Компьютерные инструменты в образовании, 2020
№ 1: 58–86
УДК: 373:51:007
http://cte.eltech.ru
doi:10.32603/2071-2340-2020-1-58-86

ЦИФРОВЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ В КОНТЕКСТЕ РАЗЛИЧНЫХ ФОРМ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЗНАНИЯ*

Адлай С. Ф.[1], научный сотрудник, ✉ semjonadlaj@gmail.com
Поздняков С. Н.[2], доктор педагогических наук, ✉ pozdnkov@gmail.com

[1]Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление»
Российской академии наук, ул. Вавилова, 40, 119333, Москва, Россия
[2]Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»
им. В. И. Ульянова (Ленина), ул. Профессора Попова, 5, корп. 3, 197376, Санкт-Петербург, Россия

Аннотация

Данная статья посвящена сравнительному анализу результатов проекта ReMath (Representing Mathematics with digital media), связанного с изучением цифровых представлений математических понятий. Теоретические положения и выводы этого проекта будут анализироваться на основе теории информационной среды [1], разработанной с участием одного из авторов этой статьи. Выполненный в этой работе анализ частично совпадает с выводами проекта ReMath, но использует другую основу исследования, базирующуюся в большей степени на работах отечественных ученых. Представляет интерес анализ работ проекта ReMath с концептуальных позиций, изложенных в этой монографии, и установление связей между понятиями и отличий в понимании влияния компьютерных инструментов (артефактов) на процесс обучения математике. В то же время авторы оспаривают трактовку зарубежными исследователями некоторых вопросов в работах Выготского и дают свой взгляд на виды и функции цифровых артефактов в обучении математике.

Ключевые слова: *информационная среда обучения, артефакты, компьютерные инструменты, представление знания, смыслы, понимание, проект ReMath.*

Цитирование: Адлай С. Ф., Поздняков С. Н. Цифровые представления математических объектов в контексте различных форм представления математического знания // Компьютерные инструменты в образовании. 2020. № 1. С. 58–86. doi: 10.32603/2071-2340-2020-1-58-86

1. ВВЕДЕНИЕ

В многочисленных статьях, посвященных тематике проекта ReMath, используется ряд терминов, которые авторы вводят для описания исследуемых процессов. В числе таких терминов используются “артефакт”, “представление”, “смыслы” (meanings), “контек-

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-29-14141: изучение взаимосвязи концептуальных математических понятий, их цифровых представлений и смыслов, как основы трансформации школьного математического образования.

сты". В рамках этого проекта выделены и проанализированы взгляды двух разных направлений — конструктивистского и семиотического — на одни и те же понятия. Авторы проекта ReMath ссылаются на работы некоторых советских психологов, в том числе на работы Л. С. Выготского и А. Н. Леонтьева. В то же время, по нашему мнению, трактовка работ Л. С. Выготского и А. Н. Леонтьева зарубежными исследователями не акцентирует важные аспекты, которые являются актуальными для изучения влияния цифрового окружения на интеллектуальное развитие человека. Поэтому мы начнем с изложения нашей позиции, развивая идеи монографии [1], после чего перейдем к анализу проекта ReMath.

2. РЕПРЕЗЕНТАЦИИ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ. АРТЕФАКТЫ И ИНСТРУМЕНТЫ. ПЕРЕДАЧА СМЫСЛОВ — ПОНИМАНИЕ

Термин "представление" в русском языке является омонимом. Под представлением математического понятия мы можем понимать его интерпретацию / репрезентацию (например "геометрическое представление решений уравнения"), и под этим же термином мы можем понимать психический процесс («воспроизведённый образ предмета или явления, которые здесь и сейчас человек не воспринимает и который основывается на прошлом опыте субъекта (человека)» [2, с. 261].

Для того чтобы избежать путаницы, будем там, где она может возникнуть, использовать термин "репрезентация" для внешнего представления понятия и "представление" соответственно — для внутреннего.

Заметим, что омонимичность этих понятий имеет психологическое обоснование в терминах механизма интериоризации [3]. Интериоризация — это перенос действий с объектами внешнего окружения во внутренний план. Тем самым, выбирая то или иное внешнее представление (репрезентацию) математического понятия, мы можем ожидать (как следствие деятельности с этим внешним представлением) перенос его во внутренний план. Формирование представления должно обязательно состояться, если удастся организовать «правильную» деятельность с репрезентацией. Использование неопределенного термина «правильная деятельность» говорит о том, что содержание его нам неизвестно и что этот сложный процесс требует изучения. В то же время, мы считаем, что интериоризация происходит, когда репрезентации используются человеком в роли инструмента ("орудия" в терминах Л. С. Выготского [4]), что и обеспечивает передачу смысла. Таким образом, мы бы хотели отделить понятия "артефакта" — объекта искусственного происхождения от понятия "инструмента" как функции использования артефакта. Функциональная характеристика артефакта может быть частично обусловлена его структурой (например, циркулем рисуют окружности, линейкой проводят прямые). В то же время большая часть функционального содержания артефакта связана с его ролью посредника в социальном общении людей (как нарисовать окружность с помощью циркуля, как соединить точки прямой с помощью линейки). Причем это может существенно выходить за видимые свойства самого артефакта. Мы знаем целую область математических задач на построение циркулем и линейкой, которые не обусловлены использованием их материальных реализаций, в то время как переданные с их помощью смыслы структурируют мыслительные процессы человека. Более того, они неотделимы от существа математических понятий.

Вот что по этому поводу писал А. Пуанкаре:

«В геометрии мы встречаемся на первых шагах с понятием прямой линии. Можно ли определить прямую линию? Обычное определение ее как кратчайшего расстояния от одной точки до другой меня не удовлетворяет. Я исходил бы просто из линейки и показал бы ученику, как можно проверить линейку, повернув ее другой стороной, такая проверка есть истинное определение прямой линии: прямая линия — это ось вращения. Затем надобно ученику показать, что линейку можно проверить посредством скольжения, и при этом обнаружится одно из наиболее важных свойств прямой линии…

Для определения круга можно исходить из циркуля. Ученики с первого взгляда узнают начерченную кривую. Затем им покажут, что расстояние между двумя точками инструмента остается постоянным, что одна из этих точек неподвижна, а другая движется, и таким образом ученики естественно придут к логическому определению…

Быть может, вас удивит это постоянное применение подвижных инструментов. Это не грубый прием, он более философский, чем это кажется с первого взгляда. Что такое геометрия для философа? Это изучение некоторой группы. Какой именно? Группы движений твердых тел. Каким же образом определить эту группу, не заставляя двигаться некоторые твердые тела?» [5, с. 469].

Термин “понимание” мы будем связывать с процессом передачи “смыслов” (значений, meanings). К изучению феномена понимания (осмысления) следует отнестись более внимательно ввиду изменения внешней среды обучения, связанной с её цифровизацией. Возникают вопросы:

- Можно ли сконструировать информационную среду так, чтобы процесс интериоризации проходил без учителя?
- Какую роль играют те или иные составляющие учебной среды, и не приведет ли введение цифровых объектов к понижению надежности передачи знания?

Говоря о “надежности” передачи знания, мы имеем в виду проблемы массового обучения, когда ученики имеют различные базовые представления.

Требует исследования проблема “посредников” между учителем и учеником. По этому вопросу расходятся взгляды двух школ, которые сравнивались в рамках проекта ReMath. Так, сторонники семиотического подхода склонны рассматривать только знаковые системы как посредника между учителем и учеником, в то время как сторонники конструктивистской школы считают, что посредником должен быть вещественный или овеществленный объект.

