Компьютерные инструменты в образовании, 2020
№ 2: 94–114
УДК: 37.026.9::519.1::004.023
http://cte.eltech.ru
doi:10.32603/2071-2340-2020-2-94-114

ОСМЫСЛЕНИЕ ЗАДАЧИ ПОСРЕДСТВОМ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРЕДМЕТНОЙ ОБЛАСТИ (с целевой установкой на создание генератора задач)*

Иванов С. Г.[1], кандидат педагогических наук, ✉ sg_ivanov@mail.ru
Поздняков С. Н.[1], доктор педагогических наук, ✉ pozdnkov@gmail.com

[1]Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»
им. В. И. Ульянова (Ленина), ул. Профессора Попова, 5, корп. 3, 197376, Санкт-Петербург, Россия

Аннотация

Данная статья представляет теоретический анализ проблемы осмысления учебного материала по математике на примере задачи, которая была предложена Н. Н. Паньгиной в качестве "пробного камня" для изучения взаимодействия учителя и ученика в организации самостоятельной работы последнего [Наст. изд., с. 80–93].

В статье рассматривается методический подход, основанный на изменении цели в отношении поставленной задачи. Вместо того, чтобы начинать с поиска решения поставленной задачи с конкретными данными и концентрировать внимание ученика на "построении маршрута" от условий задачи к тому, что требуется найти, предлагается строить модели, позволяющие генерировать новые задачи, аналогичные данной.

Такая постановка задачи меняет психологическую установку ученика, снимает с него ответственность за успешность решения конкретно поставленной задачи. В то же время, подталкиваемый учителем ученик строит различные симуляционные модели, которые легко запрограммировать и превратить в генераторы задач, тем самым формируя математическую модель проблемной области, в которой была поставлена задача.

В основе предложенного подхода лежит деятельностный подход, предложенный в работах А. Н. Леонтьева в 70-х годах прошлого века [1], идея вынесения трудных для понимания интеллектуальных действий вовне, чтобы задействовать механизм интериоризации [1, 2] и работы Симура Паперта, связанные с использованием компьютерных артефактов в качестве посредников для осмысления новых математических идей [3, 4].

Ключевые слова: *генерация задач, понимание через моделирование, симуляционные и математические модели, цифровизация среды обучения, передача смыслов.*

Цитирование: Иванов С. Г., Поздняков С. Н. Осмысление задачи посредством моделирования предметной области (с целевой установкой на создание генератора задач) // Компьютерные инструменты в образовании. 2020. № 2. С. 94–114. doi: 10.32603/2071-2340-2020-2-94-114

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-29-14141: изучение взаимосвязи концептуальных математических понятий, их цифровых представлений и смыслов как основы трансформации школьного математического образования.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из проблем овладения математическими идеями является чрезмерное использование искусственных задач, создаваемых на основе удобных для проверки шаблонов. Неосознанно составители таких задач стараются избегать всех неопределенностей, которыми так богаты задачи, возникающие естественным образом из смежных областей знания. Оказывается, что после такой обработки задачи перестают быть носителями смыслов, которыми по замыслу составителей задач они должны являться. Так в работе [5] Шонфельд показывает, что к большинству задач ученики, приученные к тестовым вопросам, подходят, отталкиваясь не от сути задачи, а от её внешних признаков. Он называет такой подход «методом ключевых слов». Этот подход, выглядящий на первый взгляд курьезным, не лишен смысла, так как учебные задачи составляются с учетом множества не относящихся к сути задачи ограничений, таких как «числовое удобство», ограниченность допустимых вопросов и пр., что, в конечном счете, делает форму более значимой для правильного ответа, чем осмысление задачи. Так Виленский в своей диссертации [6, с. 44–45] приводит пародийный набор правил, предложенный Игорем Чарищаком в статье «Руководство ученикам по решению задач» (Ihor Charischak (1993) in his “A Student’s Guide to Problem Solving”). Первое же правило говорит: «Если возможно, избегайте чтения задачи. Чтение задачи только занимает время и вызывает путаницу».

2. ИЗМЕНЕНИЕ УСТАНОВКИ УЧЕНИКА

В связи с вышесказанным, можно предположить, что уже на начальном этапе решения задачи у ученика есть установка, определяющая общую стратегию его поведения. Понятие установки изучалось школой Д. Н. Узнадзе (см., например [7]). Установку можно рассматривать как психологическое состояние, неосознанно толкающее ученика к определённой активности в данной ситуации. В работах А. Г. Асмолова выявлена связь между деятельностным подходом, развиваемым в школе Леонтьева, и понятием установки [8]. Асмолов рассматривает установку как аналог инерции, позволяющий стабилизировать деятельность ученика и доказывает, что «не деятельность должна выводиться из установки, а установка из деятельности» [9].

Таким образом, использование задач как средства передачи смыслов требует создания определенной установки на «правильную», то есть смысловую, деятельность. Опыт говорит нам о том, что именно «правильная» установка на обучение ценится родителями, которые хотят, чтобы их дети овладевали предметом. В то же время сложившаяся система управления образованием, к сожалению, порождает другую установку — установку на применение шаблонов решения типовых задач без их осмысления. Эта установка имеет в своей основе преувеличение роли единого государственного экзамена (ЕГЭ) и использование результатов сдачи этого экзамена для оценки работы учителей. Сформировалась практика «подготовки к ЕГЭ», что противоречит самому смыслу экзамена как способа проверки результатов обучения, а не как метода обучения.

Можно ли в этих условиях изменить установку ученика? Как повлиять на установку ученика, состоящую в том, чтобы искать шаблон решения задачи? Вопрос изменения структуры управления образованием мы выносим за пределы этой статьи и будем искать ответ в рамках методики преподавания.

Рассмотрим следующий подход, позволяющий инициировать деятельность ученика по осмыслению задачи. Поменяем целевую установку «решить задачу» на установку «придумать похожие задачи». Причем вместо «придумать» предложим «разработать генератор» подобных задач. Изменение установки, во-первых, позволит снять с ученика напряжение, связанное с возможностью получения неправильного ответа, во-вторых, направит на осмысление задачи как взаимодействия различных параметров, что станет основой для построения модели предметной области. Эта модель может быть не единственной и взаимодействие ученика и учителя будет направлено на общую цель — поиск такой модели, что переведет их взаимодействие из статуса «антагонистической игры» в статус «кооперативной игры». На основе разработанной модели будет строиться генератор задач. При этом учитель будет поддерживать инициативу учеников по написанию программ для генерации таких задач и создание манипуляторов-тренажеров для работы с задачами в рамках данной предметной модели.

В более ранних работах авторов [10, 11] показано, что наличие предметной среды порождает содержательную инициативную деятельность учеников. Например, показано, что для учеников оказалось очень привлекательным самим составлять задачи. При этом подобная деятельность без предметной среды является менее содержательной, так как в «бескомпьютерном» варианте у школьника гораздо меньше возможностей проверить, правильную ли задачу он придумал. Школьникам предлагалось придумать самостоятельно задачи в среде Verifier, которая позволяла сравнивать вводимые ответы с эталонными на множестве генерируемых примеров и демонстрировать расхождения пользователям среды. Изучив предложенные примеры таких задач, ученики с удовольствием и по своей инициативе создают новые, приспосабливая их к своим вкусам и «понятиям», чтобы они были «удобнее», «красивее», «лучше».

Таким образом, свобода в составлении задач здесь выступила движителем ученической активности, как только ученики почувствовали, что могут сравниться с преподавателем, сделав свой, возможно, лучший вариант задачи. Компьютерный инструмент здесь опосредовал взаимодействие ученика с учителем, причем вряд ли многие ученики решились бы «сразиться» с учителем напрямую, а в опосредованной средой форме это сделали многие.

Любопытные результаты показало анкетирование. Если по отношению к использованию компьютера как средства обучения математике мнения школьников разделились, то ответ на вопрос «Хотели бы вы составлять задания для других школьников?» во всех без исключения анкетах был положительным!

3. ТРУДНОСТИ ПРИ РЕШЕНИИ НЕСТАНДАРТНОЙ ЗАДАЧИ. ОТ ЗАДАЧИ К МОДЕЛИ

Начнем с ситуации, когда у ученика возникла трудность в условиях существующего обучения: «ему предложили задачу, а он не знает, как её решить».

Задача

Во дворе стоят машины. Некоторые из них москвичи, а остальные жигули. Некоторые из машин новые, а остальные старые. Некоторые из машин красные, а остальные зеленые. Известно, что красных москвичей — 3, новых москвичей — 3, а новых красных машин — 3. При этом старых зеленых москвичей — 1, новых зеленых жигулей — 2, а старых красных москвичей — 1. Сколько во дворе новых красных москвичей, если всего машин 12, а старых зеленых жигулей — 1?

