проверил, что все числа между 455 и 8041 представляются как сумма семи кубов, а все числа между 8043 и 41623625 представляются как сумма шести кубов.

В 1981–1982 годах обширные компьютерные вычисления Яна Бомана и Карла-Эрика Фреберга [52], Кевина МакКерли [193] и Франческо Романи[65] [223] систематически доведенные примерно до 10^7, с дальнейшей экстраполяцией по методу Диксона, привели их к открытию новых чисел не представимых как суммы пяти кубов и доказательству того, что все числа между 455 и $3{,}4 \cdot 10^{14}$ представляются как сумма семи кубов, а все числа между 8043 и примерно $5 \cdot 10^{9}$ представляются как сумма шести кубов. На основе этих данных, асимптотики в теории Харди—Литтлвуда и вероятностных экспериментов Романи сформулировал следующие гипотезы.

Проблема семи кубов. Имеются ровно 15 натуральных чисел, которые представимы как сумма *восьми*, но не представимы как сумма *семи* неотрицательных кубов, самое большое из которых 454.

Проблема шести кубов. Имеются ровно 121 натуральное число, которые представимы как сумма *семи*, но не представимы как сумма *шести* неотрицательных кубов, самое большое из которых 8042.

Проблема пяти кубов. Имеются ровно 3922 натуральных числа, которые представимы как сумма *шести*, но не представимы как сумма *пяти* неотрицательных кубов, самое большое из которых 1290740.

[64] Ну, на самом деле он предлагал мне сделать нечто более простое, но гораздо более амбициозное, найти для соответствующих производящих функций функциональные уравнения вроде тех, которые определяют модулярные формы. Моим ученикам все-таки обычно к диплому или кандидатской диссертации удается решить задачи, которые я предлагаю в качестве курсовых на втором или третьем курсе.

[65] A parte: профессора по кафедре «Алгоритмы и структуры данных» на Факультете *Информатики* Университета Пизы, http://pages.di.unipi.it/romani/

В подтверждение этого в 1999 году Франсуа Берто, Оливье Рамаре и Поль Циммерман[66] [49] доказали, что все числа между 1290740 и $3,375 \cdot 10^{12}$ представимы как сумма пяти кубов, откуда при помощи алгоритма Диксона вытекает, что любое число между 455 и $2,5 \cdot 10^{26}$ является суммой 7 кубов. В том же году Жан-Марк Дезуйе, Франсуа Энкар[67] и Бернар Ландро[68] [81] расширили эти вычисления до 10^{16}, откуда, как замечает Рамаре, можно точно так же вывести, что любое число между 455 и $1,51 \cdot 10^{34}$ является суммой 7 кубов.

Самое большое известное сегодня число, которое требует для своего представления пять кубов это 7373170279850. Кстати, самый простой пример большого числа, для которого очевидно, что оно представляется как сумма пяти, но не четырех кубов, это $10^9 + 4$. В 1999 году Дезуйе, Энкар и Ландро [81] сформулировали следующую гипотезу (гипотезы 1 и 2 их работы):

Проблема четырех кубов. Имеются ровно 113936676 натуральных чисел, которые представимы как сумма *пяти*, но не представимы как сумма *четырех* неотрицательных кубов, самое большое из которых 7373170279850.

Я думаю, что неспециалистам трудно представить себе тот объем не только собственно компьютерных вычислений (а это *сотни тысяч* часов CPU time), но и нетривиальной *математики* (не только теории чисел и алгоритмики, но и скажем, теории вероятностей, см., например [80, 183]), стоящих за *такими* формулировками гипотезы Варинга.

Суммы семи кубов, окончание. Однако в 2000 зазор между нижней оценкой, получающейся эффективизацией теоремы Линника, и тем местом, до которого мы могли надеяться фактически досчитать, оставался все еще слишком большим. Это значило, что следует действовать с обеих сторон.

В 2005 году Рамаре [215] опубликовал еще одну эффективизацию теоремы Линника: все целые

$$n \geqslant e^{205000} \approx 2,3377074809 \cdot 10^{89030}.$$

представляются как сумма семи кубов. Улучшение основывалось на следующем **тождестве Бомбьери**

$$2(u^6 v^6 + u^6 w^6 + v^6 w^6)a^3 + 6au^2 v^2 w^2 (x^2 + y^2 + z^2) =$$
$$(u^2v^2a+wx)^3+(u^2v^2a-wx)^3+(u^2w^2a+vy)^3+(u^2w^2a-vy)^3+(v^2w^2a+uz)^3+(v^2w^2a-uz)^3,$$

за счет чего удалось резко уменьшить модуль арифметической прогрессии, в которой ищется простое число. Рамаре пишет, что этот результат в основном был получен в 1992 году, но *с арифметической ошибкой*! Хабиба Кадири[69] [164] тем же методом понизила эту оценку далее до $n \geqslant e^{71000}$.

Но тем временем в 2007 произошел принципиальный прорыв, после которого стало ясно, что полное решение проблемы семи кубов уже где-то прямо здесь. А именно, Рамаре понизил границу на n в предыдущем результате до

$$n \geqslant e^{524} \approx 3,71799 \cdot 10^{227}.$$

Этот фантастический прогресс достигнут за счет полной ревизии доказательства, Рамаре использует метод большого решета и вместо простых ищет произведения *двух* простых.

66 https://members.loria.fr/PZimmermann/
67 https://perso.univ-st-etienne.fr/hennfran/
68 https://math.univ-angers.fr/membre/landreau-bernard/
69 http://www.cs.uleth.ca/~kadiri/

И действительно, в 2008–2009 годах Кент Боклан[70] и Ноам Элкис[71] [53] доказали гипотезу семи кубов для чисел делящихся на 4, а в 2010 году Элкис [122] доказал ее для всех четных чисел. Разумеется, эти доказательства самым существенным образом использовали как верхнюю оценку Рамаре, так и нижнюю оценку Дезуйе, Энкара и Ландро.

Наконец осенью 2015 года Самир Сиксек[72] объявил о полном решении проблемы семи кубов, которое опубликовано в 2016 году в [227]. Единственными числами, которые не представляются в таком виде, являются

$$15,\ 22,\ 23,\ 50,\ 114,\ 167,\ 175,\ 186,\ 212,\ 231,\ 238,\ 239,\ 303,\ 364,\ 420,\ 428,\ 454.$$

Детали этой выдающейся работы слишком сложны, чтобы рассказывать о них здесь. Там используются и все предыдущие работы на эту тему и несколько новых идей и десятки тысяч часов компьютерных вычислений. Теперь предстоит обработать в таком же духе все остальные случаи теоремы Варинга, для кубов и далее везде. Причем для четвертых степеней это уже сделано!

9. СУММЫ ЧЕТВЕРТЫХ СТЕПЕНЕЙ

После того как в 1964 году Чэнь Джинжун доказал, что $g(5) = 37$, точное значение $g(k)$ оставалось неизвестным ровно для одного показателя. Но удивительным образом, это был ровно тот показатель $g(4)$, для которого Варинг явно формулировал свою проблему в 1770 году! Впрочем, на самом деле не слишком удивительным. С одной стороны, 4 это степень 2, так что $G(4)$ достаточно велико по отношению к $g(4)$, что не позволяет поджимать $g(4)$ при помощи $G(4)$, как это делал Диксон для больших k. С другой стороны, само число 4 очень очень очень мало, так что **биквадраты** x^4 растут слишком медленно, что приводит к необходимости слишком большого перебора. В настоящем параграфе мы расскажем как Варинг дошел до точки — Waring comes to the last point [73].

До появления компьютеров. Давайте еще раз совсем коротко резюмируем классическое состояние вычисления $g(4)$. Как мы знаем, $19 \leqslant g(4)$ и 79 действительно требует для своего представления 19 биквадратов. Кемпнер заметил, что $16 \leqslant G(4)$ а Харди и Литтлвуд с третьего захода доказали, что $G(4) \leqslant 19$, см. [145]. В 1936 году Теодор Эстерман [124] и независимо Харольд Дэвенпорт и Ханс Хейльброн [70] понизили эту оценку до $G(4) \leqslant 17$, а потом Дэвенпорт [67] в 1939 году получил уже окончательный результат $G(4) = 16$. В этом случае уже Харди и Литтлвуд [145] нашли точное значение $G^{+}(4) = 15$.

В 1940 году Факир Чанд Аулук [35] используя подход Гельбке [134] эксплицировал константы в вычислении Харди и Литллвуда и доказал, что любое $n > 10^{10^{88,9}}$ является суммой $\leqslant 19$ биквадратов.

После того, как Лиувилль доказал в $\leqslant 1859$ году свою теорему, его оценка $g(4) \leqslant 53$ много раз улучшалась. Чтобы проиллюстрировать, в каком примерно духе это делалось,

[70] Его диссертация была посвящена *буквально* проблеме Варинга. Однако потом он подвизался главным образом как криптограф и криптоаналитик, в том числе для NSA, так что основная часть его исследовательских работ засекречена. В журнале *Cryptologia* опубликовано несколько его открытых статей, посвященных дешифровке документов XIX века. Из них видно, что понимание стойкости шифра в то время *в точности* соответствовало тому, как это описано у Эдгара По.

[71] На его фантастической странице http://people.math.harvard.edu/~elkies/, кроме десятков текстов и таблиц по вычислительной теории чисел и вокруг, масса загадок, игр и пр., относящихся к музыке, шахматам и языку. Вот типичный brain teaser оттуда, на понимание английского языка. Которое из следующих слов лишнее: act, bone, came, deified, eerie, gore, later, maid, no, nuclear, oodles, pot, use, wary.

[72] http://homepages.warwick.ac.uk/~maseap/, на его странице масса интересных текстов по диофантовым уравнениям и арифметической алгебраической геометрии.

воспроизведем доказательство теоремы 387 из учебника Харди и Райта [147] и теоремы 18 главы 11 учебника Вацлава Серпиньского [226], утверждющей, что $g(4) \leqslant 50$. В самом деле, все числа меньшие 81 представляются как суммы $\leqslant 19$ биквадратов — на самом деле все они кроме 79 требуют $\leqslant 18$ биквадратов. Но любое число $n \geqslant 81$ можно представить в виде $n = 6m + r$, где $r = 0, 1, 2, 81, 16, 17$. Но как мы уже знаем из тождества Лиувилля и теоремы Лагранжа, каждое число вида $6m$ является суммой $\leqslant 48$ биквадратов. С другой стороны, $r = 0, 1, 81, 16$ сами являются биквадратами, а $r = 2, 17$ — суммами двух биквадратов.

- $g(4) \leqslant 47$, Савино Реалис [219], 1878.
- $g(4) \leqslant 45$, Эдуар Люка [186], 1878.
- $g(4) \leqslant 41$, Эдуар Люка [187], 1878.
- $g(4) \leqslant 39$, Альберт Флек, [130], 1906.
- $g(4) \leqslant 38$, Эдмунд Ландау [175], 1907.
- $g(4) \leqslant 37$, Артур Виферих [254], 1909.
- $g(4) \leqslant 35$, Леонард Диксон [92], 1933.

(Никто не забыт? Ничто не забыто?) До Диксона идеи везде примерно одни и те же: явные полиномиальные тождества, теоремы Лагранжа и Лежандра с вариациями (типа использования квадратичной формы $x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2$ и т. д.), сравнения и минимальный счет, который весь можно провести вручную (хотя сегодня, конечно, этого никто не стал бы делать). У Диксона ссылка на теорию Харди—Литтлвуда + метод подъема. Оценка Диксона оставалась непревзойденной до 1970 года.

Девятнадцать биквадратов. В 1970–1971 годах Франсуа Дрессу пришла в голову счастливая мысль вернуться к элементарному подходу с новыми идеями [114–119]. Вместо сумм трех и четырех квадратов он использует суммы двух квадратов, кроме тождеств типа Лиувилля—...—Гильберта — новые тождества, возникшие при решении *легкой* проблемы Варинга. Это сразу позволило превзойти оценку Диксона, а использование компьютера позволило *существенно* ее улучшить. Напомню, что это 1970–1971 годы, программирование происходит в `PL1/DOS`, `Fortran` и языке ассемблера, *все* является проблемой, и время и *память* — поэтому вычисления приходилось разбивать на небольшие транши по 760000 чисел. Таким образом, Дресс получает свою оценку $g(4) \leqslant 30$ *элементарными методами*. После этого, однако, события сразу ускорились.

- $g(4) \leqslant 34$, Франсуа Дресс [114], 1970.
- $g(4) \leqslant 30$, Франсуа Дресс [115], 1971.
- $g(4) \leqslant 27$, Чэнь Джинжун [58], 1974.
- $g(4) \leqslant 23$, Генри Томас [231], 1973.
- $g(4) \leqslant 22$, Генри Томас [232], 1974.
- $g(4) \leqslant 21$, Рамачандран Баласубраманиан [39], 1979.
- $g(4) \leqslant 20$, Рамачандран Баласубраманиан [40], 1985.

Чэнь Джинжун борется за оценки в асимптотическом методе, с учетом улучшений Хуа Локена [152, 153]. Томас пытается двигаться с двух сторон. В [231] он эффективизирует вычисления Дэвенпорта 1939 года, что позволяет доказать, что каждое $n \geqslant 10^{1409}$ является суммой 19 биквадратов и любое $n \geqslant 10^{568}$ является суммой 22 биквадратов. В следующем году он реализует чуть другой вариант диксоновского подъема, чтобы проверить, что любое $n \leqslant 10^{568.7}$ является суммой 22 биквадратов. Баласубраманиан [39, 40] улучшает асимптотику пользуясь при этом вычислениями Томаса. В 1985 году Жан-Марк Дезуйе отмечает возможные несоответствия в работе Томаса и объявляет оценку $n \geqslant 10^{625}$, см. [73], а потом и $n \geqslant 10^{560}$, см. [74], для сумм 19 биквадратов.

В том же году в [42] Баласубраманиан, Дезуйе и Дресс объявляют о полном решении задачи, см. также [73–75] по поводу общего плана. В [42] утверждется, что каждое число $n \geqslant 10^{367}$ является суммой 19 биквадратов. Доказательство получено за счет улучшения оценок в методе Харди—Литтлвуда—Виноградова, детали опубликованы через 6–7 лет в [76–78]. Кроме того, в [42] приведен набросок вычисления, показывающего, что каждое число $n \leqslant 10^{378}$ также является суммой 19 биквадратов. Позже в [79] это вычисление доведено даже до $n \leqslant 10^{448}$ и приведено гораздо больше деталей.

Таким образом верхняя область, происходящая из асимптотических оценок, и нижняя область, происходящая из компьютерных вычислений, перекрылись на 80 порядков! Это значит, что $g(4) = 19$ и проблема, которую Варинг ставил в 1770 году, наконец решена, в результате 125 лет усилий многих людей. Но оказывается можно ставить перед собой гораздо более амбициозные цели.