С нашей точки зрения, которая ниже будет пояснена примерами, это противопоставление основано на однобокой трактовке работ Л. С. Выготского и А. Н. Леонтьева. Это подтверждает внимательное чтение работы «Роль орудия в развитии ребенка» [4], в которой Л. С. Выготский показывает, что важным является использование знаковых возможностей языка (внутренние механизмы) вместе с внешними знаковыми объектами, такими как текст, рисунки и пр. В этой работе представлена роль внешнего мира в овладении ребенком своим мышлением. Иными словами, мыслительные процессы начинают происходить, когда ребенок взаимодействует с внешним миром. Каждый помнит, как сидевший смирно ребенок вдруг начинает беспорядочно двигаться, пытаясь ответить на трудный вопрос или решить задачу. Другой яркий пример — завязывание узла на носовом платке как способ запомнить что-то. Натыкаясь впоследствии на узел, человек, завязавший его, каким-то чудесным образом вспоминает то, что нужно было запомнить. Тем самым узел — не есть способ хранения информации, он только орудие для запоминания. Далее Л. С. Выготский вводит понятие “знака объекта” внешнего мира, которым обычно является слово, и переходит к изучению диалектической связи языка и мышления. Таким образом, слова, используемые для управления мышлением, в некотором роде случайны — они не являются представлением некоторых сущностей, как, может быть, считают те, кто вспоминает структуру учебника. Введение нового термина через определение, описание или связи нового понятия с уже имеющимися представлениями нужно рассматривать именно как такой процесс «завязывания узелка на платке». Уже в этом акте легко увидеть роль учителя. В качестве аналога сравним чтение художественного текста случайным человеком и артистом: случайный человек видит в тексте слова и знаки препинания, артист «вкладывает в каждое слово смысл». Это достигается не самим набором слов, а его использованием (можно сказать использованием в качестве инструмента): сложной артикуляцией, паузами, акцентами, мимикой и другими средствами, которые создают различные комбинации сигналов извне с внутренними представлениями. Именно эти сложные композиции и образуют внутренний образ воспринимаемого текста. Марвин Минский называет такие внутренние образы К-линиями (knowledge lines) — линиями знания [6]. Как будут трактовать этот процесс последователи семиотического подхода? Что здесь будет знаками? Читаемый текст? Нет. Это будет сложный образ, вызванный прочтением этого текста человеком, понимающим смысл этого текста. Думается, что именно этот, описанный без формальных определений процесс следует связать с процессом передачи смыслов. Другой известный пример — исполнение произведения по нотной записи. Ноты не могут передать смысла, они являются лишь средством, через которое музыкант, прочувствовавший произведение на основе имеющейся у него глубокой музыкальной культуры, передает его смысл аудитории. Есть ли в этом (или предыдущем) примере то, на что могут опереться конструктивисты? Нет, так как здесь нет явного взаимодействия с внешним объектом, оперирования им.

Мы считаем, что говоря о знаках и орудиях, следует обе этих сущности объединить в рамках интересующего нас явления — процесса передачи знаний (в широком смысле слова). Оба они являются средством для передачи смыслов от человека к человеку. В этой связи можно упомянуть высказывание С. С. Лаврова об отличии информации от данных [7]. Он пишет, что информация есть интерпретированные человеком данные. С точки зрения нашего анализа — данные являются тем посредником, через который люди обмениваются информацией. Тексты, картинки, ноты, компьютерные артефакты — все это суть посредники между учителем и учеником (между тем, кто обладает некоторым знанием, и тем, кто хочет его получить).

Рассмотрим далее несколько выделенных в монографии [1] представлений математических знаний, которые рассматриваются как элементы информационной среды обучения. В этой монографии используется термин “формы представления математических знаний”. Его нельзя отождествить с репрезентацией — внешним представлением понятия. В то же время оно не равносильно внутреннему представлению, которое исследователи часто отождествляют с “абстрагированной сущностью”. В данном случае это связь между различными внутренними представлениями, которая образуется путем одновременной актуализации соответствующих физических и математических представлений. В терминах работы [6] М. Минского — это формирование новой линии знания на основе двух имеющихся (заметим, что линию знания не следует представлять как линию в геометрическом смысле, она скорее напоминает дерево, листья которого принадлежат различным «агентствам», то есть активируют разные области мозга).

3. ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ

3.1. Физическое представление знаний

Начнем с цитаты из упомянутой выше монографии: «Формирование информационной среды процесса обучения требует изучения форм, в которых передается знание. Даже беглый взгляд на преподавание любого предмета показывает постоянное изменение этих форм и параллельное существование различных. Формы представления знаний зависят и от самого предмета. На эволюцию форм влияет развитие предмета и изменение взглядов на психологию обучения. В конечном счете, предметный и психологический фактор синтезируются в методических воззрениях. Поэтому представляет интерес анализ нескольких существенно различных подходов к преподаванию с точки зрения форм представления знания» [1, с. 18].

В качестве первой формы представления математических знаний рассматривается физическая интерпретация математических понятий и методов. Приоритет такой формы объясняется во многом историческими связями между физикой и математикой. Характерно высказывание Х. Роджерса: «Вместе физик и математик могут помочь в создании той наиболее загадочной интеллектуальной конструкции в голове ученика, построения, которое является центральным как для профессионального физика, так и для профессионального математика: преобразования формального концептуального источника представления в уверенную, быструю и инстинктивную интуицию, и понимание того, как взаимодействие догадки и интуиции с одной стороны и формального описания и анализа с другой ведут к новому (зачастую поразительному) знанию так же, как к новой и более глубокой интуиции» [10, с. 231–236].

Заметим, что физическое представление математического знания не предполагает явно ни использования физических объектов, ни каких-то знаковых нотаций этих объектов. Формы представления знаний отражают один из принципиальных законов функционирования памяти: запоминаются не сами объекты, а связи между ними. Это высказывание является несколько утрированным описанием процесса образования новой К-линии на основе уже имеющихся, о чем написано выше.

Физическая форма представления знаний основывается на том, что у всех учеников уже есть представления, которые соответствуют таким понятиям, как перемещение, скорость, длина, вращение, площадь, объем и пр. Наиболее последовательно использование физической формы представления математических знаний проведено в курсах математики [8, 9], прочитанных талантливыми физиками Р. Фейнманом и Я. Зельдовичем. Представляет интерес и взгляд на использование примеров авторов книги Я. Зельдовича и И. Яглома, рассчитывающих на читателя-друга, который хочет не сомневаться, а верить и берется за книгу для того, чтобы научиться новому, не смущаясь тем, что «высокоученую» теорию авторы иногда заменяют просто разбором примеров. По существу, примеры и являются дидактическими средствами соединения вместе представлений из разных областей, они инициируют одновременную активацию агентов, представляющих каждое из уже имеющихся знаний, и создают основу для образования нового знания, так как пример выступает как средство их связи, образ, соединяющий их вместе.

При такой форме представления математического знания остается открытым вопрос объяснения механизма абстрагирования смысла от несущественных черт, привносимых моделью. Вот что об этом пишет Р. Фейнман: «В какой степени полезны модели? Интересно, что модели очень часто помогают в работе, и большинство преподавателей физики пытаются учить тому, как пользоваться моделями, чтобы выработать хорошую физическую интуицию. Но всегда выходит так, что величайшие открытия абстрагируются от модели, и модель оказывается ненужной. Максвелл создал электродинамику, наполнив пространство массой воображаемых шестеренок и зубчатых колесиков. Но колесики и шестеренки мы отбросили, а теория осталась. Дирак же открыл правильные законы релятивистской квантовой механики, просто угадав уравнение» [8, стр. 49].

Высказанные соображения позволяют лучше понять причины и роль геометрии в школьном курсе математики. Фактически геометрия также использует физическую форму представления математического знания. По словам академика А. Д. Александрова, «Особенность геометрии, выделяющая её не только среди остальных частей математики, но и среди других наук вообще, состоит в том, что в ней строгая логика соединена с наглядным представлением. Геометрия в своей сущности и есть такое соединение живого воображения и строгой логики, в котором они взаимно организуют и направляют друг друга» [11, с. 57].

В дальнейшем мы обсудим использование визуальных образов и чертежей как артефактов в изучении геометрии, однако в данном случае мы обращаем внимание только на существование наглядных представлений, с которыми могут быть связаны математические (в данном случае логические) конструкции.

3.2. Операционное представление знаний

Опора на уже существующие представления наиболее точно соответствует принципу инвестиций, сформулированному М. Минским в книге [6]. Его сущность состоит в том, что ребенок в процессе развития создает несравненно больше мыслительных конструкций, чем за всю дальнейшую жизнь. Поэтому при встрече с новой ситуацией человек, в первую очередь, опирается на те представления, которые у него были сформированы в детстве. Однако, говоря о физической форме представления знаний, можно предполагать, что будут использованы более сложные представления, которые у разных учеников могут быть сформированы в разной степени, возможно, даже благодаря их индивидуальным особенностям. Поэтому при групповом обучении могут возникнуть сложности в разной степени понимания учениками учителя, или, другими словами, смысл объяснения будет передан одним и не воспринят другими. Можно ли обеспечить передачу смысла при групповом обучении? Можно, и это было успешно реализовано в школьном обучении математике в середине прошлого века. Для этого у учеников создавались искусственные представления посредством многократного выполнения простых действий. При этом моторные действия и визуальные образы написанного, действующие одновременно, создавали определенные внутренние образы. Такой подход к обучению кратко именуют ЗУН (знания–умения–навыки).

Психологическая основа операционного представления знаний разработана в теории поэтапного формирования умственных действий Л. Гальпериным. Вот как в терминах этой теории формулируются основные выводы:

«а) вместе с действиями формируются чувственные образы и понятия о предметах этих действий. Формирование действий, образов и понятий составляют разные стороны одного и того же процесса. Более того, схемы действий и схемы предметов могут в значительной мере заменять друг друга в том смысле, что известные свойства предмета начинают обозначать определенные способы действия, а за каждым звеном действия предполагаются определенные свойства его предмета» [12, с. 99].