Если спросить преподавателя или студента, уже знакомого с базовыми методами комбинаторики, то он скажет: «это задача на метод включений-исключений» и будет вспоминать формулу и искать соответствие между шаблоном для решения этой задачи и данными задачи. Возможно, у него возникнут трудности, потому что эта задача поставлена как задача с избыточным набором данных.

Как помочь ученику в этой ситуации? Если он не достиг успеха, это не означает, что он плохо выучил нужную формулу, это означает, что он её «не принял», иными словами не осмыслил в терминах тех базовых представлений, на которых он на самом деле основывает свои суждения.

Замечание. Нужно категорически отделить «внутренние» или, как их называет Виленский [6], «грязные» размышления, связанные с решением задачи, от того, как это решение будет представлено в учебнике, где будет предполагаться, что все изложенные в учебнике определения и теоремы являются теми инструментами, которыми ученик будет мыслить. Однако уже можно считать общепринятым среди математиков [12], что роль доказательства никак не связана с процессом осмысления. Об этом писал и М. Минский [13], отмечая, что доказательство — это не путь «логического мышления» (какого в природе не существует), а способ представления рассуждений в виде звеньев цепи, которое можно разрушить, найдя хотя бы одно неправильное звено, то есть представленное на суд общественности доказательство — это не история «движения мысли», а метод для повышения надежности представленных суждений.

Поэтому этап «актуализации» знаний [14] будем вести не через воспоминание и обсуждение готовых шаблонов (формул, методов, теорем), а через инициирование базовых представлений, которые естественным образом возникнут у ученика. Будем рассматривать задачу с точки зрения общей задачи, как это изложено в работах Д. Пойа [15, 16].

Для того чтобы помочь ученику осмыслить условие задачи, используем пример «выведения вовне» тех мыслительных операций, которые нужны человеку, решающему поставленную задачу. Можно нарисовать чертеж на бумаге, однако, имея «под рукой» компьютер, мы можем легко сделать полигон для экспериментов, используя любой графический редактор или среду динамической геометрии.

Построим условные изображения объектов, которые являются «действующими лицами» поставленной задачи. Это автомобили разных марок, окрасов и степени изношенности. Отвлечемся пока от конкретных данных и возьмем минимальные степени варьирования факторов: две марки, два цвета, две степени изношенности (впрочем, в задаче их именно столько, что говорит о том, что она не слишком запутанная) (рис. 1).

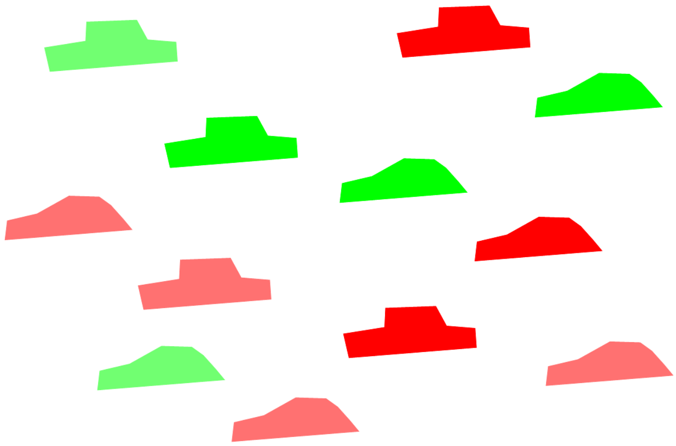


Рис. 1. Набор объектов для экспериментов (сделан в динамической геометрии, но может быть выполнен и в других средах, даже в Paint)

Первая мысль при виде множества объектов с несколькими признаками — это их как-то упорядочить. Эта цель возникает не как результат анализа условия задачи, а просто как естественное желание в таком их расположении, чтобы лучше «охватить взглядом», удобнее с ними работать.

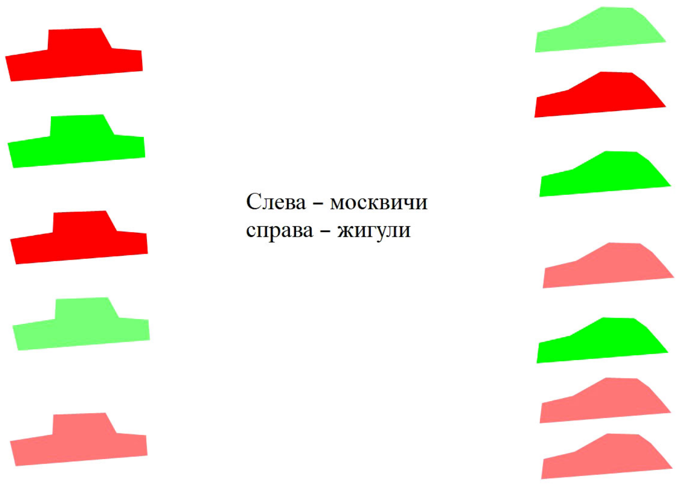


Рис. 2. Классификация машин по марке

Например, в задаче первым признаком выступает марка машины, давайте разделим множество объектов по этому признаку (рис. 2).

Даже если эта идея подсказана учителем или родителем, дальше ученик уже ухватил идею и будет самостоятельно продолжать деление (рис. 3, 4).

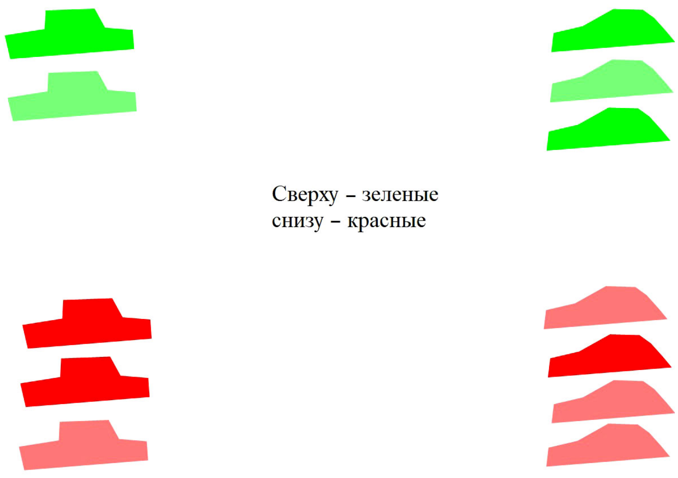


Рис. 3. Классификация по двум признакам

Наиболее явный признак — цвет. Если его ученик не использовал на первом шаге, то обязательно использует на втором (рис. 3).

Следующий шаг может оказаться более интересным: как произвести перегруппировку по третьему признаку, если все углы экрана уже заняты? Здесь может понадобиться подсказка — использовать внутренность экрана (рис. 4).

Теперь, когда построена визуальная, наиболее близкая к реальности модель, можно вводить замещающие объекты знаки, связанные с именами признаков М–Ж (москвич —

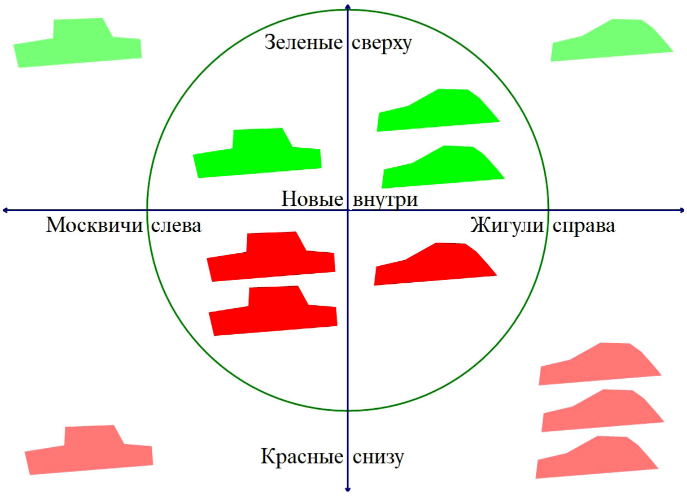


Рис. 4. Классификация по трем признакам

жигули), Н–С (новая — старая), К–З (красная — зеленая) и дать названия подмножествам, получившимся при разбиении исходного множества машин по трем признакам (рис. 5).