Шестнадцать биквадратов. Как мы уже упоминали, в 1939 году Дэвенпорт доказал, что $G(4) = 16$. В то время несомненно было уже известно, что 13792 не представляется как сумма 16 биквадратов. Теперь мы знаем, что это самый большой такой контрпример — все числа $n \geq 13793$ уже являются суммами 16 биквадратов. Это доказали в 1999–2005 годах Дезуйе, Энкар, Кавада, Ландро и Вули.

А именно, в [83, 173] доказано, что любое целое $n \geqslant 10^{216}$, которое не делится на 16, является суммой 16 биквадратов. В этих работах использованы новые полиномиальные тождества. Кроме того, для получения столь сильного результата авторам приходится пересчитать многие оценки в круговом методе и вокруг него from scratch и *с явными константами*, начиная с явных оценок суммы делителей, новых оценок экспоненциальных сумм и т. д. Совершенно замечательно. что эта часть работы не включает вообще почти никаких серьезных компьютерных вычислений.

С другой стороны уже в 1974 году Томас [231] проверил, что все числа между $13793 \leqslant n \leqslant 10^{80}$ являются суммами 16 биквадратов, но этого, конечно, недостаточно. В 2000 году в работе Дезуйе, Энкара и Ландро [82] это проделано уже для всех $13793 \leq n \leq 10^{245}$. Таким образом, верхняя и нижняя области снова перекрылись и в случае биквадратов можно дать уже *полный* ответ на задачу Варинга. Имеется ровно 96 натуральных чисел, которые не являются суммами 16 биквадратов, вот они все:

$$
\begin{gathered}
47,\ 62,\ 63,\ 77,\ 78,\ 79,\ 127,\ 142,\ 143,\ 157,\ 158,\ 159,\ 207,\ 222,\ 223,\ 237,\ 238,\ 239,\ 287,\\
302,\ 303,\ 317,\ 318,\ 319,\ 367,\ 382,\ 383,\ 397,\ 398,\ 399,\ 447,\ 462,\ 463,\ 477,\ 478,\ 479,\ 527,\\
542,\ 543,\ 557,\ 558,\ 559,\ 607,\ 622,\ 623,\ 687,\ 702,\ 703,\ 752,\ 767,\ 782,\ 783,\ 847,\ 862,\ 863,\\
927,\ 942,\ 943,\ 992,\ 1007,\ 1008,\ 1022,\ 1023,\ 1087,\ 1102,\ 1103,\ 1167,\ 1182,\ 1183,\ 1232,\\
1247,\ 1248,\ 1327,\ 1407,\ 1487,\ 1567,\ 1647,\ 1727,\ 1807,\ 2032,\ 2272,\ 2544,\ 3552,\ 3568,\\
3727,\ 3792,\ 3808,\ 4592,\ 4832,\ 6128,\ 6352,\ 6368,\ 7152,\ 8672,\ 10992,\ 13792
\end{gathered}
$$

для каждого из них легко, разумеется, указать, является оно суммой 17, 18 или 19 биквадратов.

Это значит, что для $k = 4$ мы получили *окончательный* ответ, такой ответ, о котором математики предыдущих поколений не могли даже мечтать. Для математиков XVIII и XIX веков уже работа Харди и Литтлвуда была бы чудом. Точно так же я не верю, что 100 лет назад кто-то мог себе представить, что вопросы можно ставить таким образом и что мы когда-либо окажемся в состоянии на них отвечать.

10. I SHAN'T CALL IT THE END

Кто решил проблему (вариант, доказал гипотезу) Варинга? Решена ли она вообще? Я не знаю. И сейчас, прочитав несколько сотен текстов на эту тему, знаю еще гораздо меньше, чем раньше. Полвека назад, как школьник старших классов или студент младших курсов, я бы уверенно ответил, что Гильберт в 1909 году.

Сегодня я не только знаю, что это не так, но и перестал понимать сам вопрос. *Настоящую* задачу, вот хотя бы такую как проблема Варинга, нельзя раз и навсегда *решить*[73]. Здесь особенно отчетливо видно, как трудно дается каждое *реальное* продвижение, и можно непосредственно сравнить результаты усилий разных поколений. Такую задачу можно только постоянно *решать*, возвращаясь к ней снова и снова, чтобы заново осознать ее формулировку и *попытаться* применить те инструменты, которыми мы располагаем в данный момент.

Сегодня мы могли бы попытаться полностью повторить с использованием компьютеров вычисления Диксона 1930-х годов. Ну и, естественно, продолжить их, перечислив для каждого значения s между [гипотетическим значением] $G(k)$ и $g(k)$ точный список исключений, в духе того как это было сделано для кубов. Ну, скажем, для начала хотя бы при $5 \leqslant k \leqslant 20$. Это довольно большая работа, потому что если, как мы все верим, $G(5) = 6$, то мы должны проверить все значения $s = 36, 35, \ldots, 6$ и исключения будут все еще встречаться очень очень далеко. Но было бы крайне интересно сделать это, просто для того, чтобы зафиксировать для себя и для будущих поколений, где мы сегодня находимся и что мы *реально* в состоянии посчитать.

Я благодарен Сергею Позднякову, который убедил меня написать этот цикл статей, за чрезвычайно полезные обсуждения. Разговор с Алисой Седуновой в коридоре Лаборатории Чебышева побудил меня снова начать смотреть на вещи, о которых я последний раз серьезно думал как математик в 1973 году — и потом только в 2004–2006 годах, но уже в связи с преподаванием. Я благодарен Володе Гердту, Боре Кунявскому, Андрею Родину, Леше Степанову и Илье Шкредову, которые чрезвычайно внимательно прочли первый вариант этой статьи и предложили большое количество важных исправлений, уточнений и дополнений.

Список литературы

1. *Айгнер М., Циглер Г.* Доказательства из Книги. Лучшие доказательства со времен Евклида до наших дней. М.: Бином, 2015. 288 с.
2. *Боро В.* Дружественные числа, двухтысячелетняя история одной арифметической задачи. В книге «Живые числа». М.: Мир, 1985. С. 11–41.
3. *Бредихин Б. М., Гришина Т. И.* Элементарная оценка $G(n)$ в проблеме Варинга // Матем. заметки. 1978. Т. 24. Вып. 1. С. 7–18.
4. *Буфетов А., Канель А. Я.* Новое элементарное решение проблемы Варинга // Фундамент. прикл. матем. 1997. Т. 3. Вып. 4. С. 1239–1252.
5. *Вавилов Н. А.* Компьютеры как новая реальность математики: I. Personal account // Компьютерные инструменты в образовании. 2020. № 2. С. 5–26. doi: 10.32603/2071-2340-2020-2-5–26
6. *Вавилов Н. А.* Конкретная теория групп. Том 1. 2020. 560 с. URL: http://www.add3d.ru/wp-content/uploads/2019/10/Vavilov-Groups.pdf (дата обращения: 20.10.2020).
7. *Вавилов Н. А., Халин В. Г.* Задачи по курсу Математика и Компьютер. Вып. 1. Арифметика и теория чисел. СПб.: ОЦЭиМ, 2005. 180 с.
8. *Вавилов Н. А., Халин В. Г.* Дополнительные задачи по курсу Математика и Компьютер. СПб.: ОЦЭиМ, 2006. 172 с.
9. *Вавилов Н. А., Халин В. Г., Юрков А. В.* `Mathematica` для нематематика. СПб., 2020. 484 с.
10. *Венков Б. А.* Избранные труды. Исследования по теории чисел. Л.: Наука, 1981. 448 с.

[73] “Il n’y a pas de problèmes résolus, il n’y a que des problèmes plus ou moins résolus".

11. *Виноградов И. М.* О теореме Варинга // Изв. АН СССР. VII серия. 1928. № 4. С. 393–400.
12. *Виноградов И. М.* Новое решение проблемы Варинга // Докл. АН СССР. 1934. № 2. С. 337–341.
13. *Виноградов И. М.* Новая оценка $G(n)$ в проблеме Варинга // Докл. АН СССР. 1934. Т. 4. № 5-6. С. 249–253.
14. *Виноградов И. М.* О верхней границе $G(n)$ в проблеме Варинга // Изв. АН СССР. **5**. 1934. № 10. С. 1455–1469.
15. *Виноградов И. М.* Новый вариант вывода теоремы Варинга // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 1935. № 9. С. 5–15.
16. *Виноградов И. М.* Избранные труды. М.: Изд-во АН СССР, 1952. 436 с.
17. *Гельбке М. А.* Относительно $g(k)$ в проблеме Варинга // Изв. АН СССР, VII серия. 1933. № 5. С. 631–640.
18. *Гельфонд А. О., Линник Ю. В.* Элементарные методы в аналитической теории чисел. М.: Физматгиз, 1962.
19. *Генералов А. И.* Комбинаторное доказательство теоремы Эйлера—Ферма о представлении простых чисел вида $p = 8k+3$ квадратичной формой x^2+2y^2 // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2006. № 330. С. 155–157.
20. *Диофант Александрийский.* Арифметика и книга о многоугольных числах. Ред. И. Г. Башмакова. М.: Наука, 1974. 328 с.
21. *Дубицкас А.* Оценка снизу величины $\|(3/2)^k\|$ // Успехи Мат. Наук, 1990. Т. 45. Вып. 4. С. 153–154.
22. *Иванов О. А.* Избранные главы элементарной математики. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1995. 223 с.
23. *Карацуба А. А.* Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983. 240 с.
24. *Карацуба А. А.* Проблема Гильберта—Камке в аналитической теории чисел // Матем. заметки. 1987. Т. 41. Вып. 2. С. 272–284.
25. *Конвей Дж. Х., Смит Д. А.* О кватернионах и октавах: об их геометрии, арифметике и симметриях. М.: МЦНМО, 2009. 184 с.
26. *Линник Ю. В.* Элементарное решение проблемы Waring'а по методу Шнирельмана // Матем. сб. 1943. Т. 12. Вып. 2. С. 225–230.
27. *Линник Ю. В.* Кватернионы и числа Кэли; некоторые приложения арифметики кватернионов // Успехи Мат. Наук. 1949. Т. 4. Вып. 5. С. 49–98.
28. *Линник Ю. В., Малышев А. В.* Приложения арифметики кватернионов к теории тернарных квадратичных форм и к разложению чисел на кубы // Успехи Мат. Наук. 1953. Т. 8. Вып. 5. С. 3–71.
29. *Нестеренко Ю. В.* О проблеме Варинга (элементарные методы) // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2005. № 322. С. 149–175.
30. *Хинчин А. Я.* Три жемчужины теории чисел. М.: Наука, 1979. 66 с.
31. *Хуа Л.* Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел. М.: Мир, 1964. 188 с.
32. *Шнирельман Л. Г.* Об аддитивных свойствах чисел // Успехи Мат. Наук. 1939. № 6. С. 9–25.
33. *Шнирельман Л. Г.* Об аддитивных свойствах чисел // Успехи Мат. Наук. 1940. № 7. С. 7–46.
34. *Archibald R. G.* Waring's problem: squares // Scripta Math. 1940. Vol. 7. P. 33–48. doi: 10.2307/3606948
35. *Auluck F.C.* On Waring's problem for biquadrates // Proc. Nat. Acad. Sci. India, Sect. A. 1940. Vol. 11, № 5. P. 437–450. doi:10.1007/BF03046010
36. *Bachmann P.* Niedere Zahlentheorie. Zweiter Teil: Additive Zahlentheorie. Leipzig: B. G. Teubner, 1910. 408 p.
37. *Baer W. S.* Über die Zerlegung der ganzen Zahlen in sieben Kuben // Math. Ann. 1913. № 74 (4). P. 511–514.
38. *Baer W. S.* Beiträge zum Waringschen Problem. Göttingen. 1913. 74 p.
39. *Balasubramanian R.* On Waring's problem: $g(4) \le 21$ // Hardy—Ramanujan J. 1979. № 2. P. 1–31.
40. *Balasubramanian R.* On Waring's problem: $g(4) \le 20$ // Hardy—Ramanujan J. 1985. № 8. P. 1–40.
41. *Balasubramanian R.* Highly composite. Bhatia, Rajendra (ed.) et al. // Proceedings of the international congress of mathematicians (ICM 2010), Hyderabad, India, August 19–27, 2010. Vol. I: Plenary lectures and ceremonies. Hackensack, NJ: World Scientific; New Delhi: Hindustan Book Agency, 2011. P. 176–209.
42. *Balasubramanian R., Deshouillers J.-M., Dress F.* Problème de Waring pour les bicarrés // I. Schéma de la solution. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1986. № 303 (4). P. 85–88; II. Résultats auxiliaires pour le théorème asymptotique. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1986. № 303 (5). P. 161–163.
43. *Batchelder P. M.* Waring's Problem // Amer. Math. Monthly. 1936. № 43 (1). P. 21–27.
44. *Becker E.* Summen n-ter Potenzen in Körpern // J. Reine Angew. Math. 1979. № 307–308. P. 8–30.
45. *Bennett M. A.* Fractional parts of powers of rational numbers // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1993. № 114 (2). P. 191–201. doi: 10.1017/S0305004100071528
46. *Bennett M. A.* Fractional parts of powers and related topics // Ph. D. Thesis, Univ. British Columbia (Canada). 1993. 113 p. doi: 10.14288/1.0079903
47. *Bennett M. A.* An ideal Waring problem with restricted summands // Acta Arith. 1994. № 66 (2). P. 125–132.
48. *Berggren L., Borwein J., Borwein P.* Pi: a source book. Third edition. Springer-Verlag, New York, 2004. 797 p.
49. *Bertault F., Ramaré O., Zimmermann P.* On sums of seven cubes // Math. Comp. 1999. Vol. 68, № 227. P. 1303–1310.
50. *Beukers F.* Fractional parts of powers of rationals // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1981. № 90. P. 13–20.
51. *Binder Ch.*, 100 Jahre Mertenssche Vermutung // Int. Math. Nachr., Wien, 1998. № 178. P. 2–6.
52. *Bohman J., Fröberg C. E.* Numerical investigations of Waring's problem for cubes // BIT Numer. Math. 1981. № 21. P. 118–122. doi: 10.1007/s10543-020-00827-y
53. *Boklan K. D., Elkies N. D.* Every multiple of 4 except 212, 364, 420, and 428 is the sum of seven cubesm // arXiv:0903.4503v1 [math.NT] 26 Mar 2009. P. 1–8. URL: https://arxiv.org/pdf/0903.4503.pdf (дата обращения: 20.10.2020).