Гальперин изучает процесс такого формирования знаний и выделяет такие его структурные элементы, как “ориентировочная часть”, “деятельный навык”, “изменения формы действия”, “полнота звеньев действия”, “идеально выполненное действие” и пр.:

«в) действие переносится в идеальный план или целиком или только в своей ориентировочной части. В этом последнем случае исполнительная часть действия остается в материальном плане и, меняясь вместе с ориентировочной частью, в конечном счете, превращается в деятельный навык;

г) перенос действия в идеальный, в частности, умственной план совершается путем отражения его предметного содержания средствами каждого из этих планов и выражается многократными последовательными изменениями формы действия;

д) … изменения полноты звеньев действия, меры их дифференцировки, меры овладения ими, темпа, ритма и силовых показателей… ведут к преобразованию идеально выполненного действия в нечто, что в самонаблюдении открывается как психический процесс…» [12, с. 99].

Не вдаваясь в подробности поэтапного формирования умственных действий, отметим лишь, что человек в процессе этого обучения рассматривается в двух различных ипостасях. С одной стороны, он рассматривается механистически, как система, действующая на условных рефлексах, или, в другой метафоре, как компьютер, наполняемый алгоритмами для выполнения действий с вводимыми данными. Другая ипостась предполагает, что таким образом создается общая для всех учеников основа из внутренних представлений и мыслительных механизмов, которую можно считать посредником (в некотором смысле “знаковым артефактом”) для передачи смыслов.

Следует отметить, что операционный взгляд на представление математических знаний имеет не только дидактическое значение, но и показывает различные способы внутреннего представления знаний. Так известен пример различия взглядов Ньютона и Лейбница на дифференциальное исчисление. Если для Ньютона это исчисление отражало физические сущности, то Лейбниц рассматривал этот аппарат как символьное оперирование некоторыми абстрактными сущностями (бесконечно малыми). Разумеется, само понятие бесконечно малых в системе представлений Лейбница имело сложную структуру, основанную на связях с другими понятиями. Однако для нас интересно то, что Лейбниц не использовал физического представления производных и в процессе развития теории делал характерную ошибку, считая что производная произведения равна произведению производных, какую, по словам В. Арнольда, никогда бы не сделал Ньютон: «В соответствии с универсальностью своих размышлений он быстро пришел к выводу, что дифференцирование — гомоморфизм кольца, то есть должна иметь место формула $d(xy) = dx \cdot dy$. Но через некоторое время он убедился, что это приводит к каким-то неприятным следствиям, и нашел правильную формулу $d(xy) = xdy + ydx$, которая теперь называется правилом Лейбница. Никому из индуктивно мыслящих математиков — ни Барроу, ни Ньютону, которого впоследствии называли эмпирическим ослом — никогда бы не пришла в голову первоначальная гипотеза Лейбница, так как им было совершенно очевидно, чему равен дифференциал произведения, из простой картинки» [13, с. 36–37].

Основная проблема преподавания математики в современных условиях, связанных с цифровизацией окружающей среды, заключается в появлении компьютера, совершающего стандартные операции с математическими объектами, которые дублируют операции, выполняемые учеником. Поскольку существо операционного представления как единства двух различных процессов, один из которых репродуктивный, а другой продуктивный, не получило должного отражения в дидактике, спор о целесообразности или нецелесообразности использования компьютера, располагается в другой плоскости, где на первое место ставится вопрос «как с помощью компьютера ввести новое понятие, продемонстрировать то-то и то-то и т. д.».

Нужно ответить и на другие вопросы:

- Какие мыслительные механизмы при таком-то использовании компьютера не сформируются?
- В каких ситуациях использование компьютера приведет к улучшению понимания, а в каких заблокирует этот процесс?
- Как с помощью компьютера передать те смыслы, которые раньше передавались другим способом?

На последний вопрос дал ответ Симур Паперт, показав, что можно ввести такой внешний инструмент (орудие), посредством которого ученик сможет получить смысл математического понятия. Таким инструментом стала у Паперта Лого-черепашка [14]. Рассмотрим такую форму передачи знания более подробно.

3.3. Инструментальная форма представления математического знания

В наиболее известной работе Симура Паперта «Переворот в сознании. Дети, компьютеры и плодотворные идеи» (в имени автора которой используется иная транскрипция — Сеймур Пейперт [14]) вводится новый объект, который по своему смыслу и форме можно назвать артефактом. Это Лого-черепашка. Появление и изучение в связи с этим языка «программирования» ЛОГО многие рассматривают как цель проекта Паперта. Однако своей книгой он доказывает, что цель была иная: показать, как, используя внешний объект и управляя им с помощью простых команд, ребенок овладевает своим мышлением. Это в точности соответствует определению роли орудия в окружении ребенка, сформулированной Л. С. Выготским в работе «Орудие и знак в развитии ребенка». Вот что пишет сам автор в предисловии к этой книге: «Эта книга представляет собой попытку сместить делаемый Пиаже в прикладной генетической эпистемологии акцент на когнитивной сфере, с тем чтобы включить в рассмотрение сферу аффективную. В книге развивается новое направление в педагогических исследованиях, когда внимание сосредоточивается на создании условий, при которых могут возникать интеллектуальные модели» [4].

В статье [15] Паперт на примере показывает, что введение компьютера в учебный процесс играет роль не только площадки для экспериментов, перевода части теоретических рассуждений в область экспериментов с виртуальными объектами, но и орудием, посредством которого ученик может по иному строить свои рассуждения, основываясь на иных внутренних представлениях.

В статье описан случай, когда Паперт предлагает своим коллегам — известным специалистам в области использования компьютера в преподавании математики способ целесообразного применения компьютера для решения задачи, которую приводим здесь без образной фабулы, связанной с игрой в регби (“I have selected a problem that has recently been the subject of published commentaries by several researchers whose general philosophies of education are close enough to my own to engage specific dialogue and bring out how z differs from the shared position in the “Logo community” [16–18] (Noss & Hoyles, 1996; Resnick, 1993; Wilensky, this issue). All these authors participated in a workshop the members of which were invited to use their preferred software tools to tackle the following problem (summarized here from Wilensky’s description” [15]).

Математическая сущность задачи такова: на оси абсцисс находится отрезок, нужно найти точку на оси ординат L так, чтобы отрезок был виден из неё под наибольшим углом. Коллеги Паперта предложили несколько чисто математических методов, основанных на знании формул тригонометрии, затем экспериментальный подход, основанный на методе Монте-Карло. В ответ Паперт предложил свой подход. Его объяснение состояло из двух частей: экспериментов с формулировкой гипотезы и доказательства. В первой он предложил написать Лого-программу, которая для случайной точки плоскости (точнее для случайно выбранных узлов сетки) вычисляет угол, под которым виден отрезок (как разность углов наклона прямых к концам отрезка) и красит точки, из которых отрезок виден под одинаковыми углами, в один цвет. После этого появится красивая «поляроидная» картинка, состоящая из окружностей, то есть окажется, что точки, из которых отрезок виден под одинаковым углом, лежат на окружности, для которой отрезок является хордой. Наименьшая из этих одноцветных окружностей и определяет наибольший угол — эта окружность касается L. Небезынтересно узнать от самого Паперта, как ему пришла в голову эта идея, то есть какие внутренние представления были инициализированы: «Мой личный подход к проблеме, когда я впервые столкнулся с ней, мобилизовал идею, которая была настолько “горячей” для меня в то время, насколько вероятностные методы могли быть “горячими” для Резника и Виленского. Это приняло форму “эвристического драйва”, чтобы вырвать мое мышление из линии L и визуализировать скрытый угол по всей плоскости. Я чувствовал связь с потенциальными полями и вопросами о визуализации их с помощью таких устройств, как рисование эквипотенциальных контурных линий или рисование трехмерной поверхности поверх двумерного поля. Когда это случилось … эта ориентация сразу же слилась с видением ответа: контурные линии должны быть кругами через A и B; меньший кружок представляет наибольший угол, поэтому ответ можно найти, посмотрев на кружок, который просто касается L» [15, с. 111].

Многие отечественные исследователи считают, что эксперимент с виртуальной средой может служить заменой традиционного доказательства. Однако сам Паперт так не считает и в следующем разделе статьи показывает роль черепашки как орудия в освоении приемов математического доказательства.

Доказывается структура получившейся картинки, то есть, что из точек, лежащих на окружности с данной хордой, отрезок виден под одним и тем же углом. Доказательство состоит в анализе поведения черепашки и представлений ребенка о собственном движении, повторяющем движения черепашки. Для доказательства предлагается проследить, на какой угол повернется черепашка вокруг своей оси при перемещении от одного конца отрезка до другого, сначала двигаясь по окружности, а потом по сторонам угла.