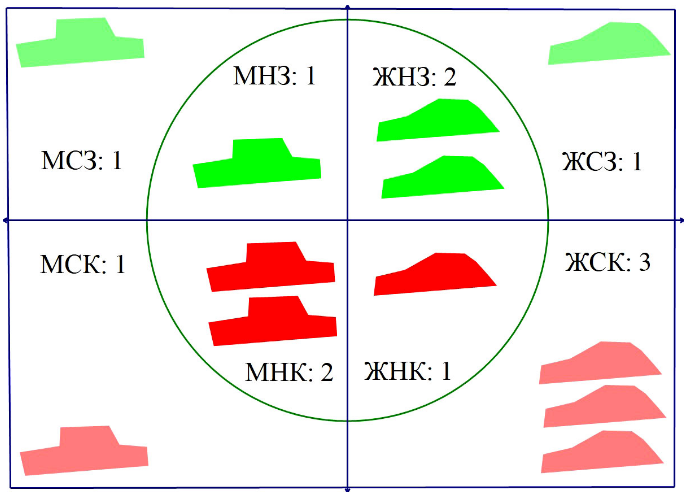


Рис. 5. Введение обозначений для классифицированных подмножеств

Теперь можно найти и назвать все подмножества, которые получаются при различных объединениях базовых подмножеств построенного разбиения (рис. 6).

4. ВВЕДЕНИЕ ДИАГРАММЫ ЭЙЛЕРА. ОТ СВОЕЙ МОДЕЛИ К ОБЩЕПРИНЯТОЙ. ПЕРВЫЙ ГЕНЕРАТОР

В этот момент преподаватель может показать классическую схему кругов Эйлера и показать, как выглядит соответствующая картинка а (рис. 7). Надо обратить внимание, что система классификации несколько иная. Каждому признаку соответствует круг, а внешность круга — отсутствие данного признака. Поэтому теперь важно, что все признаки в нашей задаче являются бинарными: Москвич — НЕ Москвич (Жигули), Красный — НЕ Красный (Зеленый), Новый — НЕ Новый (Старый).

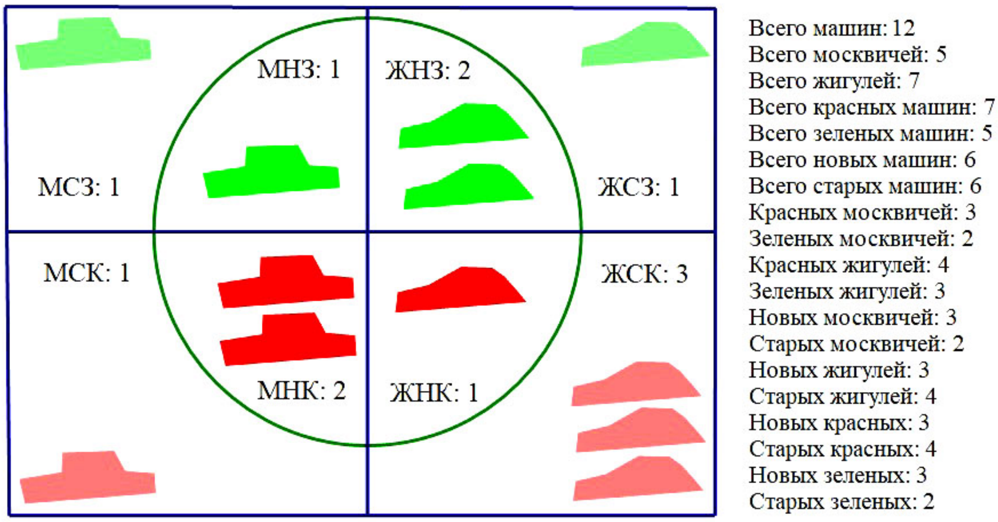


Рис. 6. Перечисление множеств, соответствующих различным комбинациям признаков

Далее можно предложить создать программу на JavaScript для классических задач на метод включения–исключения, когда в качестве исходных данных будут количества всех элементов множества, а также обладающих одним, двумя или тремя комбинациями заданных признаков. В качестве ответа нужно будет указать количество элементов, обладающих для каждой комбинации заданными тремя признаками. Примером модели может служить генератор заданий (рис. 8) из ИУМК «Математика в школе XXI век» [17].

В процессе создания модели ученики могут сделать типичные для задач на метод включений-исключений ошибки, связанные с естественным ограничением на количество элементов в каждом из подмножеств — эти числа должны быть неотрицательными. На рис. 9 показана версия динамической модели, в которой данные не генерируются, а задаются самим пользователем модели. На первый взгляд в условии задачи противоречий нет. Однако в процессе решения задачи выясняется, что промежуточные результаты — количества элементов некоторых частей разбиения — оказываются отрицательными (рис. 10). Интересно, что эта ошибка обнаруживается даже в школьных учебниках. В то же время создание модели с выводом всех промежуточных результатов дает возможность ученикам самим обнаружить и исправить эту ошибку, вводя ограничения на промежуточные результаты.

5. ТРУДНОСТИ РАСШИРЕНИЯ МОДЕЛИ. ГРАФОВАЯ МОДЕЛЬ. ВТОРОЙ ГЕНЕРАТОР

После обсуждения «типовой» задачи, возникает естественный вопрос о том, можно ли строить новые задачи, выбирая в качестве известных одни параметры и рассматривая другие в качестве неизвестных. Выписывание всех уравнений, которым удовлетворяют параметры задачи, оказывается достаточно утомительной процедурой. Получается 27 уравнений, и, по-видимому, одни из них могут быть получены из других.

А = М + Ж = Н + С = К + З;

М = МН + МС = МК + МЗ; Ж = ЖН + ЖС = ЖК + ЖЗ;

Н = МН + ЖН = НК + НЗ; С = МС + ЖС = СК + СЗ;

К = МК + ЖК = НК + СК; З = МЗ + ЖЗ = НЗ + СЗ;

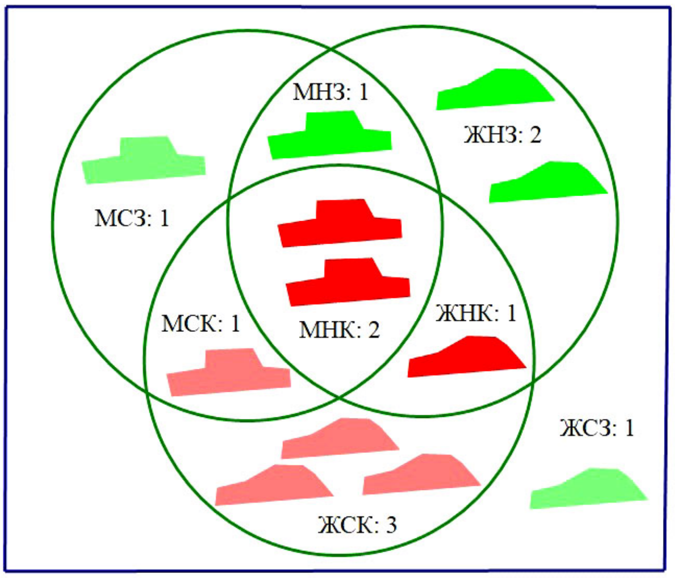


Рис. 7. Классическая диаграмма Эйлера для построенной модели Такая диаграмма возможна, только если признаки бинарные

МН = МНК + МНЗ;	ЖН = ЖНК + ЖНЗ;
МС = МСК + МСЗ;	ЖС = ЖСК + ЖСЗ;
МК = МСК + МНК;	ЖК = ЖСК + ЖНК;
МЗ = МНЗ + МСЗ;	ЖЗ = ЖНЗ + ЖСЗ;
НК = МНК + ЖНК;	СК = МСК + ЖСК;
НЗ = МНЗ + ЖНЗ;	СЗ = МСЗ + ЖСЗ.

Тех учеников, которые заинтересуются изучением системы уравнений, можно привлечь к изучению теории решения линейных уравнений, понятия независимости, базиса, ранга.

В то же время представляет интерес использование графовой модели для изучения возможности генерирования новых задач. Попробуем нарисовать дерево для классификации различных подмножеств. Одно из таких классификационных деревьев нарисовано на рис. 11.

На нижнем уровне дерева (вершины этого уровня называются листьями) представлены все восемь комбинаций трех различных признаков. Следующий снизу уровень показывает группы объектов, характеризующихся двумя признаками вне зависимости от третьего и т. д.

Чтение такого представления данных нужно начинать с верхней вершины (корня дерева): автомобили могут быть двух марок — москвичи (М) и жигули (Ж), в свою очередь, москвичи (М), могут быть или новыми (МН) или старыми (МС). Аналогично по этому признаку классифицируются и жигули (ЖН и ЖС). Далее каждый новый москвич может быть красным (МНК) или зеленым (МНЗ) и т. д.

Если указать значения параметров листьев (эти параметры называют весами вершин), то легко подсчитать значения во всех остальных вершинах. Вес каждой вершины будет равен сумме весов её непосредственных потомков (детей, если использовать терминологию генеалогического дерева) (рис. 12).