54. *Bretschneider C. A.* Tafeln für die Zerlegung der Zahlen bis 4100 in Biquadrate // J. Reine Angew. Math. 1853. № 46. P. 1–23.
55. *Cassels J. W. S., Vaughan R. C.* Obituary: Ivan Matveevich Vinogradov // Bull. London Math. Soc. 1985. № 17 (6). P. 584–600.
56. *Chen Jing-run* Waring's problem for $g(5)$ // Sci. Record (N.S.). 1959. № 3. P. 327–330.
57. *Chen Jing-run* Waring's problem for $g(5) = 37$ // Chinese Math. Acta. 1965. № 6. P. 105–127.
58. *Chen Jing-run* An estimate for $g(4)$ in Waring's problem // Acta Math. Sinica. 1974. № 17 (2). P. 131–142.
59. *Cheng Yu.-Yo.* Explicit estimate on primes between consecutive cubes // Rocky Mountain J. Math. 2010. № 40 (1). P. 117–153. doi: 10.1216/RMJ-2010-40-1-117
60. *Chowla S.* A remark on $g(n)$ // Proc. Indian Acad. Sci. A. 1939. № 9. P. 20–21.
61. *Chowla S.* On $g(k)$ in Waring's problem // Proc. Lahore Philos. Soc. 1944. № 6 (2). P. 16–17.
62. *Clark P. L.* Number theory: a contemporary introduction URL: http://math.uga.edu/~pete/4400FULL.pdf (data: 20.10.2020).
63. *Cook R. J.* An effective seven cube theorem // Bull. Austral. Math. Soc. 1984. № 30. P. 381–385.
64. *Dahse Z.* Der Kreis-Umfang für den Durchmesser 1 auf 200 Decimalstellen berechnet // J. Reine Angew. Math. 1844. № 27. P. 198. doi: 184410.1515/crll.1844.27.198
65. *Daublebsky von Sterneck R.* Uber die kleinste Anzahl Kuben, aus welchen jede Zahl bis 40000 zusammengesetzt werden kann // Akad. Wiss. Wien. Math.-Natur. Kl. Sitz. 1903. № 112. P. 1627–1666.
66. *Davenport H.* On Waring's problem for cubes // Acta Math. 1939. № 71. P. 123–143. doi: 10.1007/BF02547752
67. *Davenport H.* On Waring's problem for fourth powers // Ann. Math. 1939. № 40. P. 731–747. doi: 10.2307/1968889
68. *Davenport H.* On Waring's problem for fifth and sixth powers // Amer. J. Math. 1942. № 64. P. 199–207.
69. *Davenport H.* Some aspects of Hardy's mathematical work. V. Waring's problem // J. London Math. Soc. 1950. № 25. P. 119–125. doi: 10.1112/jlms/s1-25.2.119
70. *Davenport H., Heilbronn H.* On Waring's problem for fourth powers // Proc. London Math. Soc. 1936. № 41 (2). P. 143–150. doi: 10.1112/plms/s-2-41.2.143
71. *Davenport J. H., Siret Y., Tournier E.* Computer Algebra. London: Academic Press, 1988.
72. *Delmer F., Deshouillers J.-M.* On the computation of $g(k)$ in Waring's problem // Math. Comp. 1990. Vol. 54. P. 885–893.
73. *Deshouillers J.-M.* Problème de Waring pour les bicarrés: le point en 1984 // Théor. Analyt. Nombres Paris. 1984–85. Exp. 33. P. 1–5.
74. *Deshouillers J.-M.* Problème de Waring pour les bicarrés // Seminar on number theory, 1984–1985 (Talence, 1984/1985). Univ. Bordeaux I, Talence, 1985. Exp. 14. P. 1–47.
75. *Deshouillers J.-M.* Waring's problem and the circle-method // Number theory and applications (Banff, AB, 1988). NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., № 265, Kluwer Acad. Publ. Dordrecht, 1989. P. 37–44.
76. *Deshouillers J.-M.* Sur la majoration de sommes de Weyl biquadratiques // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 1992. Vol. 19, № 2. P. 291–304.
77. *Deshouillers J.-M., Dress F.* Sommes de diviseurs et structure multiplicative des entiers // Acta Arith. 1988. № 49 (4). P. 341–375. doi: 10.4064/aa-49-4-341-375
78. *Deshouillers J.-M., Dress F.* Sums of 19 biquadrates: on the representation of large integers // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 1992. Serie 4, № 19 (1). P. 113–153.
79. *Deshouillers J.-M., Dress F.* Numerical results for sums of five and seven biquadrates and consequences for sums of 19 biquadrates // Math. Comp. 1993. № 61. P. 195–207. doi: 10.1090/S0025-5718-1993-1201766-8
80. *Deshouillers J.-M., Hennecart F., Landreau B.* Sums of powers: an arithmetic refinement to the probabilistic model of Erdős and Rényi // Acta Arithmetica. 1998. Vol. 85. P. 13–33. doi: 10.4064/aa-85-1-13-33
81. *Deshouillers J.-M., Hennecart F., Landreau B.* 7373170279850 (With an appendix by I. Gusti Putu Purnaba) // Math. Comp. 2000. Vol. 69, № 229. P. 421–439.
82. *Deshouillers J.-M., Hennecart F., Landreau B.* Waring's problem for sixteen biquadrates — numerical results. Colloque International de Théorie des Nombres (Talence, 1999) // J. Théor. Nombres Bordeaux. 2000. Vol. 12, № 2. P. 411–422. doi: 10/5802/jmb.287
83. *Deshouillers J.-M., Kawada K., Wooley T. D.* On sums of sixteen biquadrates // Mém. Soc. Math. Fr. 2005. № 100. URL: http://www.numdam.org/issue/MSMF_2005_2_100__1_0.pdf (data: 20.10.2020).
84. *Dickson L. E.* Generalization of Waring's theorem on fourth, sixth, and eighth powers // Amer. J. Math. 1927. Vol. 49. P. 241–250. doi: 10.2307/2370754
85. *Dickson L. E.* Extensions of Waring's theorem on nine cubes // Amer. Math. Monthly. 1927. Vol. 34, № 4. P. 177–183.
86. *Dickson L. E.* Extensions of Waring's theorem on fourth powers // Bull. Amer. Math. Soc. 1927. Vol. 33. P. 319–327.
87. *Dickson L. E.* A generalization of Waring's theorem on nine cubes // Bull. Amer. Mat. Soc. 1927. Vol. 33. P. 299–300.
88. *Dickson L. E.* Simpler proofs of Waring's theorem on cubes with various generalizations // Trans. Amer. Math. Soc. 1928. Vol. 30, № 1. P. 1–18. doi: 10.2307/1989262
89. *Dickson L. E.* Proof of a Waring theorem on fifth powers // Bull. Amer. Math. Soc. 1931. Vol. 37. P. 549–553.
90. *Dickson L. E.* Minimum decomposition into n-th powers // Amer. J. Math. 1933. Vol. 55. P. 593–602.
91. *Dickson L. E.* Minimum decompositions into fifth powers. (Math. tables. 3) London: Office of the Brit. Assoc. f. the Advancement of Science. 1933.

92. *Dickson L. E.* Recent progress on Waring's theorem and its generalizations // Bull. Amer. Math. Soc. 1933. Vol. 39. P. 701–727. doi: 10.1090/S0002-9904-1933-05719-1
93. *Dickson L. E.* A new method for universal Waring theorems with details for seventh powers // Amer. Math. Monthly. 1934. Vol. 41. P. 547–555. doi: 10.1080/00029890.1934.11987646
94. *Dickson L. E.* Waring's problem for cubic functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1934. Vol. 36. P. 1–12.
95. *Dickson L. E.* Waring's problem for ninth powers // Bull. Amer. Math. Soc. 1934. Vol. 40. P. 487–493.
96. *Dickson L. E.* Universal Waring theorem for eleventh powers // J. Lond. Math. Soc. 1934. Vol. 9. P. 201–206.
97. *Dickson L. E.* A new method for Waring theorems with polynomial summands // Trans. Amer. Math. Soc. I: 1934. Vol. 36. P. 731–748; II: 1936. Vol. 39. P. 205–208. doi: 10.1090/S0002-9947-1936-1501842-7
98. *Dickson L. E.* Cyclotomy, higher congruences, and Waring's problem // Amer. J. Math. I: 1935. Vol. 57. P. 391–424; II: 1935. Vol. 57. P. 463–474. doi: 10.2307/2371217
99. *Dickson L. E.* Researches on Waring's problem. Washington, USA: Carnegie Inst. of Washington Publ. 1935. № 464.
100. *Dickson L. E.* Universal Waring theorems with cubic summands // Acta Arith. 1935. Vol. 1, № 1. P. 184–196.
101. *Dickson L. E.* On Waring's problem and its generalization // Ann. Math. 1936. Vol. 37, № 2. P. 293–316.
102. *Dickson L. E.* Universal Waring theorems // Monatsh. Math. Phys. 1936. Vol. 43. P. 391–400.
103. *Dickson L. E.* The ideal Waring theorem for twelfth powers // Duke Math. J. 1936. Vol. 2. P. 192–204.
104. *Dickson L. E.* Proof of the ideal Waring theorem for exponents 7–180 // Amer. J. Math. 1936. Vol. 58. P. 521–529.
105. *Dickson L. E.* Solution of Waring's problem // Amer. J. Math. 1936. Vol. 58. P. 530–535.
106. *Dickson L. E.* A generalization of Waring's problem // Bull. Amer. Math. Soc. 1936. Vol. 42. P. 525–529.
107. *Dickson L. E.* The Waring problem and its generalizations // Bull. Amer. Math. Soc. 1936. Vol. 42. P. 833–842.
108. *Dickson L. E.* Universal forms $\sum a_i x_i^n$ and Waring's problem // Acta Arith. 1937. Vol. 2. P. 177–196.
109. *Dickson L. E.* All integers except 23 and 239 are sums of eight cubes // Bull. Amer. Math. Soc. 1939. Vol. 45. P. 588–591. doi: 10.1090/S0002-9904-1939-07041-9
110. *Dickson L. E.* The collected mathematical papers of Leonard Eugene Dickson. Edited by Adrian Albert. New York: Chelsea Publishing Company. 1975.
111. *Dickson L. E.* Vol. I: Divisibility and primality in History of the theory of numbers. Mineola, NY: Dover Publications, 2005. 486 p.
112. *Dickson L. E.* Vol. II: Diophantine analysis in History of the theory of numbers. Mineola, NY: Dover Publications, 2005. 803 p.
113. *Dickson L. E.* Vol. III: Quadratic and higher forms in History of the theory of numbers. Mineola, NY: Dover Publications, 2005. 313 p.
114. *Dress F.* Amélioration de la majoration de $g(4)$ dans le problème de Waring: $g(4) \leq 34$ // Séminaire Delange—Pisot—Poitou. Théorie des Nombres. 1.11.1969–1970. Paris, 1970. P. 1–23.
115. *Dress F.* Sur le problème de Waring pour les puissances quatrièmes // Sci. Paris Sér. A–B. 1971. Vol. 272. P. A457–A459.
116. *Dress F.* Méthodes élémentaires dans le problème de Waring pour les entiers // Journées Arithmétiques Françaises, Mai 1971. Université de Provence, Marseille, 1971. 14 p.
117. *Dress F.* Théorie additive des nombres et problème de Waring // Séminaire de Théorie des Nombres. Univ. Bordeaux I, Talence, 1970–1971. Vol. 28. P. 1–9.
118. *Dress F.* Théorie additive des nombres, problème de Waring et théorème de Hilbert // Enseign. Math. 1972. Vol. 18. P. 175–190.
119. *Dress F.* Amélioration de la majoration de $g(4)$ dans le problème de Waring: $g(4) \leq 30$ // Acta Arith. 1973. Vol. 22. P. 137–147.
120. *Dumbaugh D., Shell-Gellasch A.* The "wide influence" of Leonard Eugene Dickson // Notices Amer. Math. Soc. 2017. Vol. 64, № 7. P. 772–776.
121. *Ehlich H.* Zur Pillaischen Vermutung // Arch. Math. 1965. Vol. 16. P. 223–226.
122. *Elkies N. D.* Every even number greater than 454 is the sum of seven cubes // arXiv:1009.3983 [math.NT] [v1] Tue, 21 Sep 2010. P. 1–9.
123. *Ellison W. J.* Waring's problem // Amer. Math. Monthly. 1971. Vol. 78, № 1. P. 10–36.
124. *Estermann T.* Proof that every large integer is a sum of seventeen biquadrates // Proc. London Math. Soc. 1936. Vol 41, № 2. P. 126–142.
125. *Estermann T.* On Waring's problem for fourth and higher powers // Acta Arith. 1936. Vol. 2. P. 197–211.
126. *Euler L.* De numeris amicabilibus (1747) // Euler Archive — All Works by Eneström Number. E100. 2018. https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/100 (data: 20.10.2020).
127. *Euler L.* De numeris amicabilibus (1750) // Euler Archive — All Works by Eneström Number. E152. 2018. https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/152 (data: 20.10.2020).
128. *Euler L.* "Opera postuma. Mathematica et physica. Anno 1844 detecta quae Academiae Scientiarum Petropolitanae. Tomus I." Petropoli, 1862. [Online]. Available: https://ia800204.us.archive.org/18/items/operapostumamath01euleuoft/operapostumamath01euleuoft.pdf (data: 20.10.2020).
129. *Everet L. J.* Reviews: Innumeracy: Mathematical Illiteracy and its Consequences // Amer. Math. Monthly. 1990. Vol. 97, № 1. P. 88–91.