Приведем рисунок из статьи Паперта (см. рис. 1). Паперт предлагает мысленно запустить две черепашки одну из M в N по окружности (по пути $MM''PM'N$), другую по сторонам угла MPN. Исходное направление «туловища» черепашек — по касательной к окружности в точке M (можно придраться, что ученики не знают понятие касательной, но в том-то и дело, что черепашка, рисующая круг, всегда находится в положении «по касательной», поэтому при такой репрезентации знания соответствующее представление у ученика имеется).

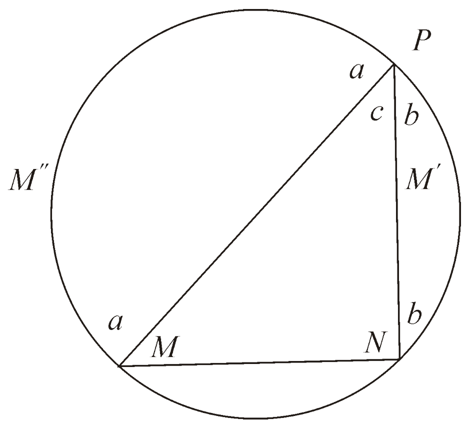

Рис. 1. К доказательству свойства вписанных углов [15]

Проследим сначала за черепашкой, движущейся по кругу: пройдя половину пути от точки M до P, она будет ориентирована параллельно прямой MP, и, значит, повернется на угол a, затем, в ходе прохождения второй части пути, она повернется ещё на угол a. Теперь сравним перемещение черепашки по отрезку MP: сначала черепашка должна повернуться на угол a, чтобы её направление совпало с направлением MP, потом без поворотов пройти отрезок MP и снова должна повернуться на угол a (из соображений симметрии), чтобы занять положение «по касательной». Аналогично и на участке движения от P к N. Таким образом, очевидно, что черепашки, движущиеся по разным путям, повернутся на угол $2a+2b$.

Итак, в этой статье Паперта наглядно показано, что внешний объект — компьютерный инструмент — может играть роль орудия для формирования математических понятий аналогично с разобранными выше формами представления математического знания.

Теперь, после представления наших взглядов, основанных на развитии идей информационной среды обучения [1], перейдем к анализу некоторых результатов проекта ReMath и установлению связей между используемой в нем терминологией и её интерпретацией в свете изложенного выше.

Сначала сделаем анализ теоретических построений, а затем перейдем к анализу рассмотренных в статьях компьютерных сред.

3.4. Анализ работ проекта ReMath и связанных с ним статей

Начнем с анализа того, как интерпретируются работы Выготского в основополагающей работе [16], на которую ссылается и сам Паперт.

В разделе 6.1. «Язык и инструменты» авторы пишут:

«Но Выготский идет дальше. Он настаивает на том, что подход к высшей когнитивной функции заключается в деконтекстуализации — посредничестве от знака к знаку [19]. Другими словами, критерий Выготского для высшей когнитивной функции — это именно то, что Нунес называет «не представляющим референтов», разрывая со всеми значениями, полученными из ссылочной области. При этом он окончательно вступает в союз с теми, кто помещает мысль и действие в иерархические отношения и, что хуже, с образовательной точки зрения, разрывает связь между ними.

Confrey объясняет это следующим образом: ...Непосредственно заменяя орудия труда психологическими орудиями знаков, он (Выготский) фактически разорвал связи между знаками и основными инструментами, действиями и операциями, которые их производят, и сделал акцент исключительно на движении среди знаков [20, p. 207]. Метод Выготского состоял в том, чтобы сосредоточиться на значении слова. Делая этот выбор, он обязательно ставит формальное, теоретическое и ментальное предпочтение перед неформальным, практическим и активным» [16, p. 41].

В этой цитате Выготскому приписывается отрыв знаков от их предметной сущности. Но в работе «Орудие и знак в развитии ребенка» [4, с. 1039–1129] Выготский показывает, что знаки являются символами предметов, и переход от оперирования внешними предметами к оперированию их именами, точнее, внутренними образами, раскрывает сущность процесса интериоризации: он соединяет воедино предметную деятельность, язык и мышление.

Возможно, именно однобокая трактовка работ Выготского стала причиной того, что Симур Паперт ведет свою работу, отталкиваясь от работ Пиаже, а не Выготского, хотя второй гораздо ближе к нему по идейному содержанию работ. Основная идея главной работы Выготского «Мышление и речь» [4, с. 663–1019] связана с критикой взглядов Пиаже на развитие психических функций ребенка на основе спонтанной деятельности и постепенного вытеснения простых психических функций более сложными. Выготский строит теорию, которая пытается показать, что новые функции строятся на основе старых, не вытесняя их, и что процесс этот не обязательно спонтанный. Напомним, что главным феноменом, от которого отталкивался Пиаже в своей генетической эпистемологии, являлся феномен скачкообразного усвоения закона сохранения вещества (до 4 лет дети как бы не понимают, что при переливании воды в стакан с дном более широкой площади воды не становится меньше, а после 5 лет все отвечают на этот вопрос правильно). Паперт (см. Принцип Паперта в книге М. Минского [6]) объяснил это феномен появлением агентов более высокого административного уровня, иными словами, дети всегда знали, что вода не исчезает, но у них не было нужной внутренней структуры, позволяющей работать одновременно с тем, что они видят, и с тем, что они знают. Таким образом, можно сказать, что критика Пиаже в работе Выготского уже получила конструктивную трактовку в работах последователей Пиаже.

Приведем несколько выдержек из работы «Орудие и знак в развитии ребенка», показывающих более точно позицию Выготского:

«Два процесса исключительной важности, которым посвящена эта статья: применение орудий и использование символов — рассматривались до сих пор в психологии как изолированные и независимые друг от друга. На протяжении долгого времени в науке существовало мнение, что практическая интеллектуальная деятельность, связанная с употреблением орудий, не имеет существенного отношения к развитию знаковых, или символических, операций, например речи» [4, с. 1051–1052].

«Существенный момент операции мнемической — участие в ней определенных внешних знаков. Субъект не решает здесь задачи непосредственной мобилизацией своих естественных возможностей; он прибегает к известным манипуляциям вовне, организуя себя через организацию вещей, создавая искусственные стимулы, которые отличаются от других тем, что обладают обратным действием: направляются не на других людей, но на него самого и позволяют ему с помощью внешнего знака осуществить запоминание» [4, с. 1097–1098].

«Логическим следствием из признания первостепенной важности употребления знаков в истории развития всех высших психических функций является вовлечение в систему психологических понятий тех внешних символических форм деятельности (речь, чтение, письмо, счет, рисование), которые обычно рассматривались как нечто постороннее и добавочное по отношению к внутренним психическим процессам и которые с новой точки зрения, защищаемой нами, входят в систему высших психических функций наравне со всеми другими высшими психическими процессами. Мы склонны рассматривать их прежде всего как своеобразные формы поведения, слагающиеся в истории социально-культурного развития ребенка и образующие внешнюю линию в развитии символической деятельности наряду с внутренней линией, представляемой культурным развитием таких функций, как практический интеллект, восприятие, память и т. п. Таким образом, в свете развиваемой нами исторической теории высших психических функций сдвигаются привычные для современной психологии границы разделения и объединения отдельных процессов; то, что размещалось прежде в различных клетках схемы, на самом деле принадлежит к одной области, и обратно: казавшееся относящимся к одному классу явлений на самом деле находит место на совершенно различных ступенях генетической лестницы и подчинено совершенно различным закономерностям...

Наконец, в функциональном отношении их характеризует то, что они выполняют в поведении новую и существенно иную по сравнению с элементарными функциями роль, осуществляя организованное приспособление к ситуации с предварительным овладением собственным поведением» [4, с. 1090–1091].

В то же время следует отметить, что в работах Выготского акцент делается на использование языка и его социальную функцию, что естественно объясняется тем, что знаки являются внутренним образом предметов, а не наоборот, и оперирование знаками очевидно должно рассматриваться как психическая функция более высокого уровня, чем оперирование предметами. Рассмотрим следующее высказывание Выготского:

«Можно сказать, что усвоение иностранного языка так же подымает на высшую ступень родную речь ребенка, как усвоение алгебры подымает на высшую ступень арифметическое мышление, позволяя понять всякую арифметическую операцию как частный случай алгебраической, давая более свободный, абстрактный и обобщенный, а тем самым более глубокий и богатый взгляд на операции с конкретными количествами. Так же, как алгебра освобождает мысль ребенка из плена конкретных числовых зависимостей и подымает его до уровня наиболее обобщенной мысли, так точно усвоение иностранного языка другими совершенно путями освобождает речевую мысль ребенка из плена конкретных языковых форм и явлений» [4, с. 861–862].