Составление задач в этой древесной модели выглядит как определение весов всех

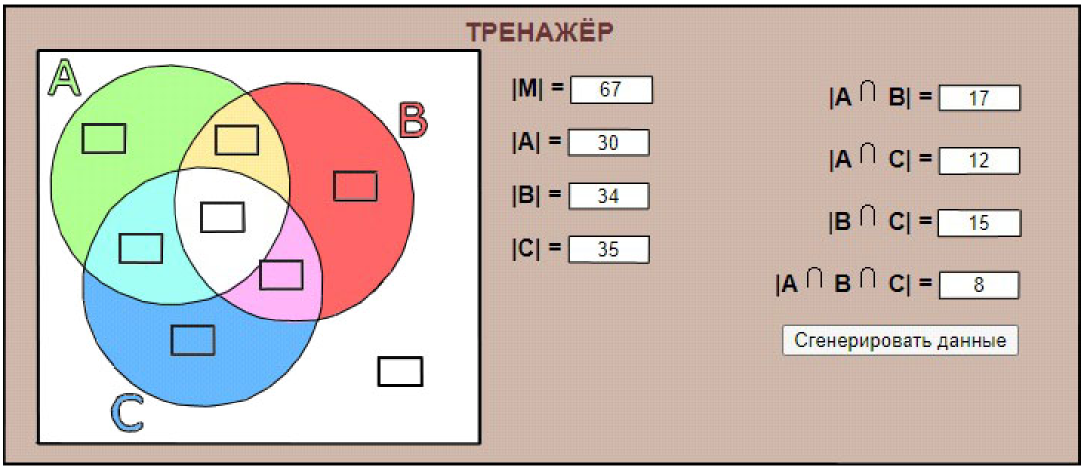


Рис. 8. Тренажер на JavaScript для решения «типовых» задач на метод включения-исключения с помощью кругов Эйлера (http://ipo.spb.ru/iumk/Math_XXI//Dynamic/D_3.1.2-1/D_3.1.2-1.html)

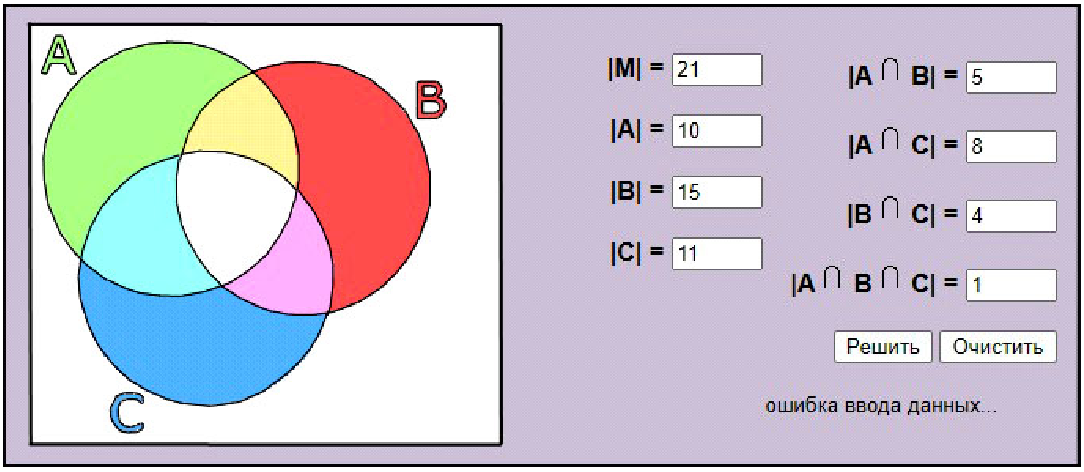


Рис. 9. Вариант модели кругов Эйлера с самостоятельно задаваемыми данными (http://ipo.spb.ru/iumk/Math_XXI//Modules/M_3.1.2/M_3.1.2.html)

вершин по заданным весам части вершин. Если известны все веса листьев, то легко определить веса остальных вершин, поднимаясь снизу вверх и заполняя вес очередной вершины суммой весов её непосредственных потомков. Возникает гипотеза о том, что по весам восьми «правильно» выбранных вершин можно определить веса остальных. То, что весов семи вершин недостаточно, можно быстро убедиться, придумав пример, аналогичный изображенному на рис. рис. 13.

Для того чтобы разработать правила выбора данных для задачи, целесообразно построить симуляционную компьютерную модель генератора задач, которая будет выбирать восемь случайных вершин графа и показывать их веса. Пользователь должен определить другие. Либо можно разработать ещё более простой вариант модели: при щелчке мышкой на вершину в ней появляется её вес, при вторичном щелчке — пропадает. Достаточно быстро станет ясно, что наличие среди исходных данных трех вершин, две из которых являются непосредственными потомками третьей, приводит в целом к неразрешимым задачам, так как эти три условия одновременно избыточны, и из них можно оставить

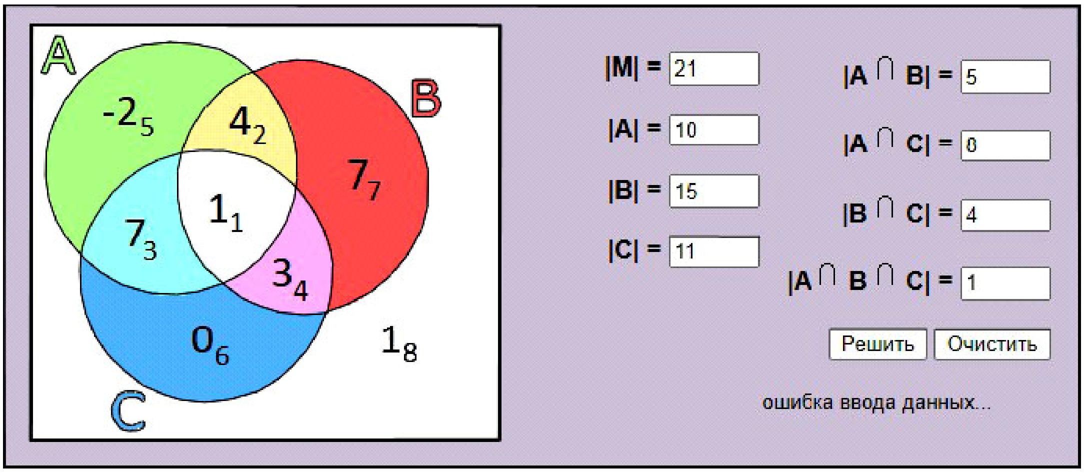


Рис. 10. Пошаговое решение задачи (номера шагов показаны индексами)

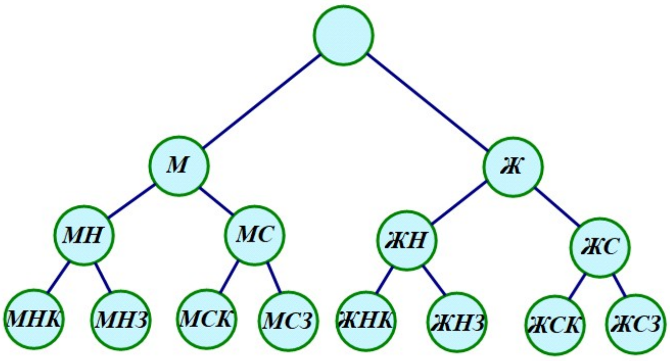


Рис. 11. Классификация объектов с тремя признаками

только два. Назовем это требование *условием треугольника*. Теперь это ограничение нужно будет ввести в программу, что приведет к необходимости обдумать способ задания графа, позволяющий легко определить связи соседних вершин. Например, это может быть список ближайших потомков, когда для каждой вершины указываются оба её непосредственных потомка. Другим способом является таблица (матрица смежностей), которая задается двумерным массивом A, и если $A[i; j] = 1$, когда j является непосредственным потомком i, в иных случаях $A[i; j] = 0$. Таким образом, ученики постепенно знакомятся со способами машинного представления деревьев и работой с графами в этих представлениях.

Далее естественно проверить экспериментально достаточность этого условия: если выбраны 8 вершин, удовлетворяющих данному ограничению, можно ли по их весам восстановить однозначно другие?