130. *Fleck A.* Über die Darstellung ganzer Zahlen als Summen von positiven Kuben und von Biquadraten ganzer Zahlen // Sitzungsber. Berl. Math. Ges. 1906. Vol. 5. P. 2–9.
131. *Fleck A.* Über die Darstellung ganzer Zahlen als Summen von sechsten Potenzen ganzer Zahlen // Math. Ann. 1907. Vol. 64, № 4. P. 561–566.
132. *Frobenius G.* Über den Stridsbergschen Beweis des Waringschen Satzes // Berl. Ber. 1912. P. 666–670.
133. von zur Gathen J., Gerhard J. Modern computer algebra. 3rd edition. Cambridge: Cambridge University Press, 2013. 795 p.
134. *Gelbcke M.* Zum Waringschen Problem // Math. Ann. 1931. Vol. 105. P. 637–652.
135. *Guy R. K.* The strong law of small numbers // Amer. Math. Monthly. 1988. Vol. 95, № 8. P. 697–712.
136. *Guy R. K.* The second strong law of small numbers // Math. Mag. 1990. Vol. 63, № 1. P. 3–20.
137. *Habsieger L.* Explicit lower bounds for $\|(3/2)^k\|$ // Acta Arith. 2003. Vol. 106, № 3. P. 299–309.
138. *Halberstam H., Roth K. F.* Sequences. Oxford: Clarendon Press, 1966.
139. *Hardy G. H.* Some famous problems of the theory of numbers and in particular Waring's problem. An inaugural lecture delivered before the University of Oxford // Nature. 1920. Vol. 106. P. 239–240.
140. *Hardy G. H.* A mathematician's apology. With a foreword by C. P. Snow. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1967.
141. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* A new solution of Waring's problem // Quart. J. Math. 1919. Vol. 48. P. 272–293.
142. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Some Problems of «partitio numerorum», I: A new solution of Waring's problem // Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.–Phys. Kl. 1920. P. 33–54.
143. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Some problems of «partitio numerorum», II. Proof that every large number is the sum of at most 21 biquadrates // Math. Z., 1921. Vol. 9. P. 14–27.
144. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Some problems of «partitio numerorum», IV: The singular series in Waring's problem and the value of the number $G(k)$ // Math. Z., 1922. Vol. 12. P. 161–168.
145. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Some problems of «partitio numerorum», VI: Further researches in Waring's problem // Math. Z. 1925. Vol. 23. P. 1–37.
146. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* The collected works of G. H. Hardy. Vol. 1. New York: Oxford University Press, 1966.
147. *Hardy G. H., Wright E. M.* An introduction to the theory of numbers, 5th ed. Oxford: Oxford University Press, 1979.
148. *Hurwitz A.* Uber die Erzeugung der Invarianten durch Integration // Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. 1897. P. 71–90.
149. *Hausdorff F.* Zur Hilbertschen Losung des Waringschen Problems, Math. Ann. 1909. Vol. 67. P. 301–305.
150. *Heilbronn H.* Über das Waringsche Problem // Acta Arith. 1935. Vol. 1. P. 212–221.
151. *Hilbert D.* Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl n^{ter} Potenzen (Waringsches problem). Dem Andenken an Hermann Minkowski gewidmet // Gött. Nachr. 1909. P. 17–36; Abdruck mit Veränderungen und Zusätzen: Math. Ann, 1909. Vol. 67. P. 281–300.
152. *Hua L.-K.* Hua, L.K.: On Waring's problem // Quart. J. Math. 1938. Vol. 9. P. 199—202.
153. *Hua L.-K.* On Waring's problem for fifth powers // Proc. London Math. Soc. 1939. Vol. 45, № 1. P. 144–160.
154. *Hua L.-K.* Introduction to number theory. Translated from the Chinese by Peter Shiu. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1982. 572 p.
155. *Hua L.-K.* Selected papers. Edited, with a preface and a biographical note of Hua by Heini Hadberstam. New York: Springer, 1983.
156. *Hurwitz A.* Über die Darstellung der ganzen Zahlen als Summen von n^{ten} Potenzen ganzer Zahlen // Math. Ann. 1908. Vol. 65. P. 424–427.
157. *Hurwitz A.* Über definite Polynome // Math. Ann. 1912. Vol. 73. P. 173–176.
158. *Iwaniec H,.* The sixtieth birthday of Jean-Marc Deshouillers // Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici. 2007. Vol. 37, № 1. P. 7–16.
159. *Jacobi C. G. J.* Über die Zusammensetzung der Zahlen aus ganzen positiven Cuben; nebst einer Tabelle für die kleinste Cubenanzahl, aus welcher jede Zahl bis 12000 zusammengesetzt werden kann // J. Reine Angew. Math. 1851. Vol. 42. P. 41–69; reprinted in C. G J. Jacobi, Gesammelte Werke. Bd. 6. Berlin: Verlag von Georg Reimer, 1891. P. 322–354.
160. *James R. D.* The value of the number $g(k)$ in Waring's problem // Trans. Amer. Math. Soc. 1934. Vol. 36. P. 395–444.
161. *James R. D.* On Waring's problem for odd powers // Proc. London Math. Soc. (2). 1934. Vol. 37. P. 257–291.
162. *James R. D.* The constants in Waring's problem for odd powers // Bull. Amer. Math. Soc. 1935. Vol. 41. P. 689–694.
163. *James R. D., Zuckerman H. S.* New results for the number $g(n)$ in Waring's problem // Bull. Amer. Math. Soc. 1935. Vol. 41. P. 197–198.
164. *Kadiri H.* Short effective intervals containing primes in arithmetic progressions and the seven cubes problem // Math. Comput. 2008. Vol. 77. P. 1733–1748.
165. *Kamke E.* Verallgemeinerungen des Waring—Hilbertschen Satzes // Math. Ann. 1921. Vol. 83. P. 85–112.
166. *Kamke E.* Bemerkung zum allgemeinen Waringschen Problem // Math. Zeitschr. 1922. Vol. 15. P. 188–194.
167. *Kamke E.* Zum Waringschen Problem für rationale Zahlen und Polynome // Math. Ann. 1922. Vol. 87. P. 238–245.
168. *Kawada K.* On development of techniques in research on Waring's problem // Sugaku Expositions. 2009. Vol. 22, № 1. P. 57–89.
169. *Kempner A.* Bemerkungen zum Waringschen Problem // Math. Ann. 1912. Vol. 72. P. 387–399.
170. *Kempner A. J.* Über das Waringsche Problem und einige Verallgemeinerungen. Diss. Göttingen. 1912).

171. *Kempner A. J.* The development of “partitio numerorum”, with particular reference to the work of Messrs. Hardy, Littlewood and Ramanujan // Amer. Math. Monthly. 1923. Vol. 30. P. 354–369.
172. *Kreuzer M., Robbiano L.* Computational commutative algebra. Vol. 1. Berlin: Springer-Verlag, 2000. 321 p. Vol. 2. 2005. 586 p.
173. *Kubina J. M., Wunderlich M. C.* Extending Waring’s conjecture to 471,600,000 // Math. Comp. 1990. Vol. 55, № 192. P. 815–820.
174. *Kürschák J.* Über die *Liouville*sche Identität // Arch. Math. Phys. 1911. Vol. 18. P. 242–243.
175. *Landau E.* Über die Darstellung einer ganzen Zahl als Summe von Biquadraten // Rend. Circ. Matem. Palermo. 1907. Vol. 23. P. 91–96. doi: 10.1007/BF03013509
176. *Landau E.* Über eine Anwendung der Primzahltheorie auf das Waringsche Problem in der elementaren Zahlentheorie // Math. Ann. 1908. Vol. 66. № 1. P. 102–105. doi: 10.1007/BF01450914
177. *Landau E.* Zur Hardy—Littlewoodschen Lösung des Waringschen Problems // Gött. Nachr. 1921. P. 88–92.
178. *Landau E.* Zum Waringschen Problem // Math. Zeitschr. I. 1922. Vol. 12. P. 219–247; II. 1929. Vol. 31. P. 149–150; III. 1930. Vol. 32. P. 699–702.
179. *Landau E.* Die Winogradowsche Methode zum Beweis des Waring—Hilbert—Kamkeschen Satzes // Acta Math. 1926. Vol. 48. P. 217–253.
180. *Landau E.* Zum Waringschen Problem // Proceedings L. M. S. 1926. Vol. 25. P. 484–486
181. *Landau E.* Vorlesungen über Zahlentheorie. Bd. I–III, Leipzig: Hirzel, 1927.
182. *Landau E.* Über die neue Winogradoffsche Behandlung des Waringschen Problems // Math. Z. 1929. Vol. 31. P. 319–338. doi: 10.1007/BF01246414
183. *Landreau B.* Modèle probabiliste pour les sommes de s puissances s-ièmes // Compositio Math. 1995. Vol. 99. P. 1–31.
184. *Lebesgue V.-A.* Exercises d’analyse numérique. Paris, 1859.
185. *Linnik U. V.* On the representation of large numbers as sums of seven cubes // Matem sb. 1943. Vol. 12. № 2. P. 218–224.
186. *Lucas E.* Sur la décomposition des nombres en bicarrés // N. C. M. 1878. Vol. IV. P. 323–325.
187. *Lucas E.* Sur un théorème de M. Liouville concernant la décomposition des nombres en bicarrés // Nouvelles Annales de Mathématigues. 1878. Vol. 17. P. 536–537.
188. *Mahler K.* On the fractional parts of the powers of a rational number // II. Mathematika. 1957. Vol. 4. P. 122–124.
189. *Maillet E.* Sur la décomposition d’un nombre entier en une somme de cubes d’entiers positifs, Assoc. Franç // Bordeaux Notes Mém. 1895. Vol. 24. P. 242–247
190. *Maillet E.* Quelques extensions de théorème de Fermat sur les nombres polygones // J. Math. Pures et App. 1896. Vol. 2. P. 363–380.
191. *Maillet E.* Sur la décomposition d’un entier en une somme de puissances huitièmes d’entiers. (Problème de Waring) // Bull. Soc. Math. France. 1908. Vol. 36. P. 69–77.
192. *Malter A., Schleicher D., Zagier D.* New looks at old number theory // Amer. Math. Monthly. 2013. Vol. 120, № 3. P. 243–264. doi: 10.4169/amer.math.monthly.120.03.243
193. *McCurley K. S.* Explicit estimates for functions of primes in arithmetic progressions // Ph. D. Thesis, Univ. Illinois at Urbana-Champaign, 1981. 134 p.
194. *McCurley K. S.* An effective seven cube theorem // J. Number Theory. 1984. Vol. 19, № 2. P. 176–183.
195. *Narkiewicz W.* Teoria liczb, 3 wyd. Warszawa: PWN, 2003. 400 p.
196. *Narkiewicz W.* Classical problems in number theory. Warszawa: PWN. 1986. 363 p.
197. *Narkiewicz W.* Elementary and analytic theory of algebraic numbers. 3rd ed. Berlin: Springer, 2004. 708 p.
198. *Narkiewicz W.* Rational number theory in the 20th century. From PNT to FLT. Berlin: Springer, 2012. 654 p.
199. *Nathanson M. B.* Additive number theory. The classical bases. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer, 1996. 342 p.
200. *Nathanson M. B.* Elementary methods in number theory. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 2000. 513 p.
201. *Newman D. J.* A simplified proof of Waring’s conjecture // Michigan Math. J. 1960. Vol. 7, № 3. P. 291–295.
202. *Niven I.* An unsolved case of the Waring problem // Amer. J. Math. 1944. Vol. 66. P. 137–143.
203. *Oppenheim A.* Hilbert’s proof of Waring’s theorem // Messenger. 1929. Vol. 58. P. 153–158.
204. *Ostrowski A.* Bemerkung zur Hardy—Littlewoodschen Lösung des Waringschen Problems // Math. Zeitschr. 1921. Vol. 9. P. 28–34. doi: 10.1007/BF01378333
205. *Pall G.* Quaternions and sums of three squares // Amer. J. Math. 1942. Vol. 64. P. 503–513. doi: 10.2307/2371700
206. The PARI Group. Univ. Bordeaux. PARI/GP version 2.11.0 (2018). URL: http://pari.math.u-bordeaux.fr/ (data: 20.10.2020).
207. *Pillai S. S.* On Waring’s problem // J. Annamalai Univ. I: 1936. Vol. 5. P. 145–166; III: 1936. Vol. 6. P. 50–53; IV: 1936. Vol. 6. P. 54–64; VI: Polynomial summands. 1937. Vol. 6. P. 171–197.
208. *Pillai S. S.* On Waring’s problem // J. Indian Math. Soc. 1936. Vol. 2. P. 16–44 (Errata. J. Indian math. Soc. 1936. Vol. 2); V: On $g(6)$. 1937. Vol. 2. P. 213–214; VIII: With polynomial summands. 1939. Vol. 3. P. 205–220; IX: On universal Waring’s problem with powers of primes. 1939. Vol. 3. P. 221–225.
209. *Pillai S. S.* On Waring’s problem: $g(6) = 73$ // Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A. 1940 Vol. 12. P. 30–40.