Следует признать, что суждения Выготского, подобные приведенному, открывают путь к критике его взглядов. Такого рода высказывания предлагают слишком прямую связь между математическими идеями и психологическими механизмами их формирования. В данном случае алгебра не приводит к новым психологическим конструкциям, которые уже были сформированы у ученика. Более того, то, что она абстрагирует свойства от арифметических операций, не является психологическим феноменом, а скорее новым знанием. Алгебру, по нашему мнению, стоит рассматривать как иную форму представления тех же математических знаний, которая не строится на тех же представлениях, что и арифметика. Нетрудно провести мысленный эксперимент, чтобы понять, что ученик, освоивший арифметику, никогда не «изобретет» алгебру, скорее он изобретет то, что можно называть математическим моделированием, и, наоборот, человек, освоивший алгебраические приемы, не сможет самостоятельно оперировать ими в содержательном контексте.

Таким образом, мы можем утверждать, что в работах Выготского содержатся идеи, развитые позже в работах Паперта и получивших название конструктивного подхода к обучению.

Рассмотрим концепцию последователей конструктивистской теории на примере одной из базовых статей по проекту ReMath [38] и дадим серию комментариев к некоторым суждениям из этой статьи.

1. «Роль представлений важна в том смысле, что они воспринимаются как неотъемлемые компоненты артефактов, подвергающихся изменениям, и как средство выражения, генерирования и передачи смысла» [38, p. 360].

Комментарий. Термин “представление” здесь понимается не как образ объекта в голове обучаемого (в ряду таких терминов как представление, знание, понятие), а как материальный объект, созданный специально как посредник для передачи некоторых смыслов. Обратим внимание, что авторы не рассматривают артефакт как орудие в понимании Выготского [4], когда оно используется для овладения ребенком механизмами собственного мышления. Тем самым, авторы предполагают, что артефакт является некоторым носителем знания, а не орудием управления познавательными процессами.

2. «Природа представлений и виды их использования находятся в центре внимания в той степени, в которой они играют значительную роль в конструкционистском кон-

тексте, то есть в том случае, когда устное и письменное общение сочетается с общением посредством манипулирования цифровыми представлениями? которые также воспринимаются как артефакты» [38, p. 360].

Комментарий. Здесь утверждается, что цифровые представления могут рассматриваться как артефакты. В этом утверждении следует отделить, например, цифровое представление собственно текста от представления его смысла. Знаковое представление языка несомненно является важным инструментом для управления собственным мышлением, но его трудно назвать «цифровым представлением», так как функции текста в цифровом представлении не отличаются от его функций в печатном представлении. Однако можно предположить, что авторы не относят «письменное общение» к использованию артефактов, выделяя его в особую категорию. Однако неясно, куда в их трактовке отнести рисунки и схемы, которые также не обязаны быть в цифровом формате, физические модели (точнее представления о физических процессах), которые могут выступать в роли посредников при передаче смыслов, но могут не иметь форму цифровых артефактов (эти представления уже интериоризированы и не нуждаются в выведении их вовне).

3. «Конструктивные артефакты могут включать в себя широкий спектр сложности и воспринимаются и анализируются как сами представления [21]» [38, p. 360].

Комментарий. Логочерепашка Паперта максимально проста именно потому, что она служит орудием и сама по себе не является объектом изучения. Аналогично в окружении ребенка есть игрушки, роль которых могут иметь очень простые объекты типа куклы из завязанного узлом платка или деревянной минимально обработанной чурочки, которым дети придают смыслы в процессе игры с ними, и здесь они являются орудиями для овладения как мыслительными, так и социальными процессами (которые между собой тесно связаны). С другой стороны, есть сложные объекты, которые тоже называются игрушками, например правдоподобная, самоходящая и говорящая кукла. Однако роль такой игрушки несколько иная, она уже не используется как орудие, она образует окружение ребенка. Если мы рассматриваем сложные артефакты, то, скорее всего, их нельзя рассматривать как орудия, хотя они и будут являться элементами информационной среды обучаемого. Нужно ли нам для развития теории информационной среды рассматривать объекты внешней среды, не играющие роль орудия? Нужно более точно определить роль сложноустроенных артефактов. Такие артефакты рассматривались в работе [22].

4. «Как структура, так и функциональность артефактов важны для процесса обучения. Некоторые связи могут быть сделаны различием Эдвардса между структурной и функциональной перспективами и различием артефакта и инструмента, сделанным Vérillon и Rabardel [22]» [38, p. 360].

В этой работе авторы также анализируют работы Выготского и приходят к следующим выводам. В работах Выготского «... развитие рассматривается как результат в значительной степени искусственного процесса, в котором приобретение инструментов играет ведущую роль. Это не столько инструмент сам по себе..., но и функциональная перестройка и перераспределение, которые его приобретение и использование навязывают врожденным механизмам на разных уровнях: сенсорно-моторном, перцептивном, мнемоническом, репрезентативном и т. д.

Гипотезы Выготского дают стимулирующие теоретические ориентиры для изучения влияния артефактов на познание. Тем не менее, общий макроскопический уровень, на котором они сформулированы, оставляет открытым вопрос, касающийся вовлеченных основных микроскопических процессов» [22].

Что авторы понимают под микропроцессами, можно понять из целей поставленного ими эксперимента, связанного с изменением формы и перемещением объекта.

«Как таковые, артефакты рассматривались в их инструментальном измерении: как составляющие элементы решения поставленных задач. Поэтому ожидалось, что микрогенезис, возникающий в ходе разработки решения, будет... зависеть от роли и функционального значения, придаваемого инструменту субъектами.

По этой причине при анализе этих ситуаций особое внимание было уделено репрезентативным аспектам деятельности:

— генезис проблемного пространства для ребенка, его эволюция в процессе выполнения задачи и выработка решения (решающие моменты, препятствия, прослеживание и т. д.);

...

— ...тип целей, которые ставит сам субъект, преобразования, которые он ожидает, и т. д.

— роль, которую играет артефакт в решении проблем: если он должен быть разработан, как он создается? Если он доступен, то как он вписывается в процесс решения проблем? ...

— взаимообусловленность представлений и процессов: их эволюция в ходе задачи» [22, p. 95].

Далее в работе описываются три вида работ, связанных с освоением токарного станка, направления роботов и пр. Авторы делают вывод:

«В частности, эти эксперименты подчеркнули микрогенетические характеристики этого процесса разделения причинности и действия между артефактом и пользователем. Мы показали, что он параллелен процессу совместной эволюции представлений ученика о причинности явлений и о причинности его собственных действий» [22].

Отметим, что аналогичные результаты были ранее представлены в работе И. С. Якиманской: «Следует подчеркнуть, что деятельность представливания на любом уровне ее осуществления является продуктивной. Различия здесь лишь в степени продуктивности, условиях ее выполнения. Преобразование исходного материала для построения образа имеет место на любом уровне осуществления деятельности представливания. Различны только конкретные механизмы» [23].

Авторы [22] предложили IAS-модель (Instrumented Activity Situations) — «ситуации с инструментальной активностью», в которой инструмент является посредником между субъектом (учеником) и объектом (предметом изучения или овладения) (рис. 2).

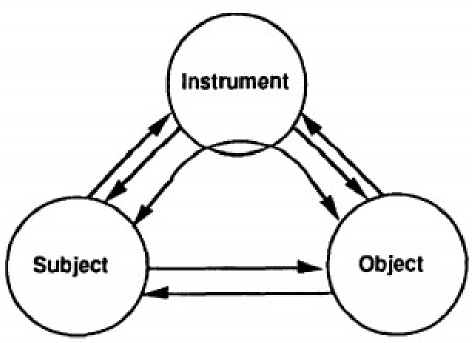

Рис. 2. IAS-модель [22, p. 85]

«Другой важный аспект, совместимый с моделью IAS, заключается в том, что ни микрогенезис, наблюдаемый в процессе овладения тем, как использовать токарный станок или робота, ни эволюция, отмечаемая, когда ученики перешли от ручного изготовления к механизированным средствам, не являлись результатом простого процесса приспособления субъекта к ассимиляции артефакта… Приобретение знаний учениками относительно артефакта, а также их… деятельность в процессе оперирования (взаимодействия субъекта с инструментом) всегда оказывалась взаимозависимой с их представлениями о природе процесса преобразования (взаимодействие инструмента с объектом), причем артефакт, опосредующий их воздействие на окружающую среду, в свою очередь, являлся опосредующим для концептуализации этой среды (взаимодействие субъекта / объекта, опосредованное инструментом)» [22].