После нескольких экспериментов находится пример (рис. 14), который показывает невозможность восстановления всех весов при соблюдении только условия треугольника. Возникает идея о более равномерном распределении данных между ветвями дерева. Например, если перенести одно из данных из правого поддерева в левое (соблюдая правило треугольника, то задача станет решаемой). Для проверки этого условия ученикам придется разобраться с алгоритмом обхода дерева. Таким образом, математическая формулиров-

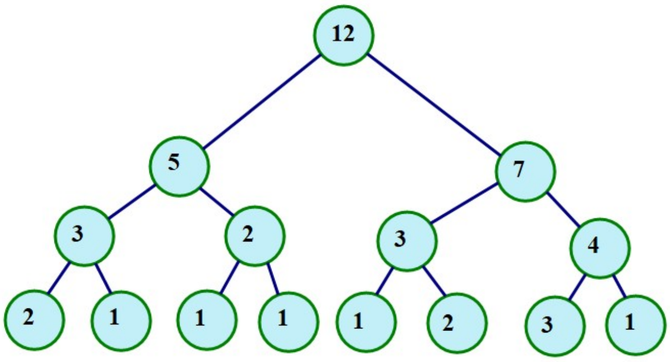


Рис. 12. «Вес» каждой вершины равен сумме весов её непосредственных потомков

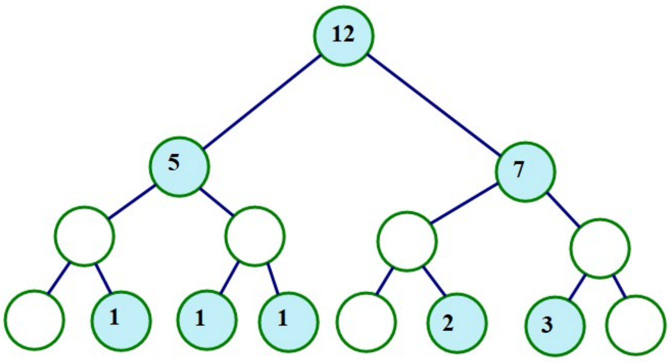


Рис. 13. В правом поддереве веса вершин определяются не однозначно

ка «решаемости задачи» откладывается, а её место занимают поисковые эксперименты, постепенно выявляющие разные особенности поставленной задачи. Причем задача здесь воспринимается не в узком смысле, а как проблема, подвергнутая целенаправленному исследованию. В ходе работы с моделью будут возникать промежуточные результаты, которые ученики могут сформулировать и обосновать сами. Например, «не менее половины весов листьев дерева должны быть известны». Или, точнее, «вес, по крайней мере, одного из двух листьев, являющихся непосредственными потомками одной вершины, должен быть известен».

Далее оказывается, что древесная модель не очень удобна. Можно попытаться изобразить все связи между подмножествами объектов (рис. 15). При этом возникает новая модель представления данных — *ориентированный граф*. Каждой вершине соответствует множество, описанное набором признаков. Стрелочки показывают отношение «содержать», например СК (старые красные автомобили) содержат в качестве подмножеств ЖСК и МСК (старые красные москвичи и старые красные жигули). Часть стрелочек не нарисована, например, нужно было бы провести стрелочки из С к ЖСК, из С к МСК и т. д., но тогда граф было бы ещё труднее рассмотреть. В таких ситуациях говорят, что требуемый граф является *транзитивным замыканием* данного, то есть, если есть стрелочка из С в СК, а из СК в ЖСК, то должны быть и стрелочка из С в ЖСК (нарисованная схема без «лишних» стрелочек называется диаграммой Хассе).

Для тех ребят, кто интересуется программированием, можно предложить написать алгоритм, который построит транзитивное замыкание, Также небезынтересным будет

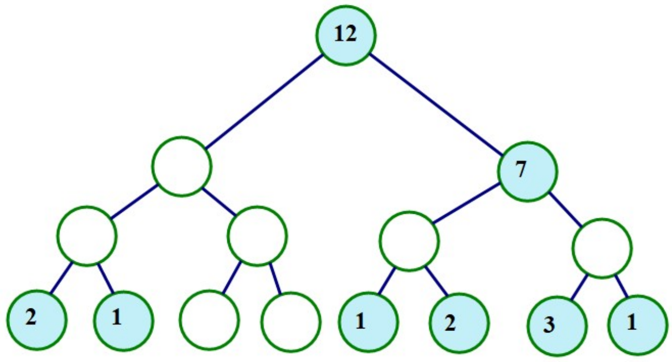


Рис. 14. Случай, когда невозможно восстановить однозначно веса всех вершин

использование программ рисования графов для «красивого» расположения графа на плоскости листа.

В то же время, как использовать эту модель для решения поставленной задачи — генерации задач по проблеме — не очень понятно, поэтому можно поискать другую модель для описания структуры нашей проблемы.

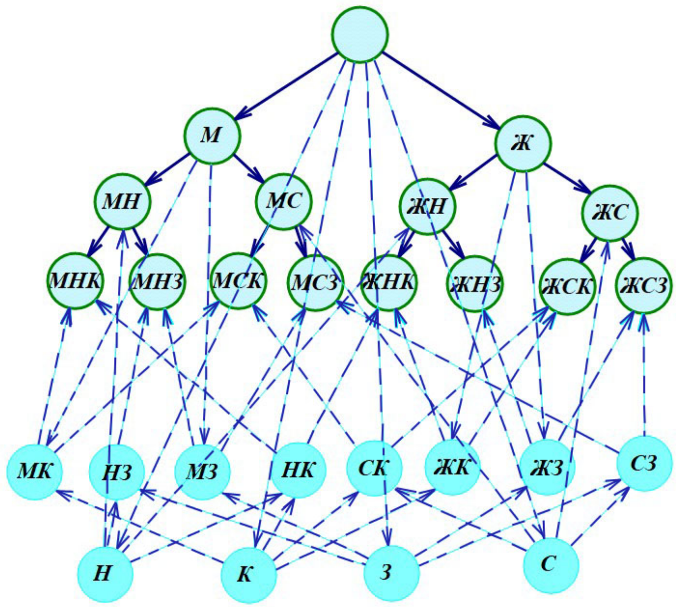


Рис. 15. Граф связей подмножеств, классифицированных по трем признакам

6. ВЫХОД В ПРОСТРАНСТВО. ТРЕТЬЯ МОДЕЛЬ И ТРЕТИЙ ГЕНЕРАТОР

Можно вспомнить процесс классификации, который привел к диаграмме Эйлера. Сначала плоскость экрана была поделена на две части, потом на четыре, для третьего признака пришлось использовать другую идею «внутри–снаружи», но можно себе представить «выход в пространство», которое естественным образом делится на восемь частей (рис. 16). В этой интерпретации кубики, формирующие верхнюю грань, демонстрируют различные виды красных автомобилей, задняя левая грань большого куба соответствует старым автомобилям, кубик в верхней грани, «смотрящий на нас» соответствует множеству новых красных москвичей и т. д.

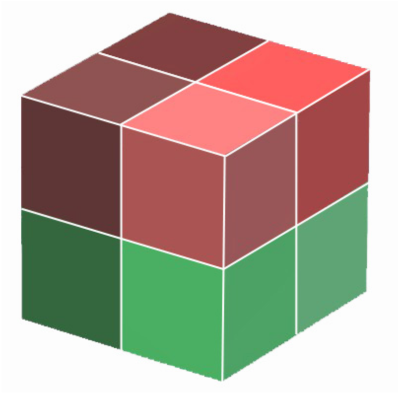


Рис. 16. Пространственная модель классификация по трем признакам

Такую модель можно использовать тем, у кого развито пространственное воображение, и следующие результаты можно проиллюстрировать на этой модели. В то же время модель можно сделать более удобной, если соединить центры кубиков так, чтобы получился граф этой пространственной модели (рис. 17).

Рассмотрим геометрическую модель, обозначив базовые подмножества точками и расположив их в трехмерной системе координат в соответствии с тремя признаками. Наличие признака означает значение 1 соответствующей координаты, а отсутствие признака — 0. Получим единичный куб (рис. 17).

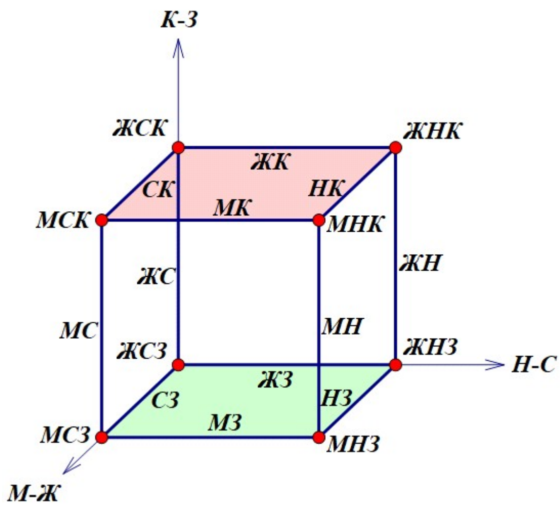


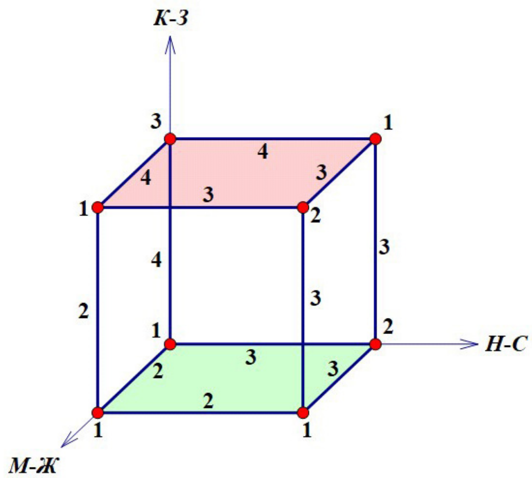
Рис. 17. Геометрическая модель описания подмножеств по трем признакам

В этой модели ребра куба будут соответствовать подмножествам с двумя признаками. Например, вершина МНК обозначает подмножество красных новых москвичей, вершина МНЗ — подмножество зеленых новых москвичей. Тогда ребро, их соединяющее, соответствует множеству новых москвичей.