210. *Pillai S. S.* Collected works of S. Sivasankaranarayana Pillai. Edited by R. Balasubramanian and R. Thangadurai. Mysore, India: Ramanujan Mathematical Society, 2010.
211. *Poincaré H.* Rapport sur le prix Bolyai // Palermo Rend. 1911. Vol. 31. P. 109–132.
212. *Pollack P.* Not always buried deep. A second course in elementary number theory // Amer. Math. Soc., Providence. RI, 2009. 303 p.
213. *Pollack P.* On Hilbert's solution of Waring's problem // Cent. Eur. J. Math. 2011. Vol. 9, № 2. P. 294–301.
214. *Pollack P., Schorn P.* Dirichlet's proof of the three-square theorem: an algorithmic perspective // Math. Comp. 2019. Vol. 88. P. 1007–1019. doi: 10.1090/mcom/3349
215. *Ramaré O.* An explicit seven cube theorem // Acta Arith. 2005. Vol. 118, № 4. P. 375–382.
216. *Ramaré O.* An explicit result of the sum of seven cubes // Manuscripta Math. 2007. Vol. 124, № 1. p. 59–75.
217. *Ramaré O.* État des lieux. p. 1–19. URL: http://math.univ-lille1.fr/~ramare/Maths/ExplicitJNTB.pdf (data: 20.10.2020).
218. *Réalis, S.* Note sur un théorème d'arithmétique // Nouv. Corresp. Math. 1878. Vol. 4. P. 209–210.
219. *Remak R.* Bemerkung zu Herrn Stridsbergs Beweis des Waringschen Theorems // Math. Ann. 1912. Vol. 72. P. 153–156. doi: 10.1007/BF01667320
220. *Rieger G. J.* Zur Hilbertschen Lösung des Waringschen Problems: Abschätzung von $g(n)$ // Arch. Math. 1953. Vol. 4. P. 275–281. doi: 10.1007/BF01899890
221. *Rieger G. J.* Zu Linniks Lösung des Waringschen Problems: Abschätzung von $g(n)$ // Math. Z. 1954. Vol. 60. P. 213–234. doi: 10.1007/BF01187372
222. *Rieger G. J.* Zum Waringschen Problem für algebraische Zahlen und Polynome // J. Reine Angew. Math. 1956. Vol. 195. P. 108–120. doi: 10.1515/crll.1955.195.108
223. *Romani F.* Computations concerning Waring's problem for cubes // Calcolo. 1982. Vol. 19. P. 415–431.
224. *Rubugunday R.* On $g(k)$ in Waring's problem // J. Indian Math. Soc. 1942. Vol. 6. P. 192–198.
225. *Schmidt E.* Zum Hilbertschen Beweise des Waringschen Theorems // Math. Ann. 1913. Vol. 74. P. 271–274.
226. *Sierpiński W.* Elementary theory of numbers. Warszawa: PWN, 1964. 480 p.
227. *Siksek S.* Every integer greater than 454 is the sum of at most seven positive cubes // Algebra Number Theory. 2016. Vol. 10, № 10. P. 2093–2119. doi: 10.2140/ant.2016.10.2093
228. *Small C.* Waring's problem // Math. Mag. 1977. Vol. 50, № 1. P. 12–16. doi: 10.2307/2689743
229. *Stemmler R. M.* The ideal Waring theorem for exponents 401–200,000 // Math. Comput. 1964. Vol. 18. P. 144–146.
230. *Stridsberg E.* Öfret Hilberts bevis för Warings sats. Not 1 och 2 // Arkiv för Math., Astr. Fys. I : 1910. Vol. 6, № 32; II: 1911. № 39.
231. *Thomas H. E.* A numerical approach to Waring's problem for fourth powers. Ph. D. Thesis, Univ. Michigan. 1973. 455 p.
232. *Thomas H. E.* Waring's problem for twenty-two biquadrates // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. Vol. 193. P. 427–430.
233. *Trost E.* Eine Bemerkung zum Waringschen Problem // Elem. Math. 1958. Vol. 13. P. 73–75.
234. *Vaughan R. C.* On Waring's problem for cubes, // I: J. Reine Angew. Math. 1986. Vol. 363. P. 122–170; II: J. London Math. Soc. 1989. Vol. 39. P. 205–218.
235. *Vaughan R. C.* The Hardy—Littlewood Method, Second edition. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
236. *Vaughan R. C., Wooley T. D.* Waring's problem: a survey // Number Theory for the Millennium, III (Urbana, IL, 2000), 2002. P. 301–340, URL: https://www.researchgate.net/publication/2842101_Waring\T2A\textquoterights_Problem_A_Survey (data: 20.120.2020).
237. *Vinogradov I.* Une nouvelle variante de la démonstration du théorème de Waring // Compt. Rend. Acad. Sci. Paris. 1935. Vol. 200. P. 182–184.
238. *Vinogradow I.* An asymptotic formula for the number of representations in Waring's problem // Matem. sb. 1935. Vol. 42, № 5. P. 531–534.
239. *Vinogradow I.* On Waring's problem // Ann. of Math. 1935. Vol. 36, № 2. P. 395–405. doi: 10.2307/1968579
240. *Vinogradow I.* On asymptotic formula in Warings problem // Matem. sb. 1936. Vol. 43, № 2. P. 169–174.
241. *Waring E.* Meditationes Algebraicae. URL: https://archive.org/details/bub_gb_1MNbAAAAQAAJ (data: 20.10.2020).
242. *Watson G. L.*, A proof of the seven cube theorem // J. London Math. Soc. 1951. Vol. 26. P. 153–156.
243. *Watson G. L.*, A simple proof that all large integers are sums of at most eight cubes // Math. Gaz. 1953. Vol. 37. P. 209–211. doi: 10.2307/3608305
244. *Watt S. M.* Making Computer Algebra More Symbolic // Proc. Transgressive Computing 2006: A conference in honor or Jean Della Dora (TC 2006). April 24–26 2006, Granada, Spain. 2006. P. 43–49.
245. *Watt S. M.* Two Families of Algorithms for Symbolic Polynomials // Computer Algebra 2006: Latest Advances in Symbolic Algorithms, Proceedings of the Waterloo Workshop, World Scientific. 2007. P. 193–210.
246. *Watt S. M.* Symbolic Polynomials with Sparse Exponents // Proc. Milestones in Computer Algebra: a Conference in Honour of Keith Geddes' 60th Birthday (MICA 2008). May 1–3 2008. Stonehaven Bay, Trinidad and Tobago, University of Western Ontario. 2008. P. 91–97.
247. *Watt S. M.* Functional Decomposition of Symbolic Polynomials // Proc. International Conference on Computational Sciences and its Applications (ICCSA 2008). June 30–July 3 2008. Perugia, Italy: IEEE Computer Society. P. 353–362.
248. *Weil A.* Two lectures on number theory, past and present // Enseign. Math. 1974. Vol. 20. P. 87–110.

249. *Weil A.* Number theory. An approach through history from Hammurapi to Legendre. Reprint of the 1984 edition. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston, Inc. Boston: MA, 2007. 377 p.
250. *Western A. E.*, Computations concerning numbers representable by four or five cubes // J. London Math. Soc. 1926. Vol. 1. P. 244–251.
251. *Weyl H.* Bemerkung über die Hardy—Littlewoodschen Untersuchungen zum Waringschen Problem // Gött. Nachr. 1921. P. 189–192. doi: 10.1112/jlms/s1-1.4.244
252. *Wieferich A.* Zur Darstellung der Zahlen als Summen von fünften und siebenten Potenzen positiver ganzer Zahlen // Math. Ann. 1909. Vol. 67. P. 61–75. doi: 10.1007/BF01451870
253. *Wieferich A.* Beweis des Satzes, daß sich eine jede ganze Zahl als Summe von höchstens neun positiven Kuben darstellen läßt // Math. Ann. 1909. Vol. 66. P. 95–101.
254. *Wieferich A.* Über die Darstellung der Zahlen als Summen von Biquadraten // Math. Ann. 1909. Vol. 66. P. 106–108.
255. *Winogradow J. M.*, Sur un théorème général de Waring // Matem. sb. 1924. Vol. 31, № 3–4. P. 490–507.
256. *Wooley T. D.* Breaking classical convexity in Waring's problem: sums of cubes and quasi-diagonal behaviour // Invent. Math. 1995. Vol. 122. P. 421–451.
257. *Zagier D.* A one-sentence proof that every prime $p \equiv 1 \mod 4$ is a sum of two squares // Amer. Math. Monthly. 1990. Vol. 97, № 2. P. 144.
258. *Zornow A.* De compositione numerorum e cubis integris positivis // J. Reine Angew. Math. 1835. Vol. 14. P. 276–280.
259. *Zuckerman H. S.* New results for the number $g(n)$ in Waring's problem // Amer. J. Math. 1936. Vol. 58. P. 545–552.

Поступила в редакцию 27.08.2020, окончательный вариант — 20.10.2020.

Вавилов Николай Александрович, доктор физико-математических наук, профессор факультета математики и компьютерных наук СПбГУ, ✉ nikolai-vavilov@yandex.ru

Computer tools in education, 2020
№ 3: 5–55
http://cte.eltech.ru
doi:10.32603/2071-2340-2020-3-5-55

Computers as Novel Mathematical Reality: II. Waring Problem

Vavilov N. A.[1], Dr. Sci., Professor, ✉ nikolai-vavilov@yandex.ru

[1]Saint Petersburg State University, 29, Line 14th, Vasilyevsky Island, 199178, Saint Petersburg, Russia

Abstract

In this part I discuss the role of computers in the current research on the additive number theory, in particular in the solution of the classical Waring problem. In its original XVIII century form this problem consisted in finding for each natural k the smallest such $s = g(k)$ that all natural numbers n can be written as sums of s non-negative k-th powers, $n = x_1^k + \ldots + x_s^k$. In the XIX century the problem was modified as the quest of finding such minimal $s = G(k)$ that *almost all* n can be expressed in this form. In the XX century this problem was further specified, as for finding such $G(k)$ *and* the precise list of exceptions. The XIX century problem is still unsolved even or cubes. However, even the solution of the original Waring problem was [almost] finalised only in 1984, with heavy use of computers. In the present paper we document the history of this classical problem itself and its solution, as also discuss possibilities of using this and surrounding material in education, and some further related aspects.

Keywords: *sums of powers, Waring problem, sums of squares, sums of cubes, sums of biquadrates, polynomial computer algebra, Hilbert identities, circle method, Dickson's ascent.*

Citation: N. A. Vavilov, “Computers as Novel Mathematical Reality. II. Waring Problem,” *Computer tools in education*, no. 3, pp. 5–55, 2020 (in Russian); doi: 10.32603/2071-2340-2020-3-5–55

Acknowledgements: *The present paper emerged as part of my work on the RFBR grant 19-29-14141.*

References

1. M. Aigner and G. M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, Moscow: Binom, Laboratoriya znanii, 2015 (in Russian).
2. W. Borho, “Befreundete Zahlen. Ein zweitausend Jahre altes Thema der elementaren Zahlentheorie,” in *Lebendige Numbers*, Moscow: Mir, 1985, pp. 11–41 (in Russian).
3. B. M. Bredikhin and T. I. Grishina, “An elementary estimate of $G(n)$ in Waring’s problem,” *Matematicheskie Zametki*, vol. 24, no. 1, pp. 7–18, 1978 (in Russian).
4. A. Bufetov, A. Ya. Kanel’, “The new elementary solution of the Waring problem,” *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 3, no. 4, 1239–1252, 1997 (in Russian).
5. N. A. Vavilov, “Computers as novel mathematical reality. I. Personal Account,” *Computer tools in education*, no. 2, pp. 5–26, 2020 (in Russian); doi: 10.32603/2071-2340-2020-2-5–26
6. N. A. Vavilov, *Konkretnaya teoriya grupp* [Concrete group theory], vol. 1, 2020 (in Russian). [Online]. Available: http://www.add3d.ru/wp-content/uploads/2019/10/Vavilov-Groups.pdf
7. N. A. Vavilov and V. G. Khalin, *Zadachi po kursu Matematika i Komp’yuter. Vyp. 1. Arifmetika i teoriya chisel* [Exercises for the course "Mathematics and Computers". Issue 1, Arithmetics and Number Theory], St. Petersburg, Russia: OTsEiM, 2005 (in Russian).
8. N. A. Vavilov and V. G. Khalin, *Dopolnitel’nye zadachi po kursu Matematika i Komp’yuter* [Supplementary exercises for the course "Mathematics and Computers"], St. Petersburg, Russia: OTsEiM, 2006 (in Russian).
9. N. A. Vavilov, V. G. Khalin, and A. V. Yurkov, `Mathematica` *dlya nematematika* [`Mathematica` for nonmathematician], [In Print], St. Petersburg, Russia, 2020 (in Russian).
10. B. A. Venkov, *Issledovaniya po teorii chisel. Izbrannye trudy*, [Studies in number theory. Selected works], [With a supplement by B. B. Venkov and A. V. Malyshev], Leningrad, USSR: Nauka, 1981 (in Russian).
11. I. M. Vinogradov, “On Waring’s theorem,” *Izv. Akad. Nauk SSSR, Otd. Fiz.-Mat. Nauk*, no. 4, pp. 393–400, 1928 (in Russian).
12. I. M. Vinogradov, “A new solution of Waring’s problem,” *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 2, no. 6, pp. 337–341, 1934 (in Russian).
13. I. M. Vinogradov, “A new evaluation of $G(n)$ in Waring’s problem,” *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 4, no. 5–6, pp. 249–253, 1934 (in Russian).
14. I. M. Vinogradov, “On the upper bound of $G(n)$ in Waring’s problem,“ *Izv. Akad. Nauk SSSR, Otd. Mat. Estestv. Nauk*, no. 10, pp. 1455–1469, 1934 (in Russian).
15. I. M. Vinogradov, “A new variant of the proof of Waring’s theorem,” *Trudy Matem. Instituta im. V. A. Steklova*, vol. 9, pp. 5–15, 1935 (in Russian).
16. I. M. Vinogradov, *Izbrannye trudy* [Selected works], Moscow: Izdat. Akad. Nauk SSSR, 1952 (in Russian).
17. M. A. Gelbcke, “A propos de $g(k)$ dans le probléme de Waring,” *Izv. Akad. Nauk SSSR, Otd. Fiz.-Mat. Nauk*, no. 5, pp. 631–640, 1933 (in Russian).
18. A. O. Gel’fond and Yu. V. Linnik, Elementary methods in analytic number theory, L. J. Mordell ed., Chicago, Ill.: Rand McNally & Co., 1965.
19. A. I. Generalov, “A combinatorial proof of Euler—Fermat’s theorem on presentation of primes of the form $p = 8k + 3$ by the quadratic form $x^2 + 2y^2$,” *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, vol. 330, pp. 155–157, 2006 (in Russian).
20. Diophantus of Alexandria, *Arifmetika i Kniga o mnogougol’nykh chislakh* [Arithmetica and the Book of Polygonal Numbers], I. G. Bashmkova, ed., Moscow: Nauka, 1974 (in Russian).
21. A. Dubickas, “A lower bound for the quantity $\|(3/2)^k\|$,” *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 45, no. 4, pp. 153–154, 1990 (in Russian).
22. O. A. Ivanov, *Izbrannye glavy elementarnoi matematiki* [], St. Petersburg, Russia: Izd-vo SPbGU, 1995 (in Russian).
23. A. A. Karatsuba, *The Hilbert—Kamke problem in analytic number theory.* , Moscow: Nauka, 1983 (in Russian).
24. A. A. Karatsuba, “The Hilbert—Kamke problem in analytic number theory,” *Mat. Zametki*, vol. 41, no. 2, pp. 272–284, 1987 (in Russian).
25. J. H. Conway and D. A. Smith, *On Quaternions and Octonions: Their Geometry, Arithmetic and Symmetry*, St. Petersburg, M: MTsNMO, 2009 (in Russian).
26. U. V. Linnik, “An elementary solution of the problem of Waring by Schnirelman’s method,” *Rec. Math.* [Mat. Sbornik], vol. 12, no. 2, pp. 225–230, 1943 (in Russian).
27. Yu. V. Linnik, “Quaternions and Cayley numbers; some applications of the arithmetic of quaternions,” *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 4, no. 5, pp. 49–98, 1949 (in Russian).