Комментарий. Обсуждение связи структуры и функциональности целесообразно соотнести с теорией полос уровня, представленной в работе Марвина Минского [6]. В этой теории он обсуждает механизмы работы памяти на основе К-линий (knowledge lines): «Мы обучаемся путем подключения агентов к К-линиям, но мы не присоединяем их одинаково жестко. Вместо этого мы делаем прочные связи на определенном уровне детализации, но делаем более слабые связи на вышестоящих и нижестоящих уровнях». Представляет интерес трактовка Минским вышестоящего и нижестоящего уровня: нижний уровень относится к деталям структуры объекта, а верхний — к его функциональному использованию. Тем самым “сущность” объекта кодируется средним уровнем детализации. С этой точки зрения, необходимо соотнести такой артефакт с вынесенным вовне смыслом некоторой идеи. Тогда предполагается, что сам артефакт может использоваться для разных целей (функциональность) и в то же время иметь ряд параметров, которые позволяют использовать его в различных ситуациях. Рассмотрим с этой точки зрения пример артефакта, приведенного авторами работы [38]: график квадратичного трехчлена, параметры которого могут быть изменены пользователем. Тогда нижняя полоса уровней — это коэффициенты, которые в начале взаимодействия установлены по умолчанию, а потом могут быть изменены соответственно задаче. Труднее увидеть функциональный уровень, который, по-видимому, предполагает использование этого артефакта как инструмента для решения разных задач. Такую функциональность, по всей видимости, должен добавить преподаватель, ставя различные задачи. Например: «на рисунке представлен график квадратичного трехчлена, нужно определить его коэффициенты, пользуясь данным инструментом» или «проведя эксперименты, сформулируйте условия на коэффициенты, при которых график не будет иметь точек в третьей четверти».

5. «Когда представление используется, то именно потому, что оно воспринимается как податливое, смыслы передаются вместе с изменениями, внесенными в само представление» [38, p. 360].

Комментарий. Здесь термин “представление” выступает как “граничный объект”. Понятие граничного объекта введено в работе [26] в связи с изучением понятия “общего информационного пространства”. Граничный объект используется для передачи смыслов внутри “практикующего сообщества”, обладающего общим контекстом. В связи с этим граничный объект является структурой, с одной стороны достаточно жесткой, чтобы передавать смыслы, с другой стороны, достаточно гибкой, чтобы иметь возможность передать все вариации и интерпретации смысла. Можно увидеть аналогию граничного объекта с понятием полосы среднего уровня в теории К-линий.

6. «В то же время в конструктивистском контексте представления (репрезентации) рассматриваются не просто как объекты, которым может быть придан какой-либо смысл, а как артефакты, с которыми можно манипулировать» [38, p. 360].

Комментарий. С точки зрения теории интериоризации, авторы, возможно, выражают мысль о том, что представления абстрактных (мысленных) объектов в форме их внешних (материализованных) представлений должны обладать таким неотъемлемым качеством как возможность манипулирования. Действительно, процесс переноса внешних действий во внутренний план предполагает выполнение некоторых действий с объектом внешней среды.

7. «В типичной ситуации люди будут разбирать артефакт или улучшать его, или использовать его в качестве основы или строительного блока для создания более сложных структур, или просто рассматривать его как базу для создания чего-то другого» [38, p. 360].

Комментарий. Эта характеристика артефакта нуждается в более тщательном анализе, так как не соответствует идее Лого-черепашки, которая не является ни сложным объектом, ни блоком для строительства более сложных структур. Черепашка выступает в роли орудия (в терминах Выготского) для овладения механизмами мышления. Выше мы назвали такой вид артефакта «сложным» и пока не можем прокомментировать способ, которым оно оказывает влияние на мыслительные механизмы ученика.

Если рассмотреть в качестве артефакта компьютерную программу, то она будет обладать указанными свойствами, так как может подвергаться анализу — «разбору» — и в то же время может рассматриваться как элемент для построения более сложных программ.

8. «Таким образом, математическая конструкция квадратичной функции на примере предыдущего раздела может быть представлена в текстовом виде с помощью математического формализма, с помощью формализма в языке программирования или с помощью модели чего-либо, созданного такими функциональными отношениями (например траектория снаряда в ньютоновском пространстве с гравитацией). Во всех случаях внимание обращено на то, с чем манипулируют. Смысл (meaning) создается посредством использования артефакта, но также формируется самим представлением. Представление играет роль важного элемента учебной среды, которая полна возможностей генерировать смыслы вокруг концепции, изначально разработанной педагогами» [38, p. 360].

Комментарий. Этот абзац подтверждает, что в качестве примера артефакта авторы рассматривают также и компьютерную программу. Нуждается в анализе утверждение о том, что смысл может формироваться как посредством использования артефакта, так и самим его представлением (репрезентацией). Можно ли к примеру формульное представление квадратичной функции считать артефактом? Если следовать идее С. И. Шапиро из работы о свертке алгоритмов [24], то оперирование формулами (на бумаге) приводит к их свертке, что является частным случаем интериоризации. В то же время, в силу исторических причин формулы, видимо, не относят к числу артефактов, хотя и рассматривают как представление математических объектов. Само представление (здесь репрезентация) определяет, как новая идея будет представлена в уме (точнее, в информационной системе ученика) В целом абзац не дает возможности понять соотношение артефакта и репрезентации.

9. «... учащиеся генерируют неожиданные смыслы и использование представлений, и фактически это часто порождает новые и оригинальные смыслы» (“It does allow for surprise, i.e. students generating unexpected meanings and uses of the representations and in fact it often welcomes creative and original meanings”) [38, p. 360].

Комментарий. По-видимому, авторы считают, что репрезентация представлений сама может передать смысл без участия человека-посредника. Это очень сильное утверждение, нуждающееся в дополнительном анализе с целью уточнения контекста, в котором авторы используют это утверждение.

10. «Тем не менее, существует дидактическая интенциональность в отношении возможных значений: конструирование среды обучения и репрезентации в ней предназначены для поддержки конкретных целей обучения» [38, p. 360].

Комментарий. В этом утверждении авторы вновь возвращаются к конструированию среды и репрезентаций математических понятий как к целенаправленной деятельности учителей. Вопрос о том, собираются ли преподаватели отделить от себя среду или же рассматривают себя как её часть остается нераскрытым.

11. «Поскольку репрезентации рассматриваются как выражения смысла, способы манипулирования представлениями также представляют смысл» [38, p. 361].

Комментарий. Здесь авторы отделяют манипулирование репрезентациями от самих репрезентаций и косвенно отсылают читателя к артефактам, раз предполагают манипулирование репрезентацией. Опять же, если рассматривать алгебраические преобразования как манипулирование, то противоречия не будет. Но можно ли считать представления понятий носителями смысла без манипулирования ими?

12. «Написание уравнения и затем непрерывное изменение его параметра с помощью ползунка — это особый тип представления непрерывного изменения или скорости изменения между двумя значениями переменной. Нажатие на объект для выполнения действия над этим объектом также является выражением смысла» [38, p. 361].

Комментарий. Разберем пример. Не очень понятно, что авторы подразумевают под «написанием уравнения» — то ли построение модели (умственная деятельность, не выносимая вовне) то ли просто ввод уравнения в систему для манипулирования его параметрами. Далее авторы рассматривают в качестве артефакта такой элемент, как ползунок, предполагая, что непрерывность изменения можно рассматривать как репрезентацию некоторой математической сущности. В этом мы видим потенциальную ошибку. Действительно, в природе мы наблюдаем множество непрерывных явлений, для которых наш мозг (вместе с органами зрения и слуха) создает дискретные объекты, заменяющие непрерывные процессы их именами. Будет ли созерцание меняющегося объекта орудием (в терминах Выготского), которое можно рассматривать как инструмент овладения собственным мышлением? Ещё более странным является трактовка нажатия на объект как выражение смысла. Кнопку можно рассматривать как свернутый алгоритм [24], и если в уме человека сформировалась такая свертка, то её, наверное, можно назвать смыслом, но вряд ли вынесение имени этого смысла вовне может запустить процесс интериоризации, формирующий этот смысл, если его не было в голове ученика.

13. «В соответствии с конструкционистской точкой зрения, артефакты рассматриваются не как объекты с фиксированными свойствами, а как объекты, которые изменяются и используются» [38, p. 361].

Комментарий. В этом высказывании авторы трактуют понятие артефакта не как орудие в отличие от того, как его применял Паперт и как его использовал Выготский. В трактовке Паперта и Выготского артефакт предполагает изменений — он является посредником между внешним миром и умом ученика. Поэтому только свойство “использоваться (применяться)” из приведенной цитаты соответствует теориям Паперта и Выготского. Видимо, понятие артефакта нуждается в разделении на два разных объекта: U-артефакт (используемый артефакт), C-артефакт (изменяемый артефакт). Если роль первого легко отнести к конструктивистской, то есть психологической теории, то роль второго, видимо, более целесообразно изучать на основе дидактических принципов, так как прямое выявление психологических механизмов будет затруднительным.