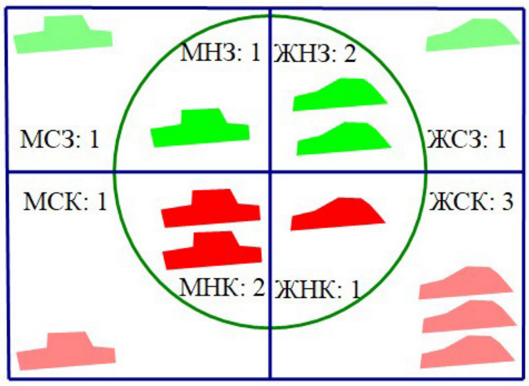
Аналогично, грань куба будет соответствовать множеству с одним признаком, например, верхняя грань куба соответствует множеству красных автомобилей, а нижняя — множеству зеленых.

Сопоставим данные задачи, представленной в плоской модели, элементам пространственной модели (рис. 18). Заметим, что в плоской модели представлены только данные, соответствующие вершинам куба в пространственной модели, а на пространственной модели естественным образом изображаются количества элементов каждого из подмножеств: вершинам соответствуют количества элементов подмножеств, обладающих тремя заданными признаками, ребрам — двумя, граням — одним, внутренности куба — количество всех автомобилей (чтобы не перегружать чертеж числа на гранях и внутренности куба не представлены).

Замечание. Перечисляя подмножества, мы пропустили «комбинированные» подмножества, например множество «москвичей и старых красных автомобилей». Вместе с такими подмножествами получается $2^8 = 256$ различных подмножеств (каждое из восьми элементарных подмножеств может входить или не входить в это комбинированное подмножество). Однако для создания генератора задач комбинированные подмножества не представляют интереса, так как делают задачу «некрасивой».



(а)



(б)

Рис. 18. Сопоставление пространственной (а) и плоской (b) моделей

На этой модели легче понять, какие задачи будут решаться, а для каких не будет хватать данных. Если рассматривать модель в виде системы уравнений, то можно будет увидеть, какие из уравнений можно получить из других. На рис. 19 показана иллюстрация к решению следующей задачи.

Задача 1.

Во дворе стоит 12 машин, часть из которых москвичи, другие — жигули, часть новые, другие — старые, часть красные, другие — зеленые. Известно, что среди всех машин 5 — москвичей, 6 — новых, 7 — красных, при этом красных москвичей 3, новых машин красного цвета — тоже 3, как и новых москвичей. Кроме того, известно, что новых красных москвичей — 2. Сколько во дворе старых зеленых жигулей?

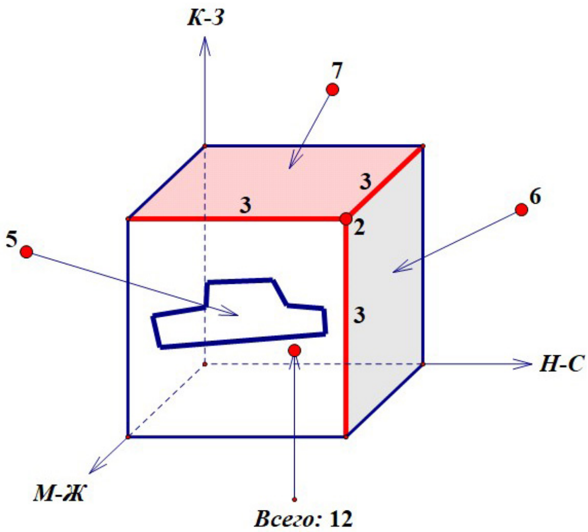


Рис. 19. Иллюстрация к задаче 1

В этой задаче можно поставить много разных вопросов, а именно столько, сколько величин на модели куба неизвестно: 7 вершин + 9 ребер + 3 грани = 19 задачи. Меняя выбор вершины для условия, получим, что заменой признаков, в каждой из 19 задач можно сделать 8, итого 152 задачи. Такой генератор потребует работы с функцией RANDOM, что важно с точки зрения изучения теории вероятностей. Результат работы может быть превращен в продукт — тренажер для решения задач на метод включений-исключений (можно соединить его с различными способами визуализации), что является важным, с точки зрения теории продуктивного обучения [18], а процесс создания такого генератора приведет к созданию мыслительных "продукций" в терминах Вертгеймера [19].

Представляет интерес проведение исследования по конструированию шаблонов таких генераторов. Как уже говорилось ранее, для того чтобы определить все характеристики, нужно знать значения восьми из них, при этом они должны быть между собой «независимы», то есть ни одна из них не должна вычисляться через остальные. Рассмотрим две другие конструкции генераторов (рис. 20). На них красным (сплошной линией) выделены характеристики, которые можно выбрать случайно или «почти случайно»: 7 ребер и одна вершина. Легко доказать, что они определяют значения остальных параметров: поскольку вес ребра равняется сумме весов его концов, то, зная вес одной из вершин и веса ребер, проходящих через все вершины, можно поочередно найти веса всех вершин, которые определяют веса всех остальных элементов куба.

Можно было бы написать неравенства, которые ограничивают значения заданных весов (например, чтобы вес ребра был не меньше веса его конца), но проще случайно генерировать неотрицательные веса всех вершин, а потом по ним вычислять все остальные характеристики, часть из которых будет представлена в качестве исходных данных, а одно или несколько остальных — в качестве неизвестных. Таким образом, остается только правильная генерация шаблонов. Так, на рис. 21 показаны два шаблона, в которых часть данных зависима. В этих шаблонах есть цикл из ребер.

Докажем, что в этом случае вес одного из ребер цикла можно выразить через другие. Так на рис. 22a сумма весов красных ребер $A'B' + D'C' + DC + AB = 4 + 3 + 3 + 2 = 12$ может быть рассмотрена как сумма весов вершин куба. С другой стороны сумма весов синих