28. Yu. V. Linnik and A. V. Malyshev, “Application of the arithmetic of quaternions to the theory of ternary quadratic forms and to the decomposition of numbers into cubes”, *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 8, no. 5, pp. 3–71, 1953 (in Russian).
29. Yu. V. Nesterenko, “On Waring’s problem (elementary methods),” *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, vol. 322, pp. 149–175, 2005 (in Russian).
30. A. Ya. Khinchin, *Three Pearls of Number Theory*, Moscow: Nauka, 1979 (in Russian).
31. L. Hua, *Die Abschätzung von Exponentialsummen und ihre Anwendg in der Zahlentheorie*, Moscow: Mir, 1964 (in Russian).
32. L. G. Shnirel’man, “On the additive properties of numbers,” *Uspekhi Mat. Nauk*, no. 6, pp. 9–25, 1939 (in Russian).
33. L. G. Shnirel’man, “On the additive properties of numbers,” *Uspekhi Mat. Nauk*, no. 7, pp. 7–46, 1940 (in Russian).
34. R. G Archibald, “Waring’s problem: squares,” *Scripta Math.*, vol. 7, pp. 33–48, 1940; doi: 10.2307/3606948
35. F. C. Auluck, “On Waring’s problem for biquadrates,” in *Proc. Indian Acad. Sci.- Section A*, vol. 11, no. 5, 1940, 437–450; doi:10.1007/BF03046010
36. P. Bachmann, *Niedere Zahlentheorie. Zweiter Teil: Additive Zahlentheorie*, Leipzig, Germany: B. G. Teubner, 1910.
37. W. S. Baer, “Üdie Zerlegung der ganzen Zahlen in sieben Kuben,” *Math. Ann.*, vol. 74, no. 4, 511–514, 1913; doi: 10.1007/BF01456910
38. W. S. Baer, *Beiträge zum Waringschen Problem*, Göttingen, Germany: Dietrich, 1913.
39. R. Balasubramanian, “On Waring’s problem: $g(4) \leq 21$,” *Hardy—Ramanujan J.*, no. 2, pp. 1–31, 1979.
40. R. Balasubramanian, “On Waring’s problem: $g(4) \leq 20$,” *Hardy—Ramanujan J.*, no. 8, pp. 1–40, 1985.
41. R. Balasubramanian, “Highly composite,” R. Bhatia et al., eds., in *Proc. of the international congress of mathematicians (ICM 2010), Hyderabad, India, August 19–27, 2010*, vol. I, River Edge, NJ: World Scientific, New Delhi: Hindustan Book Agency, 2011, pp. 176–209.
42. R. Balasubramanian, J.-M. Deshouillers, and F. Dress, “Probl/’eme de Waring pour les bicarrés,” *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math*, vol. 303, no. 4, pp. 85–88, 1986 (in French).
43. P. M. Batchelder, “Waring’s Problem,” *Amer. Math. Monthly*, vol. 43, no. 1, pp. 21–27, 1936.
44. E. Becker, “Summen n-ter Potenzen in Körpern,” *J. Reine Angew. Math.*, no. 307–308, pp. 8–30, 1979; doi: 10.1515/crll.1979.307-308.8
45. M. A. Bennett, “Fractional parts of powers of rational numbers,” *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, vol. 114, no. 2, pp. 191–201, 1993; doi: 10.1017/S0305004100071528
46. M. A. Bennett, “Fractional parts of powers and related topics,” *Ph. D. Thesis, Univ. British Columbia*, Canada, 1993; doi: 10.14288/1.0079903
47. M. A. Bennett “An ideal Waring problem with restricted summands,” *Acta Arith.*, vol. 66, no. 2, pp. 125–132, 1994; doi: 10.4064/aa-66-2-125-132
48. L. Berggren, J. Borwein, and P. Borwein, *Pi: A source book*, 3rd ed., New York: Springer-Verlag, 2004.; doi: 10.1007/978-1-4757-4217-6
49. F. Bertault , O. Ramaré, and P. Zimmermann, “On sums of seven cubes,” *Math. Comp.*, vol. 68, no. 227, pp. 1303–1310, 1999; doi: 10.1090/S0025-5718-99-01071-6
50. F. Beukers, “Fractional Parts of Powers of Rational Numbers,” *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, vol. 90, pp. 13–20, 1981.
51. Ch. Binder, “100 Jahre Mertenssche Vermutung,” *Int. Math. Nachr. Wien*, vol. 178, pp. 2–6, 1998.
52. J. Bohman and C. E. Fröberg, “Numerical investigations of Waring’s problem for cubes,” *BIT Numer. Math*, vol. 21, pp. 118–122, 1981; doi: 10.1007/s10543-020-00827-y
53. K. D. Boklan and N. D. Elkies, “Every multiple of 4 except 212, 364, 420, and 428 is the sum of seven cubes,” in *arXiv:0903.4503v1 [math.NT]*, 26 Mar 2009. [Online]. Available: https://arxiv.org/pdf/0903.4503.pdf
54. C. A. Bretschneider, “Tafeln für die Zerlegung der Zahlen bis 4100 in Biquadrate,” *J. Reine Angew. Math.*, vol. 46, pp. 1–23, 1853.
55. J. W. S. Cassels and R. C. Vaughan, “Obituary: Ivan Matveevich Vinogradov,” *Bull. London Math. Soc.*, vol. 17, no. 6, pp. 584–600, 1985.
56. J.-R. Chen, “Waring’s problem for $g(5)$,” *Sci. Record (N.S.)*, vol. 3, pp. 27–330, 1959.
57. J.-R. Chen, “Waring’s problem for $g(5) = 37$,” *Chinese Math. Acta*, vol. 6, pp. 105–127, 1965.
58. J.-R. Chen, “An estimate for $g(4)$ in Waring’s problem,” *Acta Math. Sinica*, vol. 17, no. 2, pp. 131–142, 1974 (in Chinese).
59. Yu.-Yo. Cheng, “Explicit estimate on primes between consecutive cubes,” *Rocky Mountain J. Math.*, vol. 40, no. 1, pp. 117–153, 2010; doi: 10.1216/RMJ-2010-40-1-117
60. S. Chowla, “A remark on $g(n)$,” *Proc. Indian Acad. Sci. A*, vol. 9, pp. 20–21, 1939; doi: 20–21. 10.1007/BF03045445
61. S. Chowla, “On $g(k)$ in Waring’s problem,” in Proc. Lahore Philos. Soc., vol. 6, no. 2, 1944, pp. 16–17.
62. P. L. Clark, “Number theory: a contemporary introduction,” in *Dep. of Mathematics, University of Georgia*. [Online]. Available: http://math.uga.edu/ pete/4400FULL.pdf
63. R. J. Cook, “An effective seven cube theorem,” *Bull. Austral. Math. Soc.*, vol. 30, no. 3, pp. 381–385, 1984; doi: 10.1017/S0004972700002094
64. Z. Dahse, “Der Kreis-Umfang für den Durchmesser 1 auf 200 Decimalstellen berechnet,” *J. Reine Angew. Math.*, vol. 1844, no. 27, p. 198 (in German); doi: 184410.1515/crll.1844.27.198

65. R. D. von Sterneck, “Uber die kleinste Anzahl Kuben, aus welchen jede Zahl bis 40000 zusammengesetzt werden kann,” *Akad. Wiss. Wien, Math.-Natur. Kl. Sitz.*, vol. 112, pp. 1627–1666, 1903.
66. H. Davenport, “On Waring’s problem for cubes,” *Acta Math.*, vol. 71, pp. 123–143, 1939; doi: 10.1007/BF02547752
67. H. Davenport, “On Waring’s problem for fourth powers,” *Ann. Math.*, vol. 40, no. 4, pp. 731–747, 1939; doi: 10.2307/1968889
68. H. Davenport, “On Waring’s problem for fifth and sixth powers,” *Amer. J. Math.*, vol. 64, pp. 199–207, 1942; doi: 10.2307/2371678
69. H. Davenport, “Some aspects of Hardy’s mathematical work. V. Waring’s problem,” *J. London Math. Soc.*, vol. 25, pp. 119–125, 1950; doi: 10.1112/jlms/s1-25.2.119
70. H. Davenport and H. Heilbronn, “On Waring’s problem for fourth powers,” *Proc. London Math. Soc.*, vol. 41, no. 2, pp. 143–150, 1936; doi: 10.1112/plms/s2-41.2.143
71. J. H. Davenport, Y. Siret, and E. Tournier, *Computer Algebra*, London: Academic Press, 1988.
72. F. Delmer and J.-M. Deshouillers, “On the computation of $g(k)$ in Waring’s problem,” *Math. Comp.*, vol. 54, no. 190, pp. 885–893, 1990.
73. J.-M. Deshouillers “Problème de Waring pour les bicarrés: le point en 1984,” . *Théor, Analyt. Nombres Paris*, exp. 33, pp. 1–5, 1984–85.
74. J.-M. Deshouillers, “Problème de Waring pour les bicarrés,” in *Seminar on number theory 1984–1985*, no. 14, Univ. Bordeaux I, Talence, France, 1985, pp. 1–47 (in French).
75. J.-M. Deshouillers and PRC Mathematiques et Informatique, “Waring’s problem and the circle-method,” *Number theory and applications*, Dordrecht, Nederland: Kluwer Acad. Publ., 1989, pp. 37–44.
76. J.-M. Deshouillers, “La majoration de sommes de Weyl biquadratiques” [Upper bounds for biquadratic Weyl sums], *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa - Cl. Sci., Serie 4*, vol. 19, no. 2, pp. 291–304, 1992 (in French).
77. J.-M. Deshouillers and F. Dress, “Sommes de diviseurs et structure multiplicative des entiers,” *Acta Arith.*, vol. 49, no. 4, pp. 341–375, 1988; doi: 10.4064/aa-49-4-341-375
78. J.-M. Deshouillers and F. Dress, “Sums of 19 biquadrates: on the representation of large integers,” *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa - Cl. Sci., Serie 4*, vol. 19, no. 1, pp. 113–153, 1992 (in French).
79. J.-M. Deshouillers and F. Dress, “Numerical results for sums of five and seven biquadrates and consequences for sums of 19 biquadrates,” *Math. Comp.*, vol. 61, pp. 195–207, 1993; doi: 10.1090/S0025-5718-1993-1201766-8
80. J.-M. Deshouillers, F. Hennecart, and B. Landreau, “Sums of powers: an arithmetic refinement to the probabilistic model of Erdős and Rényi,” *Acta Arithmetica*, vol. 85, pp. 13–33, 1998; doi: 10.4064/aa-85-1-13-33
81. J.-M. Deshouillers, F. Hennecart, and B. Landreau, “7373170279850 (With an appendix by I. Gusti Putu Purnaba),” *Math. Comp.*, vol. 69, no. 229, pp. 421–439, 2000.
82. J.-M. Deshouillers, F. Hennecart, and B. Landreau, “Waring’s problem for sixteen biquadrates — numerical results,” *J. Théor. Nombres Bordeaux*, vol. 12, no. 2, pp. 411–422, 2000; doi: 10.5802/jtnb.287
83. J.-M. Deshouillers, K. Kawada, and T. D Wooley, “On sums of sixteen biquadrates,” *Mém. Soc. Math. Fr.*, no. 100, pp. a-120, 2005.
84. L. E. Dickson, “Generalization of Waring’s theorem on fourth, sixth, and eighth powers,” *Amer. J. Math.*, vol. 49, no. 2, pp. 241–250, 1927; doi: 10.2307/2370754
85. L. E. Dickson, “Extensions of Waring’s theorem on nine cubes,” *Amer. Math. Monthly*, vol. 34, no. 4, pp. 177–183, 1927; doi: 10.1080/00029890.1927.11986678
86. L. E. Dickson, “Extensions of Waring’s theorem on fourth powers,” *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 33, pp. 319–327, 1927; doi: 10.1090/S0002-9904-1927-04365-8
87. L. E. Dickson, “A generalization of Waring’s theorem on nine cubes,” *Bull. Amer. Mat. Soc.*, vol. 33, pp. 299–300, 1927; doi: 10.1090/S0002-9904-1927-04357-9
88. L. E. Dickson, “Simpler proofs of Waring’s theorem on cubes with various generalizations,” *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 30, no. 1, pp. 1–18, 1928; doi: 10.2307/1989262
89. L. E. Dickson, “Proof of a Waring theorem on fifth powers,” *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 37, pp. 549–553, 1931; doi: 10.1090/S0002-9904-1931-05198-3
90. L. E. Dickson, “Minimum decomposition into n-th powers,” *Amer. J. Math.*, vol. 55, no. 1, pp. 593–602, 1933; doi: 10.2307/2371152
91. L. E. Dickson, *Minimum decompositions into fifth powers. (Math. tables. 3)*, London: Office of the Brit. Assoc. f. the Advancement of Science, 1933.
92. L. E. Dickson, “Recent progress on Waring’s theorem and its generalizations,” *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 39, pp. 701–727, 1933; doi: 10.1090/S0002-9904-1933-05719-1
93. L. E. Dickson, “A new method for universal Waring theorems with details for seventh powers,” *Amer. Math. Monthly*, vol. 41, pp. 547–555, 1934; doi: 10.1080/00029890.1934.11987646
94. L. E. Dickson, “Waring’s problem for cubic functions,” *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 36, no. 1, pp. 1–12, 1934; doi: 10.1090/S0002-9947-1934-1501731-6
95. L. E. Dickson, “Waring’s problem for ninth powers,” *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 40, pp. 487–493, 1934; doi: 10.1090/S0002-9904-1934-05905-6
96. L. E. Dickson, “Universal Waring theorem for eleventh powers,” *J. Lond. Math. Soc.*, vol. 9, pp. 201–206, 1934; doi: 10.1112/jlms/s1-9.3.201