14. «Действия по обсуждению поведения, планированию и реализации изменений и участию в постоянном совершенствовании артефактов являются неотъемлемой частью обучения. В том же смысле репрезентации рассматриваются как непосредственно связанные или неотъемлемые части артефакта» [38, p. 361].

Комментарий. В этом высказывании понятие артефакта фактически сводится к множеству компьютеризированных моделей и инструментов, носит чисто дидактический характер и не претендует на конструктивистский анализ. Что касается представлений математических понятий во внешних формах, то действительно нет смысла рассматривать в обучении артефакты, которые не несут в себе следа математических идей. То есть в понимании авторов артефактами называют материальные (в том числе, виртуальные) представления математических идей, однако, что под этим понимают авторы, остается за рамками статьи.

4. ПРОГРАММНЫЕ СРЕДЫ ПРОЕКТА ReMath

Рассмотрим программные среды, которые изучались в рамках проекта ReMath [29–39]. В рамках проекта были проанализированы шесть так называемых DDA — аббревиатура Dynamic Digital Artefacts (Динамические цифровые артефакты):

- DDA 1: Casyopee (*Gélis J-M., Lagrange J-B., Banfield G.*)
- DDA 2: Aplusix (*Nicaud J-F., Viudez C., Bouhineau D., André N.*)
- DDA 3: Alnuset (*Chiappini G., Pedemonte B., Robotti E.*)
- DDA 4: MachineLab (*Psycharis, Markopoulos, Kyrimis, Latsi, Papadopoulou, Antoniou, Alexopoulou*)
- DDA 5: Cruislet (*Tryfona, Tsironis, Markopoulos*)
- DDA 6: Mopix (*Winters N., Kahn K., Nikolic D., Morgan C.*)

Приведём описание DDA в соответствии с интерпретацией авторов работы [35] и дополнительной информацией из статей авторов вышеперечисленных DDA по этой тематике.

Aplusix — это DDA для преобразования алгебраических выражений и работе с уравнениями.

Aplusix хорошо связан с устоявшимися обычными системами, представляющими алгебраические выражения и уравнения. Его преимущество связано с внутренним представлением алгебраических объектов в виде древесной структуры так, что узлы дерева — подструктуры более сложных выражений могут отображаться в развернутом или свернутом виде. Aplusix может подключаться как к геометрическим системам, так и к системам, связанным с преобразованием алгебраических выражений. Интерфейс Aplusix выглядит как интерфейс символьного калькулятора, его использование также связано с разработанными приемами использования графических калькуляторов и других средств работы с формулами.

Проект **Casyopee** связан с параметрически заданными функциями и позволяет проводить эксперименты с использованием геометрической интерпретации функциональных зависимостей с влиянием параметров на вид или поведение моделируемых объектов.

Приведем картинку из работы [25], чтобы на примере увидеть базовые идеи проекта (рис. 3).

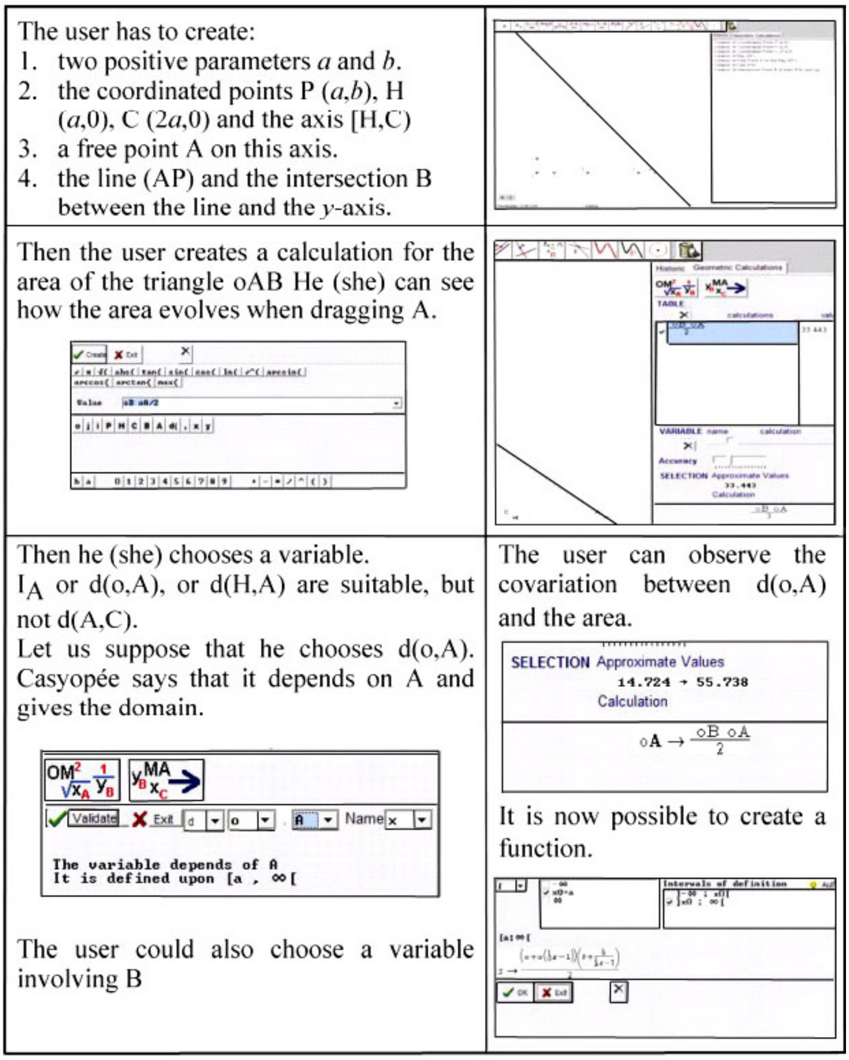

Рис. 3. Комментарии к проекту Casyopée [25, p. 579]

Чтобы прокомментировать представленный материал, воспользуемся чертежом (авторам легче было продемонстрировать те же идеи в среде «Живая математика» — The Geometer's Sketchpad) (рис. 4).

В приведенном сюжете ученикам предлагается сначала построить точку P, потом выбрать произвольную точку на оси абсцисс A и найти точку пересечения прямой AP с осью ординат. Дальше нужно посчитать площадь треугольника по формуле $S = |OA| \cdot |OB|/2$, Затем выбрать переменную — либо OA, либо HA и найти функциональную зависимость площади от этой переменной (для иллюстрации мы выбрали $x = |OA|$.

Заметим, что в этом проекте используются возможности динамической геометрии, реализованные практически во всех программных продуктах этого типа: возможность вычисления какой-то характеристики, пользуясь всеми возможными средствами (например, если есть готовая функция площади, можно использовать её, если нет, то использовать самую простую формулу, взяв в качестве данных для этой формулы, измеряемые явно величины — так сделано в приведенном примере), после чего можно ис-

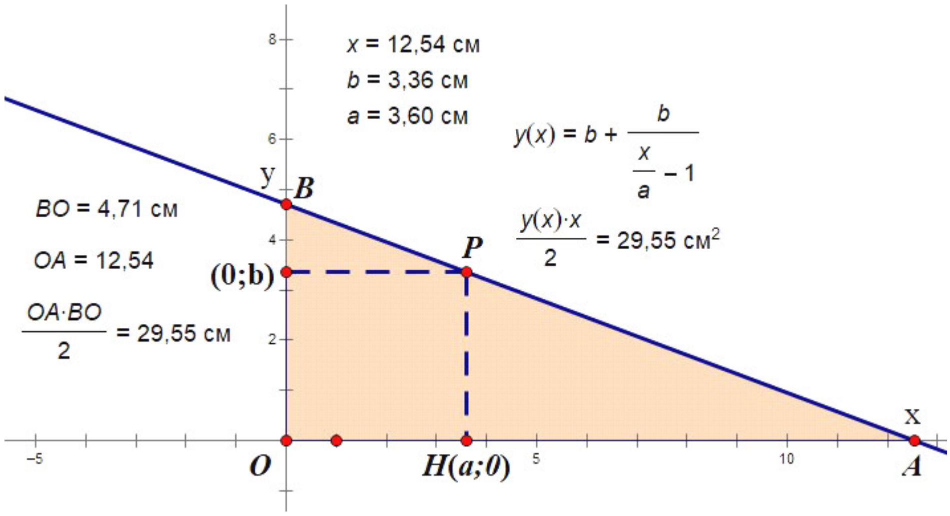

Рис. 4. Изучение функциональных зависимостей в проекте Casyopée

кать другие представления этой же характеристики через другие переменные. Программы динамической геометрии позволяют экспериментально верифицировать результаты, что дает интересные возможности для исследования с экспериментальной проверкой результата.