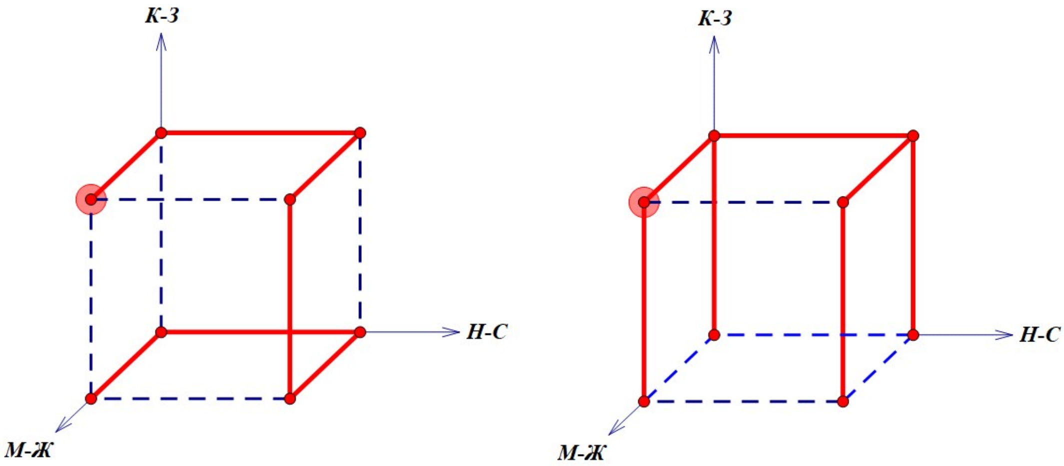


Рис. 20. Два новых шаблона для генераторов задач

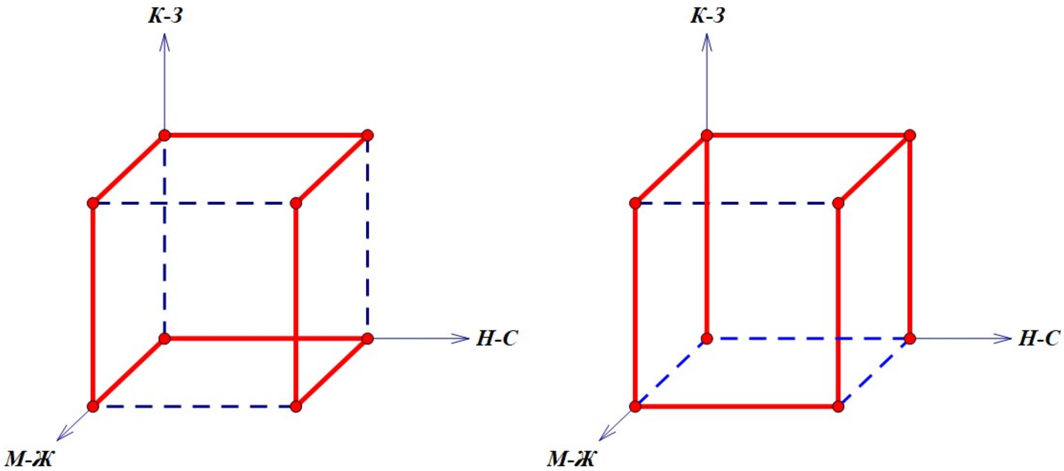


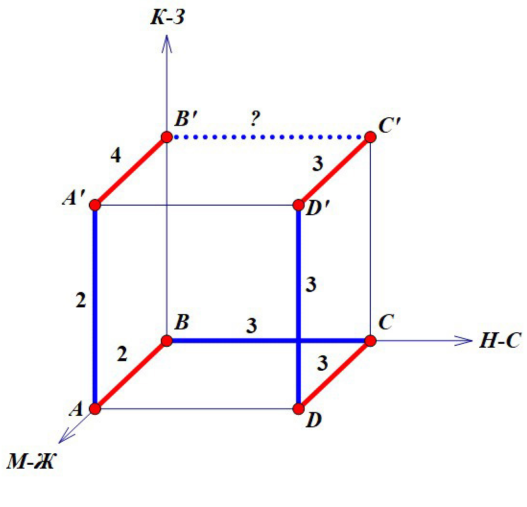
Рис. 21. Шаблоны с зависимыми данными

рёбер $BC + DD' + AA' + B'C' = 3 + 3 + 2 + x = 8 + x$ также является суммой весов вершин куба, откуда $x = 4$. Аналогично можно найти все грани на рис. 22б. Эти шаблоны показывают другие виды задач. В них данные не позволяют найти все характеристики моделей, но позволяют найти часть из них. Так, из модели на рис. 22а можно найти все характеристики, кроме весов вершин.

Обратим внимание, что у этих задач есть другая модель — модель линейных уравнений. В этих терминах задача может быть записано, например, так:

$$x + y = a; \quad y + z = b; \quad z + u = c; \quad u + v = d; \quad v + w = e; \quad w + t = f; \quad t + s = h.$$

Чему равно $x + s$?



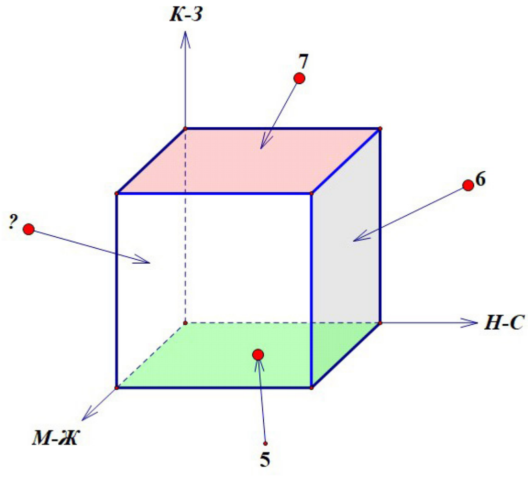


Рис. 22. Примеры зависимостей между весами ребер (а) и весами граней (b)

Решение:

Сложим уравнения, стоящие на нечетных местах:

$$x + y + z + u + v + w + t + s = a + c + e + h,$$

и отдельно на четных:

$$y + z + u + v + w + t = b + d + f.$$

Вычтем из первого уравнения второе. Получим:

$$x + s = a - b + c - d + e - f + h.$$

Заметим, что вопрос разных представлений математических смыслов является важной методической проблемой [3, 4, 20, 21]. Эта проблема особенно важна в условиях цифровизации, которые способствуют расширению представлений математических понятий в окружении ученика.

7. ОБСУЖДЕНИЕ

Особенностью проведенного теоретико-методического анализа является не обсуждение подходов к решению задач определенного типа и даже не обсуждение способов введения новых понятий в информационную среду обучения. Главной идеей было изменение подхода к учебной задаче. Вместо обсуждения различных методов её решения обсуждались различные модели представления данных задачи. Деятельность ученика не направлялась на решение «хитрой» задачи с поисками оригинального хода решения. Не направлялась эта деятельность и на поиск готовых шаблонов решения подобных задач. Вместо этого предлагалось самим создавать задачи.

Чем генерация задач может быть лучше их решения? Не является ли естественным понять, из какой области появилась задача? Почему эта задача называется задачей, а случайный набор данных и неизвестных задачей не будет? Не определяется ли нежелание ученика решать задачу непониманием самой сути «игры в задачи»? Почему задача иногда представляется ученику как фокус, который хочется разгадать, а в других ситуациях как скучная и непонятная деятельность? Ответ на последний вопрос многое проясняет.

Особенности фокуса в том, что человеку, с одной стороны, понятны все действия, которые делает фокусник, но неожиданным оказывается результат. Поэтому узнать секрет фокуса и научиться его делать — естественная реакция здорового человека. В то же время задача, которую учитель рассматривает как некоторое ритуальное действо, не всегда содержит *понятную ученику* интригу (если задача не содержит интриги в принципе, то нет смысла называть её задачей, лучше назвать упражнением).

Открывая ученику модель задачи, мы даем ему возможность самому «показывать фокусы» — создавать задачи! Вспомним, как мало в учебном процессе ситуаций, когда инициатива исходит от самого ученика.

Укажем на другой аспект проведенного анализа. В условиях цифрового окружения у учеников потенциально много средств для моделирования. Не явилось ли распространение компьютеров стимулом к развитие симуляционного, а может быть, и математического моделирования? Не станут ли навыки моделирования частичной заменой вычислительных навыков, которые были основой передачи знаний в докомпьютерную эпоху?

8. ВЫВОДЫ

Для нашей работы очень важно, что предложенные визуализированные модели и операции над ними являются артефактами, представляющими интеллектуальные механизмы, которые нужно сформировать у учеников посредством перевода их во внутренний план с помощью механизма интериоризации. Каждый из построенных артефактов может быть обоснован с позиций введения важных математических структур, как то: операций над множествами (пересечение, дополнение, объединение), связи операций над множествами с логическими операциями (явно это не представлено, однако изображение подмножеств элементами единичного куба является известным представлением дизъюнктивных нормальных форм), графов и их частных случаев — деревьев, отношения порядка и операций над ним (транзитивное замыкание), понятия линейной зависимости и базиса. Очень важной является линия бинарного соответствия, проходящая через все этапы построения различных моделей. Связь различных представлений является одним из важнейших элементов математического творчества.

Представленный анализ показал, каким образом можно изменить акценты в изучении математики так, чтобы использовать возможности моделирования как математического, так и симуляционного (посредством написания программ), для передачи важных смыслов, являющихся основой для формирования базовых математических понятий.

Список литературы

1. *Леонтьев А. Н.* Деятельность. Сознание. Личность. Избранные психологические произведения. Т. II. М.: Педагогика, 1983. 392 с.
2. *Выготский Л. С.* Психология развития человека. М.: Изд-во Смысл; Эксмо, 2005. 1136 с.
3. *Пейперт С.* Переворот в сознании. Дети, компьютеры и плодотворные идеи: Пер. с англ. М.: Педагогика, 1989. 224 с.
4. *Papert S.* An Exploration in the Space of Mathematics Educations // International Journal of Computers for Mathematical Learning. 1996. Vol. 1. № 1. P. 95–123.
5. *Schoenfeld A.* Mathematical Problem Solving. New York: Academic Press (1985).