97. L. E. Dickson, “A new method for Waring theorems with polynomial summands,” *Trans. Amer. Math. Soc.*, I: vol. 36, no. 4, pp. 731–748, 1934; II: vol. 39, no. 2, pp. 205–208, 1936; doi: 10.1090/S0002-9947-1936-1501842-7
98. L. E. Dickson, “Cyclotomy, higher congruences, and Waring’s problem,” *Amer. J. Math.*, I. vol. no. 2, 57, pp. 391–424, 1935; II. vol. 57, no. 3, pp. 463–474, 1935; doi: 10.2307/2371217
99. L. E. Dickson, *Researches on Waring’s problem*, Washington, USA: Carnegie Inst. of Washington Publ, no. 464, 1935.
100. L. E. Dickson, “Universal Waring theorems with cubic summands,” *Acta Arith.*, vol. 1, no. 1, pp. 184–196, 1935; doi: 10.4064/aa-1-2-184-196
101. L. E. Dickson, “On Waring’s problem and its generalization,” *Ann. Math.*, vol. 37, no. 2, pp. 293–316, 1936; doi: 10.2307/1968443
102. L. E. Dickson, “Universal Waring theorems,” *Monatsh. Math. Phys*, vol. 43, pp. 391–400, 1936; doi: 10.1007/BF01707618
103. L. E. Dickson, “The ideal Waring theorem for twelfth powers,” *Duke Math. J.*, vol. 2, no. 2, pp. 192–204, 1936; doi: 10.1215/S0012-7094-36-00218-1
104. L. E. Dickson, “Proof of the ideal Waring theorem for exponents,” *Amer. J. Math.*, vol. 58, no. 3, pp. 521–529, 1936; doi: doi.org/10.2307/2370969
105. L. E. Dickson, “Solution of Waring’s problem,” *Amer. J. Math.*, vol. 58, no. 3, pp. 530–535, 1936; doi: 10.2307/2370970
106. L. E. Dickson, “A generalization of Waring’s problem,” *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 42, pp. 525–529, 1936; doi: 10.1090/S0002-9904-1936-06348-2
107. L. E. Dickson, “The Waring problem and its generalizations,” *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 42, pp. 833–842, 1936; doi: 10.1090/S0002-9904-1936-06432-3
108. L. E. Dickson, “Universal forms $\sum a_i x_i^n$ and Waring’s problem,” *Acta Arith.*, vol. 2, no. 2, pp. 177–196, 1937.
109. L. E. Dickson, “All integers except 23 and 239 are sums of eight cubes.,” *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 45, pp. 588–591, 1939; doi: 10.1090/S0002-9904-1939-07041-9
110. L. E. Dickson, *The collected mathematical papers of Leonard Eugene Dickson*, Adrian Albert ed., New York: Chelsea Publishing Company, 1975.
111. L. E. Dickson, “Vol. I: Divisibility and primality,” in *History of the theory of numbers*. Mineola, NY: Dover Publications, 2005.
112. L. E. Dickson, “Vol. II: Diophantine analysis,” in *History of the theory of numbers*. Mineola, NY: Dover Publications, 2005.
113. L. E. Dickson, “Vol. III: Quadratic and higher forms,” in *History of the theory of numbers*, Mineola, NY: Dover Publications, 2005.
114. F. Dress, “Amélioration de la majoration de $g(4)$ dans le problème de Waring: $g(4) \leqslant 34$,” in *Séminaire Delange—Pisot—Poitou, Théorie des nombres, 11.1, 1969–1970*, Paris, 1970, pp. 1–23 (in French).
115. F. Dress, “Sur le problème de Waring pour les puissances quatrièmes,” *Sci. Paris Sér. A–B*, vol. 272, pp. A457–A459, 1971 (in French).
116. F. Dress, “Méthodes élémentaires dans le problème de Waring pour les entiers,” *Journées Arithmétiques Françaises*, 1971 (in French).
117. F. Dress, “Théorie additive des nombres et problème de Waring,” in *Séminaire de Théorie des Nombres, Univ. Bordeaux I, Talence, 1970–1971*, vol. 28, 1971, pp. 1–9 (in French).
118. F. Dress, “Théorie additive des nombres, problème de Waring et théorème de Hilbert,” *Enseign. Math. 2*, vol. 18, pp. 175–190, 1972 [erratum, ibid. vol. 18, pp. 301–302, 1972.] (in French).
119. F. Dress, “Amélioration de la majoration de $g(4)$ dans le problème de Waring: $g(4) \leqslant 30$,” *Acta Arith.*, vol. 22, pp. 137–147, 1973 (in French).
120. D. Dumbaugh and A. Shell-Gellasch, “The "wide influence” of Leonard Eugene Dickson,” *Notices Amer. Math. Soc.*, vol. 64, no. 7, pp. 772–776, 2017.
121. H. Ehlich, “Zur Pillaischen Vermutung,” *Arch. Math.*, vol. 16, pp. 223–226, 1965; doi: 10.1007/BF01220025
122. N. D. Elkies, “Every even number greater than 454 is the sum of seven cubes,” in *arXiv:1009.3983 [math.NT], [v1]*, Tue, 21 Sep 2010, pp. 1–9.
123. W. J. Ellison, “Waring’s problem,” *Amer. Math. Monthly*, vol. 78, no. 1, pp. 10–36, 1971; doi: 10.1080/00029890.1971.11992689
124. T. Estermann, “Proof that every large integer is a sum of seventeen biquadrates,” *Proc. London Math. Soc.*, vol. s2–41, no. 1, pp. 126–142, 1936.
125. T. Estermann, “On Waring’s problem for fourth and higher powers,” *Acta Arith.*, vol. 2, pp. 197–211, 1936; doi: 10.4064/aa-2-2-197-211
126. L. Euler, “De numeris amicabilibus (1747),” in *Euler Archive — All Works by Eneström Number. E100*, 2018. [Online]. Available: https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/100
127. L. Euler, “De numeris amicabilibus (1750),” in *Euler Archive — All Works by Eneström Number. E152*, 2018. [Online]. Available: https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/152
128. L. Euler, “Opera postuma. Mathematica et physica. Anno 1844 detecta quae Academiae Scientiarum Petropolitanae. Tomus I,” Petropoli, 1862. [Online]. Available: https://ia800204.us.archive.org/18/items/operapostumamath01euleuoft/operapostumamath01euleuoft.pdf

129. L. J. Everet, “Reviews: Innumeracy: Mathematical Illiteracy and its Consequences,” *Amer. Math. Monthly*, vol. 97, no. 1, pp. 88–91, 1990; doi: 10.1080/00029890.1990.11995554
130. A. Fleck, “Über die Darstellung ganzer Zahlen als Summen von positiven Kuben und von Biquadraten ganzer Zahlen,” *Sitzungsber. Berl. Math. Ges.*, vol. 5, pp. 2–9, 1906.
131. A. Fleck, “Über die Darstellung ganzer Zahlen als Summen von sechsten Potenzen ganzer Zahlen,” *Math. Ann.*, vol. 64, no. 4, pp. 561–566, 1907; doi: 10.1007/BF01450063
132. G. Frobenius, “Über den Stridsbergschen Beweis des Waringschen Satzes,” *Berl. Ber.*, pp. 666–670, 1912.
133. J. von zur Gathen and J. Gerhard, *Modern computer algebra*, 3rd ed., Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2013.
134. M. Gelbcke, “Zum Waringschen Problem,” *Math. Ann.*, vol. 105, pp. 637–652, 1931; doi: 10.1007/BF01455835
135. R. K. Guy, “The strong law of small numbers,” *Amer. Math. Monthly*, vol. 95, no. 8, pp. 697–712, 1988; doi: 10.1080/00029890.1988.11972074
136. R. K. Guy, “The second strong law of small numbers,” *Math. Mag*, vol. 63, no. 1, pp. 3–20, 1990; doi: 10.1080/0025570X.1990.11977475
137. L. Habsieger, “Explicit lower bounds for $\|(3/2)^k\|$,” *Acta Arith.*,vol. 106, no. 3, pp. 299–309, 2003; doi: 10.4064/aa106-3-7
138. H. Halberstam and K. F. Roth, *Sequences*, Clarendon Press, Oxford, 1966; doi: 10.1007/978-1-4613-8227-0
139. G. H. Hardy, “Some famous problems of the theory of numbers and in particular Waring’s problem. An inaugural lecture delivered before the University of Oxford,” *Nature*, vol. 106, pp. 239-240, 1920; doi:10.1038/106239c0
140. G. H. Hardy, *A mathematician’s apology. With a foreword by C. P. Snow*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1967.
141. G. H. Hardy and J. E. Littlewood, “A new solution of Waring’s problem,” *Quart. J. Math.*, vol. 48, pp. 272–293, 1919.
142. G. H. Hardy and J. E. Littlewood, “Some Problems of «partitio numerorum». I: A new solution of Waring’s problem,” *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.–Phys. Kl*, pp. 33–54, 1920.
143. G. H. Hardy and J. E. Littlewood, “Some problems of «partitio numerorum». II: Proof that every large number is the sum of at most 21 biquadrates,” *Math. Z.*, vol. 9, pp. 14–27, 1921; doi:10.1007/BF01378332
144. G. H. Hardy and J. E. Littlewood, “Some problems of «partitio numerorum». IV: The singular series in Waring’s problem and the value of the number $G(k)$,” *Math. Z.*, vol. 12, pp. 161–168, 1922.
145. G. H. Hardy and J. E. Littlewood, “Some problems of «partitio numerorum». VI: Further researches in Waring’s problem,” *Math. Z.*, vol. 23, pp. 1–37, 1925.
146. G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *The collected works of G. H. Hardy, vol. 1*, New York: Oxford University Press, 1966.
147. G. H. Hardy and E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, 5th ed., Oxford, UK: Oxford University Press, 1979.
148. A. Hurwitz, “Über die Erzeugung der Invarianten durch Integration,” *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*, pp. 71–90, 1897.
149. F. Hausdorff, “Zur Hilbertschen Losung des Waringschen Problems,” *Math. Ann.*, vol. 67, pp. 301–305, 1909; doi: 10.1007/BF01450406
150. H. Heilbronn, “Über das Waringsche Problem,” *Acta Arith.*, vol. 1, no. 2, pp. 212–221, 1935 (in German).
151. D. Hilbert, “Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl n^{ter} Potenzen (Waringsches problem). Dem Andenken an Hermann Minkowski gewidmet,” *Gött. Nachr.*, pp. 17–36, 1909 [Abdruck mit Veränderungen und Zusätzen: Math. Ann, vol. 67, pp. 281–300, 1909] (in German); doi: 10.1007/BF01450405
152. L.-K. Hua, “Hua, L. K.: On Waring’s problem,” *Quart. J. Math.*, vol. 9, no. 1, pp. 199—202, 1938; doi: 10.1093/qmath/os-9.1.199
153. L.-K. Hua, “On Waring’s problem for fifth powers,” *Proc. London Math. Soc.*, vol. 45, no. 1, pp. 144–160, 1939; doi: 10.1112/plms/s2-45.1.144
154. L.-K. Hua, *Introduction to number theory*, P. Shiu transl., Berlin-New York: Springer-Verlag, 1982; doi: 10.1007/978-3-642-68130-1
155. L.-K. Hua, “Selected papers. Edited, with a preface and a biographical note of Hua by Heini Hadberstam,” [Reprint of the 1983 edition.], New York: Springer, 2015.
156. A. Hurwitz, “Über die Darstellung der ganzen Zahlen als Summen von n^{ten} Potenzen ganzer Zahlen,” *Math. Ann.*, vol. 65, pp. 424–427, 1908 (in German); doi: 10.1007/BF01456421
157. A. Hurwitz, “Über definite Polynome,” *Math. Ann.*, vol. 73, pp. 173–176, 1912; doi: 10.1007/BF01456665
158. H. Iwaniec, “The sixtieth birthday of Jean-Marc Deshouillers,” *Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici*, vol. 37, no. 1, pp. 7–16, 2007; doi: 10.7169/facm/1229618737
159. C. G. J. Jacobi, “Über die Zusammensetzung der Zahlen aus ganzen positiven Cuben; nebst einer Tabelle für die kleinste Cubenanzahl, aus welcher jede Zahl bis 12000 zusammengesetzt werden kann,” *J. Reine Angew. Math.*, vol. 42, pp. 41–69, 1851 [reprinted in C. G J. Jacobi, Gesammelte Werke. Bd. 6, Berlin, Verlag von Georg Reimer, pp. 322–354, 1891] (in German); doi: 10.1515/crll.1851.42.41
160. R. D. James, “The value of the number $g(k)$ in Waring’s problem,” *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 36, no. 2, pp. 395–444, 1934; doi: 10.2307/1989846
161. R. D. James, “On Waring’s problem for odd powers,” *Proc. London Math. Soc. (2)*, vol. 37, no. 1, pp. 257–291, 1934; doi: 10.1112/plms/s2-37.1.257

162. R. D. James, “The constants in Waring’s problem for odd powers,” *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 41, pp. 689–694, 1935; doi: 10.1090/S0002-9904-1935-06176-2
163. R. D. James, “Zuckerman H. S. New results for the number $g(n)$ in Waring’s problem,”*Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 41, pp. 197–198, 1935.
164. H. Kadiri, “Short effective intervals containing primes in arithmetic progressions and the seven cubes problem,” *Math. Comput.*, vol. 77, pp. 1733–1748, 2008; doi: 10.1090/S0025-5718-08-02084-X
165. E. Kamke, “Verallgemeinerungen des Waring—Hilbertschen Satzes,” *Math. Ann.*, vol. 83, pp. 85–112, 1921; doi: 10.1007/BF01464230
166. E. Kamke, “Bemerkung zum allgemeinen Waringschen Problem,” *Math. Zeitschr*, vol. 15, pp. 188–194, 1922; doi: 10.1007/BF01494392
167. E. Kamke, “Zum Waringschen Problem für rationale Zahlen und Polynome,” *Math. Ann.*, vol. 87, pp. 238–245, 2009; doi: 10.1007/BF01459066
168. *Kawada K.* Techniques and advances in research on Waring’s problem. (Japanese) Sūgaku **57** (2005), no. 1, 21–49. English translation: On development of techniques in research on Waring’s problem Sugaku Expositions. Sugaku Expositions **22** (2009), no. 1, 57–89.
169. A. Kempner, “Bemerkungen zum Waringschen Problem,” *Math. Ann.*, vol. 72, pp. 387–399, 1912; doi: 10.1007/BF01456723
170. A. J. Kempner, *Über das Waringsche Problem und einige Verallgemeinerungen*, Diss. Göttingen., 1912 (in German).
171. A. J. Kempner, “The development of “partitio numerorum”, with particular reference to the work of Messrs. Hardy, Littlewood and Ramanujan,” *Amer. Math. Monthly*, vol. 30, pp. 354–369, 1923; doi: 10.1080/00029890.1923.11986272
172. M. Kreuzer and L. Robbiano, *Computational commutative algebra*, Springer-Verlag, Berlin, vol. 1, 2000, vol. 2, 2005; doi: 10.1007/978-3-540-70628-1
173. J. M. Kubina and M. C. Wunderlich, “Extending Waring’s conjecture to 471,600,000,” *Math. Comp.*, vol. 55, no. 192, pp. 815–820, 1990; doi: 10.1090/S0025-5718-1990-1035936-6
174. J. Kürschák, “Über die Liouvillesche Identität,” *Arch. Math. Phys.*, vol. 18, pp. 242–243, 1911 (in German).
175. E. Landau, “Über die Darstellung einer ganzen Zahl als Summe von Biquadraten,” *Rend. Circ. Matem. Palermo*, vol. 23, pp. 91–96, 1907 (in German); doi: 10.1007/BF03013509
176. E. Landau, “Über eine Anwendung der Primzahltheorie auf das Waringsche Problem in der elementaren Zahlentheorie,” *Math. Ann.*, vol. 66, no. 1, pp. 102–105, 1908 (in German); doi: 10.1007/BF01450914
177. E. Landau, “Zur Hardy—Littlewoodschen Lösung des Waringschen Problems,” *Gött. Nachr.*, pp. 88–92, 1921 (in German).
178. E. Landau, “Zum Waringschen Problem,” *Math. Zeitschr*, I: vol. 12, pp. 219–247, 1922; II: vol. 31, pp. 149–150, 1929; III: vol. 32, pp. 699–702, 1930 (in German).
179. E. Landau, “Die Winogradowsche Methode zum Beweis des Waring—Hilbert—Kamkeschen Satzes, *Acta Math.*, vol. 48, pp. 217–253, 1926 (in German).
180. E. Landau, “Zum Waringschen Problem,” *Proceedings L. M. S.*, vol. s2-25, pp. 484–486, 1926 (in German).
181. E. Landau, *Vorlesungen über Zahlentheorie. Bd. I–III*, Hirzel, Leipzig, 1927 (in German).
182. E. Landau, “Über die neue Winogradoffsche Behandlung des Waringschen Problems,” *Math. Z.*, vol. 31, pp. 319–338, 1930 (in German); doi: 10.1007/BF01246414
183. B. Landreau, “Modèle probabiliste pour les sommes de s puissances s-ièmes,” *Compositio Math.*, vol. 99, pp. 1–31, 1995 (in French).
184. V.-A. Lebesgue, *Exercises d’analyse numérique*, Paris, 1859 (in French).
185. U. V. Linnik, “On the representation of large numbers as sums of seven cubes,” *Matem. sb.*, vol. 12, no. 2, pp. 218–224, 1943 (in French).
186. E. Lucas, “Sur la décomposition des nombres en bicarrés,”*N. C. M.*, vol. IV, pp. 323–325, 1878 (in French).
187. E. Lucas, “Sur un théorème de M. Liouville concernant la décomposition des nombres en bicarrés,” *Nouvelles annales de mathématiques*, vol. 17, pp. 536–537, 1878 (in French).
188. K. Mahler, “On the fractional parts of the powers of a rational number,” *II. Mathematika*, vol. 4, pp. 122–124, 1957 (in French).
189. E. Maillet, “Sur la décomposition d’un nombre entier en une somme de cubes d’entiers positifs, Assoc. Franç,” *Bordeaux Notes Mém.*, vol. 24, pp. 242–247, 1895 (in French).
190. E. Maillet, “Quelques extensions de théorème de Fermat sur les nombres polygones,” *J. Math. Pures et App.*, vol. 2, pp. 363–380, 1896 (in French).
191. E. Maillet, “Sur la décomposition d’un entier en une somme de puissances huitièmes d’entiers. (Problème de Waring),” *Bull. Soc. Math. France*, vol. 36, pp. 69–77, 1908 (in French).
192. A. Malter, D. Schleicher, and D. Zagier, “New looks at old number theory,” *Amer. Math. Monthly*, vol. 120, no 3, pp. 243–264, 2013; doi: 10.4169/amer.math.monthly.120.03.243
193. K. S. McCurley, “Explicit estimates for functions of primes in arithmetic progressions,” *Ph. D. Thesis, Univ. Illinois at Urbana-Champaign*, 1981.
194. K. S. McCurley, “An effective seven cube theorem,” *J. Number Theory*, vol. 19, no. 2, pp. 176–183, 1984; doi: 10.1016/0022-314X(84)90100-8