6. *Uriel Joseph Wilensky*. Connected Mathematics — Building Concrete Relationships with Mathematical Knowledge. Thesis (Ph. D.)–Massachusetts Institute of Technology, Program in Media Arts & Sciences, 1993. Includes bibliographical references (leaves 201-209).
7. *Прангишвили А. С.* Исследования по психологии установки. Тбилиси, 1967.
8. *Асмолов А. Г.* Об иерархической структуре установки как механизма регуляции деятельности / В сб. «Бессознательное и его природа, функции и методы исследования. Под ред. Ф. В. Басина, А. С. Прангишвили, А. Е. Шерозия. Т. 1. Тбилиси, 1978.
9. *Асмолов А. Г.* О месте установки в структуре деятельности / автореф. дисс. на соиск. степ. канд. психол. наук. М., 1976. С. 22.
10. *Иванов С. Г., Поздняков С. Н.* Компьютер в продуктивном обучении математике или как информационные технологии могут поддержать интеллектуальную свободу обучаемого // Компьютерные инструменты в образовании. 2003. № 5. С. 10–20.
11. *Иванов С. Г.* Сочетание дискуссии с экспериментом на уроке математики // Компьютерные инструменты в школе. 2009. № 2. С. 66-72.
12. *Vavilov N.* Reshaping the metaphor of proof // Phil. Trans. R. Soc. A, 2019. Vol. 377. P. 2140. doi: 10.1098/rsta.2018.0279
13. *Minsky M.* The Society of Mind. Simon and Schuster. 1987.
14. *Давыдов В. В.* Проблемы развивающего обучения. М.: Академия, 2004. 288 с.
15. *Пойа Д.* Математическое открытие. М.: Наука, 1970. 448 с.
16. *Пойа Д.* Как решать задачу. М.: Либроком, 2010. 208 с.
17. *Горелик Л. Б.* Интерактивные минизадачники / Компьютерные инструменты в школе. 2008. № 6. С. 3–14.
18. *Башмаков М. И.* Теория и практика продуктивного обучения: Коллектив. моногр. М.: Нар. образование, 2000. 248 с.
19. *Вертгеймер М.* Продуктивное мышление. М., 1997.
20. *Адлай С. Ф., Поздняков С. Н.* Цифровые представления математических объектов в контексте различных форм представления математического знания // Компьютерные инструменты в образовании. 2020. № 1. С. 58–86. doi: 10.32603/2071-2340-2020-1-58-86
21. *Noss R., Hoyles C.* Windows on Mathematical Meaning: Learning Cultures and Computers. Vol. 17. Springer Science & Business Media, 1996. doi: 10.1007/978-94-009-1696-8

Поступила в редакцию 25.04.2020, окончательный вариант — 25.05.2020.

Иванов Сергей Георгиевич, кандидат педагогических наук, доцент кафедры алгоритмической математики СПбГЭТУ «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина), ✉ **sg_ivanov@mail.ru**

Поздняков Сергей Николаевич, доктор педагогических наук, заведующий кафедрой алгоритмической математики СПбГЭТУ «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина), ✉ **pozdnkov@gmail.com**

Computer tools in education, 2020
№ 2: 94–114
http://cte.eltech.ru
doi:10.32603/2071-2340-2020-2-94-114

Understanding the Problem by Modeling the Subject Area (with the Goal of Creating a Task Generator)

Ivanov S. G.[1], PhD, ✉ sg_ivanov@mail.ru
Pozdnyakov S. N.[1], PhD, ✉ pozdnkov@gmail.com

[1]Saint Petersburg Electrotechnical University,
5, building 3, st. Professora Popova, 197376, Saint Petersburg, Russia

Abstract

This article presents a theoretical analysis of the problem of comprehending educational material in mathematics on the example of a problem that was proposed by N. N. Pangina as a "touchstone" for studying the interaction of a teacher and a student in organizing the latter's independent work [In this issue, pp. 80–93].

The article discusses a methodological approach based on changing the pedagogical goal in relation to the task. Instead of starting with a search for a solution to the problem with specific data and focusing the student's attention on "building a route" from the conditions of the problem to what needs to be found, it is proposed to build models that allow generating new problems similar to the one given.

This formulation of the problem changes the psychological attitude of the student, relieves him of responsibility for the success of solving a specific problem. At the same time, prompted pushed by the teacher, the student builds various simulation models that can be easily programmed and turned into problem generators, thereby forming a mathematical model of the problem area in which the problem was set.

The proposed approach is based on the activity approach proposed in the works of A. N. Leontiev in the 70s of the last century [1], the idea of bringing out difficult-to-understand intellectual actions outside in order to use the mechanism of internalization [1, 2] and the works of Simour Papert related to the use of computer artifacts as intermediaries for comprehending new mathematical ideas [3, 4].

Keywords: *generation of tasks, understanding through modeling, simulation and mathematical models, digitalization of the learning environment, transfer of meaningst.*

Citation: S. G. Ivanov and S. N. Pozdnyakov, "Understanding the Problem by Modeling the Subject Area (with the Goal of Creating a Task Generator)," *Computer tools in education*, no. 2, pp. 94–114, 2020 (in Russian); doi:10.32603/2071-2340-2020-2-94-114

References

1. A. N. Leont'ev, *Deyatel'nost'. Soznanie. Lichnost'* [Activity, Consciousness, and Personality], vol. 2, Moscow: Pedagogika, 1983 (in Russian).
2. L. S. Vygotskii, *Psikhologiya razvitiya cheloveka* [Human Development Psychology], Moscow: Smysl, Eksmo, 2005 (in Russian).
3. S. Peipert, *Perevorot v soznanii. Deti, komp'yutery i plodotvornye idei* [Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas], Moscow: Pedagogika, 1989 (in Russian).

4. S. Papert, “An Exploration in the Space of Mathematics Educations,” *Int J Comput Math Learning*, vol. 1, no. 1, pp. 95–123, 1996; doi: 10.1007/BF00191473
5. A. Schoenfeld, *Mathematical Problem Solving*, New York: Academic Press, 1985.
6. U. J. Wilensky, *Connected Mathematics — Building Concrete Relationships with Mathematical Knowledge*, PhD diss., Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, US, 1993.
7. A. S. Prangishvili, *Issledovaniya po psikhologii ustanovki*[Research in Attitude Psychology], Tbilisi, Georgia: Izd-vo Metsniereba, 1967 (in Russian).
8. A. G. Asmolov, “On the hierarchical structure of the installation as a mechanism for regulating activity,” in *The unconscious and its nature, functions and research methods*, F. V. Basin, A. S. Prangishvili, and A. E. Sherozia, eds., Tbilisi, Georgia, vol. 1, pp. 147–157, 1978 (in Russian).
9. A. G. Asmolov, “O meste ustanovki v strukture deyatel’nosti” [On the place of installation in the structure of activity], PhD diss. in Psychology [Abstracts], Moscow State University, Moscow, 1976 (in Russian).
10. S. G. Ivanov and S. N. Pozdnyakov, “Komp’yuter v produktivnom obuchenii matematike ili kak informatsionnye tekhnologii mogut podderzhat’ intellektual’nuyu svobodu obuchaemogo” [Computer in productive teaching of mathematics or how information technologies can support the intellectual freedom of the student], *Computer tools in education*, no. 5, pp. 10–20, 2003 (in Russian).
11. S. G. Ivanov “Sochetanie diskussii s eksperimentom na uroke matematiki” [Combining discussion with experiment in a mathematics lesson], *Computer tools in school*, no. 2, pp. 66–72, 2009 (in Russian).
12. N. Vavilov, “Reshaping the metaphor of proof,” *Phil. Trans. R. Soc. A*, vol. 377, no. 2140, 2019; doi: 10.1098/rsta.2018.0279
13. M. Minsky, “Emotions and the Society of Mind,” M. Clynes and J. Panksepp, eds., *Emotions and Psychopathology*, Springer, pp. 171–179, 1988; doi: 10.1007/978-1-4757-1987-1_7
14. V. V. Davydov, *Problemy razvivayushchego obucheniya*[Developmental learning problems], Moscow: Academia, 2004 (in Russian).
15. G. Polya, *Mathematical discovery*, Moscow: Nauka, 1970 (in Russian).
16. G. Polya, *How to Solve It*, Moscow: Librokom, 2010 (in Russian).
17. L. B. Gorelik, “Interactive mini-taskers,” *Computer tools in school*, no. 6, pp. 3–14, 2008 (in Russian).
18. M. I. Bashmakov, *Teoriya i praktika produktivnogo obucheniya* [Theory and practice of productive learning], Moscow: Narodnoe obrazovanie, 2000 (in Russian).
19. M. Wertheimer, *Produktivnoe myshlenie* [Productive thinking], Moscow: Progress, 1987 (in Russian).
20. S. F. Adlaj and S. N. Pozdnyakov, “Digital Representations of Mathematical Objects in the Context of Various Forms of Representation of Mathematical Knowledge,” *Computer tools in education*, no. 1, pp. 58–86, 2020 (in Russian); doi: 10.32603/2071-2340-2020-1-58–86
21. R. Noss and C. Hoyles, *Windows on mathematical meanings: Learning cultures and computers*, vol. 17, Springer Science & Business Media, 1996; doi: 10.1007/978-94-009-1696-8

Received 25.04.2020, the final version — 25.05.2020.

Sergei Ivanov, PhD, Associate Professor of Algorithmic Mathematics Department, Saint Petersburg Electrotechnical University, ✉ sg_ivanov@mail.ru

Sergei Pozdnyakov, PhD, Head of Algorithmic Mathematics Department, Saint Petersburg Electrotechnical University, ✉ pozdnkov@gmail.com