195. W. Narkiewicz, *Teoria liczb*, 3rd ed., Warszawa: PWN, 2003.
196. W. Narkiewicz, *Classical problems in number theory*, Warszawa: PWN, 1986.
197. W. Narkiewicz, *Elementary and analytic theory of algebraic numbers*, 3rd ed., Berlin: Springer, 2004.
198. W. Narkiewicz, *Rational number theory in the 20th century. From PNT to FLT*, Berlin: Springer, 2012; doi: 10.1007/978-0-85729-532-3
199. M. B. Nathanson, *Additive number theory. The classical bases. Graduate Texts in Mathematics*, New York: Springer-Verlag, 1996.
200. M. B. Nathanson, *Elementary methods in number theory. Graduate Texts in Mathematics*, New York, Springer-Verlag, 2000.
201. D. J. Newman, "A simplified proof of Waring's conjecture," *Michigan Math. J.*, vol. 7, no. 3, pp. 291–295, 1960; doi: 10.1307/mmj/1028998439
202. I. Niven, "An unsolved case of the Waring problem," *Amer. J. Math.*, vol. 66, no. 1, pp. 137–143, 1944; doi:10.2307/2371901
203. A. Oppenheim, "Hilbert's proof of Waring's theorem," *Messenger*, vol. 58, pp. 153–158, 1929.
204. A. Ostrowski, "Bemerkung zur Hardy—Littlewoodschen Lösung des Waringschen Problems," *Math. Zeitschr.*, vol. 9, pp. 28–34, 1921; doi: 10.1007/BF01378333
205. G. Pall, "Quaternions and sums of three squares," *Amer. J. Math.*, vol. 64, no. 1, pp. 503–513, 1942; doi: 10.2307/2371700
206. The `PARI Group`, Univ. Bordeaux, `PARI/GP` version `2.11.0`, 2018. [Web-site]. Available: http://pari.math.u-bordeaux.fr/
207. S. S. Pillai, "On Waring's problem," I: *J. Annamalai Univ.*, vol. 5, pp. 145–166, 1936; III: vol. 6, pp. 50–53, 1936; IV: vol. 6, pp. 54–64, 1936; VI: *Polynomial summands*, vol. 6, pp. 171–197, 1937.
208. S. S. Pillai, "On Waring's problem," *J. Indian Math. Soc.*, vol. 2, pp. 16–44, 1936; [Errata. J. Indian math. Soc., vol. 2, 1936]; V: "On $g(6)$," no. 2, pp. 213–214, 1937; VIII: "With polynomial summands," vol. 3, 205–220, 1939; IX: "On universal Waring's problem with powers of primes," vol. 3, pp. 221–225, 1939.
209. S. S. Pillai, "On Waring's problem: $g(6) = 73$," in *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A*, vol. 12, pp. 30–40, 1940; doi: 10.1007/BF03170721
210. S. S. Pillai, *Collected works of S. Sivasankaranarayana Pillai,* R. Balasubramanian and R. Thangadurai, eds., Mysore, India: Ramanujan Mathematical Society, 2010.
211. H. Poincaré, "Rapport sur le prix Bolyai," *Palermo Rend*, vol. 31, pp. 109–132, 1911 (in French);
212. P. Pollack, "Not always buried deep. A second course in elementary number theory," *Amer. Math. Soc.*, Providence, RI, 2009.
213. P. Pollack, "Paul On Hilbert's solution of Waring's problem," *Cent. Eur. J. Math.*, vol. 9, no. 2, pp. 294–301, 2011; doi: 10.2478/s11533-011-0009-z
214. P. Pollack and P. Schorn, "Dirichlet's proof of the three-square theorem: an algorithmic perspective," *Math. Comp.*, vol. 88, pp. 1007–1019, 2019; doi: 10.1090/mcom/3349
215. O. Ramaré, "An explicit seven cube theorem," *Acta Arith.*, vol. 118, no. 4, pp. 375–382, 2005.
216. O. Ramaré, "An explicit result of the sum of seven cubes," *Manuscripta Math.*, vol. 124, no. 1, pp. 59–75, 2007.
217. O. Ramaré, "État des lieux," pp. 1–19. [Online] (in French). Available: http://math.univ-lille1.fr/~ramare/Maths/ExplicitJNTB.pdf
218. S. Réalis, "Note sur un théorème d'arithmétique," *Nouv. Corresp. Math.*, vol. 4, pp. 209–210, 1878 (in French).
219. R. Remak, "Bemerkung zu Herrn Stridsbergs Beweis des Waringschen Theorems," *Math. Ann.*, vol. 72, pp. 153–156, 1912; doi: 10.1007/BF01667320
220. G. J. Rieger, "Zur Hilbertschen Lösung des Waringschen Problems: Abschätzung von $g(n)$," *Arch. Math.*, vol. 4, pp. 275–281, 1953 (in German); doi: 10.1007/BF01899890
221. G. J. Rieger, "Zu Linniks Lösung des Waringschen Problems: Abschätzung von $g(n)$," *Math. Z.*, vol. 60, pp. 213–234, 1954 (in German); doi: 10.1007/BF01187372
222. O. Ramaré, "Zum Waringschen Problem für algebraische Zahlen und Polynome," *J. Reine Angew. Math.*, vol. 195, pp. 108–120, 1956 (in German); doi: 10.1515/crll.1955.195.108
223. F. Romani, "Computations concerning Waring's problem for cubes," *Calcolo*, vol. 19, pp. 415–431, 1982; doi: 10.1007/BF02575769
224. R. Rubugunday "On $g(k)$ in Waring's problem," *J. Indian Math. Soc.*, vol. 6, pp. 192–198, 1942; doi: 10.18311/jims/1942/17193
225. E. Schmidt, "Erhard Zum Hilbertschen Beweise des Waringschen Theorems,"*Math. Ann.*, vol. 74, pp. 271–274, 1913 (in German); doi: 10.1007/BF01456042
226. W. Sierpiński, *Elementary theory of numbers*, Warszawa: PWN, 1964.
227. S. Siksek, "Every integer greater than 454 is the sum of at most seven positive cubes," *Algebra Number Theory*, vol. 10, no. 10, pp. 2093–2119, 2016; doi: 10.2140/ant.2016.10.2093
228. C. Small, "Waring's problem," *Math. Mag.*, vol. 50, no. 1, pp. 12–16, 1977; doi: 10.2307/2689743
229. R. M. Stemmler "The ideal Waring theorem for exponents 401–200,000," *Math. Comput.*, vol. 18, pp. 144–146, 1964.
230. E. Stridsberg, "Öfret Hilberts bevis för Warings sats. Not 1 och 2.," in *Arkiv för Math., Astr. Fys.*, vol. 6, I: no. 32, 1910; II: no. 39, 1911 (in German).

231. H. E. Thomas, "A numerical approach to Waring's problem for fourth powers," *Ph. D. Thesis, Univ. Michigan*, 1973.
232. H. E. Thomas, "Waring's problem for twenty-two biquadrates," *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 193, pp. 427–430, 1974; doi: 10.2307/1996923.
233. E. Trost, "Eine Bemerkung zum Waringschen Problem," *Elem. Math.*, vol. 13, pp. 73–75, 1958 (in German).
234. R. C. Vaughan, "On Waring's problem for cubes," I: *J. Reine Angew. Math.*, vol. 363, pp 122–170, 1986; II: *J. London Math. Soc.*, vol. 39, pp 205–218, 1989.
235. R. C. Vaughan, *The Hardy—Littlewood Method, Second edition*, Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1997.
236. R. C. Vaughan and T. D. Wooley, "Waring's problem: a survey," in *Number Theory for the Millennium, III (Urbana, IL, 2000)*, 301–340, 2002. [Online]. Available: https://www.researchgate.net/publication/2842101_Waring\T2A\textquoterights_Problem_A_Survey
237. I. Vinogradov, "Une nouvelle variante de la démonstration du théorème de Waring," *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris*, vol. 200, pp. 182–184, 1935 (in French).
238. I. Vinogradov, "An asymptotic formula for the number of representations in Waring's problem," *Matem. sb.*, vol. 42, no. 5, pp. 531–534, 1935.
239. I. Vinogradov, "On Waring's problem," *Ann. of Math.*, vol. 36, no. 2, pp. 395–405, 1935; doi: 10.2307/1968579
240. I. Vinogradov, "On asymptotic formula in Warings problem," *Matem. sb.*, vol. 43, no. 2, 169–174, 1936.
241. E. Waring, "Meditationes Algebraicae," in *Archive.org*, 1772. [Online]. Available: https://archive.org/details/bub_gb_1MNbAAAAQAAJ/page/n11/mode/2up
242. G. L. Watson, "A proof of the seven cube theorem," *J. London Math. Soc.*, vol. 26, no. 2, pp. 153–156, 1951.
243. G. L. Watson, "A simple proof that all large integers are sums of at most eight cubes," *Math. Gaz.*, vol. 37, no. 321, pp. 209–211, 1953; doi: 10.2307/3608305
244. S. M. Watt, "Making Computer Algebra More Symbolic," in *Proc. Transgressive Computing 2006: A conference in honor or Jean Della Dora, (TC 2006), April 24–26 2006*, Granada, Spain, 2006, pp. 43–49.
245. S. M. Watt, "Two Families of Algorithms for Symbolic Polynomials," in *Computer Algebra 2006: Latest Advances in Symbolic Algorithms, Proceedings of the Waterloo Workshop, World Scientific*, 2007, pp. 193–210.
246. S. M. Watt, "Symbolic Polynomials with Sparse Exponents," in *Proc. Milestones in Computer Algebra: a Conference in Honour of Keith Geddes' 60th Birthday, (MICA 2008), May 1–3 2008, Stonehaven Bay*, Trinidad and Tobago, University of Western Ontario, 2008, pp. 91–97.
247. S. M. Watt, "Functional Decomposition of Symbolic Polynomials," in *Proc. International Conference on Computational Sciences and its Applications, (ICCSA 2008), June 30–July 3 2008, Perugia, Italy*, IEEE Computer Society, 2008, pp. 353–362.
248. A. Weil, "Two lectures on number theory, past and present," *Enseign. Math.*, vol. 20, no. 2, pp. 87–110, 1974.
249. A. Weil, *Number theory. An approach through history from Hammurapi to Legendre*, [Reprint of the 1984 edition], Boston, MA: Birkhäuser Boston Inc., 2007.
250. A. E. Western, "Computations concerning numbers representable by four or five cubes," *J. London Math. Soc.*, vol. s1-1, no. 4, pp. 244–250, 1926.
251. H. Weyl, "Bemerkung über die Hardy—Littlewoodschen Untersuchungen zum Waringschen Problem," *Gött. Nachr.*, pp. 189–192, 1921 (in German); doi: 10.1112/jlms/s1-1.4.244
252. A. Wieferich, "Zur Darstellung der Zahlen als Summen von fünften und siebenten Potenzen positiver ganzer Zahlen," *Math. Ann.*, vol. 67, pp. 61–75, 1909 (in German); doi: 10.1007/BF01451870
253. A. Wieferich, "Beweis des Satzes, daß sich eine jede ganze Zahl als Summe von höchstens neun positiven Kuben darstellen läßt," *Math. Ann.*, vol. 66, pp. 95–101, 1909 (in German).
254. A. Wieferich, "Über die Darstellung der Zahlen als Summen von Biquadraten," *Math. Ann.*, vol. 66, pp. 106–108, 1909 (in German).
255. J. M. Winogradow, "Sur un théorème général de Waring," *Matem. sb.*, vol. 31, no. 3–4, pp. 490–507, 1924 (in French).
256. T. D. Wooley, "Breaking classical convexity in Waring's problem: sums of cubes and quasi-diagonal behaviour," *Invent. Math.*, vol. 122, pp. 421–451, 1995.
257. D. Zagier, "A one-sentence proof that every prime $p \equiv 1 \mod 4$ is a sum of two squares," *Amer. Math. Monthly*, vol. 97, no. 2, p. 144, 1990.
258. A. Zornow, "De compositione numerorum e cubis integris positivis," *J. Reine Angew. Math.*, vol. 1835, no. 14, pp. 276–280, 1835; doi: 10.1515/crll.1835.14.276
259. H. S. Zuckerman, "New results for the number $g(n)$ in Waring's problem," *Amer. J. Math.*, vol. 58, pp. 545–552, 1936; doi: 10.2307/2370972

Received 27.08.2020, the final version — 20.10.2020.

Nikolai Vavilov, Dr. Sci., Professor, Department of Mathematics and Computer Science, SPbU,
✉ **nikolai-vavilov@yandex.ru**