Alnuset (Algebra of NUmerical SETs) включает три связанных программных среды: одномерная числовая прямая, набор алгебраических манипуляций и двумерная декартова плоскость. Оригинальность проекта можно представить примером из работы [27]. Здесь показано, как по переменной x, которую можно перемещать по прямой, строятся её образы типа $5x$, $2x+3$ или $2x+3x$ (рис. 5).

Далее можно перемещать точку и следить за расположением образов в зависимости от положения аргумента x. Также можно с помощью «семафора», который горит зеленым или красным, отслеживать истинность или ложность отношений и строить множества истинности (см. рис. 6)

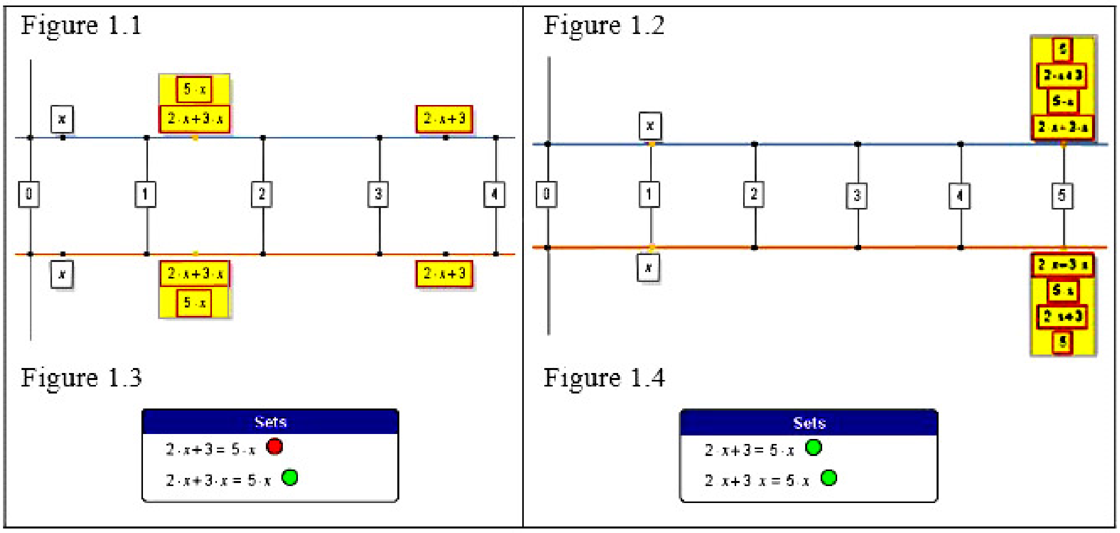

Рис. 5. Построение образов на числовой прямой в среде Alnuset [27]

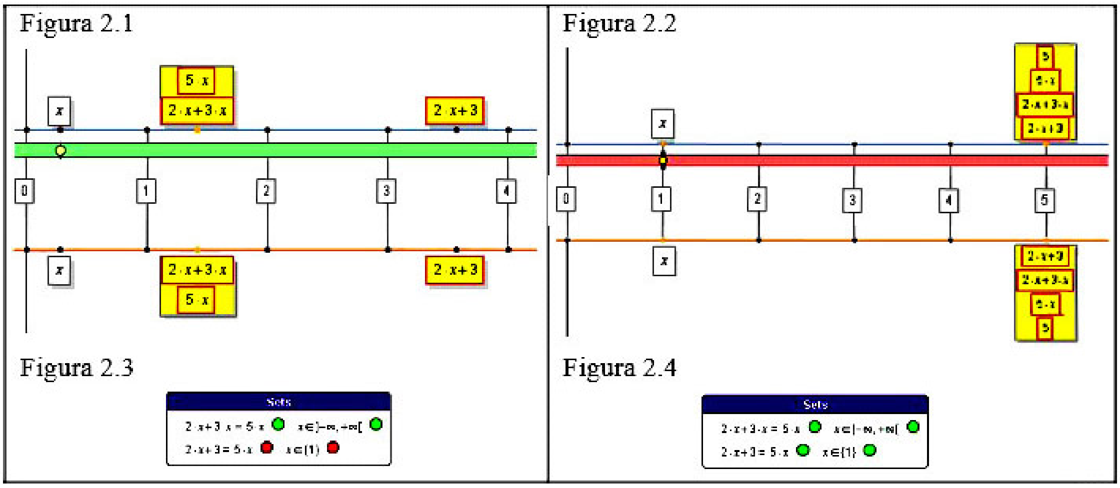

Рис. 6. Построение множеств истинности предикатов одной переменной в среде Alnuset [27]

Набор алгебраических манипуляций представляет интерес, так как позволяет читателю и пользователю понять, сколь много неформализованных действий включает работа человека с алгебраическими формулами. Так простое преобразование $(a-b)(a+b)$ к a^2-b^2 требует при формализации алгебраических операций огромного числа промежуточных действий (рис. 7). Мы вернемся к обсуждению этого факта позже, сравнивая различные формы представления математического знания.

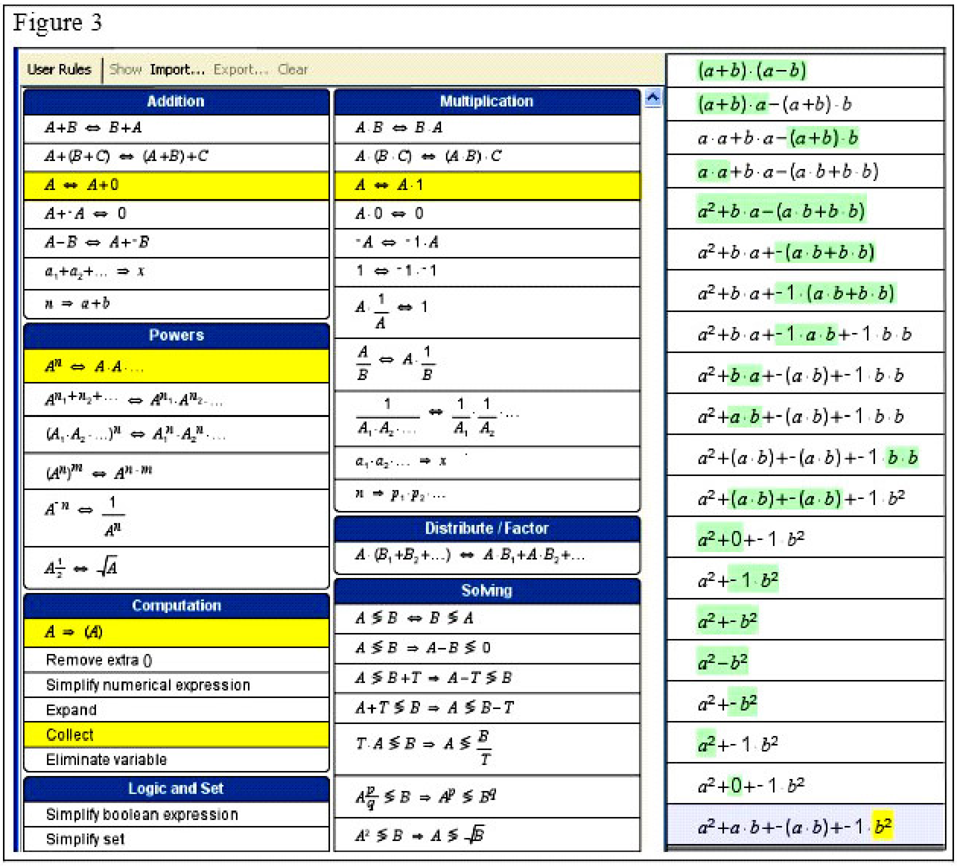

Рис. 7. Преобразование алгебраических выражений в среде Alnuset [27]

Среда **MoPiX** по существу использует представление функций дифференциальными уравнениями. Деятельность учеников заключалась сначала в изменении параметров уравнений и изучении влияния этих изменений на поведение анимированного шарика. Далее ученики сами конструировали движение из готовых блоков. Следует заметить, что аналогичные эксперименты были проведены под руководством С. П. Позднякова в 1988–1991 годах М. М. Назаровым и отражены в публикации [28].

Представляет интерес заключение авторов [29], в котором используется ряд специальных психологических терминов, поэтому вместе с переводом приводим оригинал:

«В заключение мы полагаем, что в настоящем исследовании материализация уравнения была не односторонним процессом понимания иерархически структурированных математических концепций, а динамичным процессом создания смысла, пронизанным доступной репрезентативной инфраструктурой [16] и способами, которые студенты привлекали и реконструировали, чтобы овладеть математическим смыслом» (“Concluding, we suggest that in the present study reifying an equation was not a one-way process of understanding hierarchically-structured mathematical concepts but a dynamic process of meaning–making, webbed by the available representational infrastructure [16] and the ways by which students drew upon and reconstructed it to make mathematical sense”) [29, с. 1427].

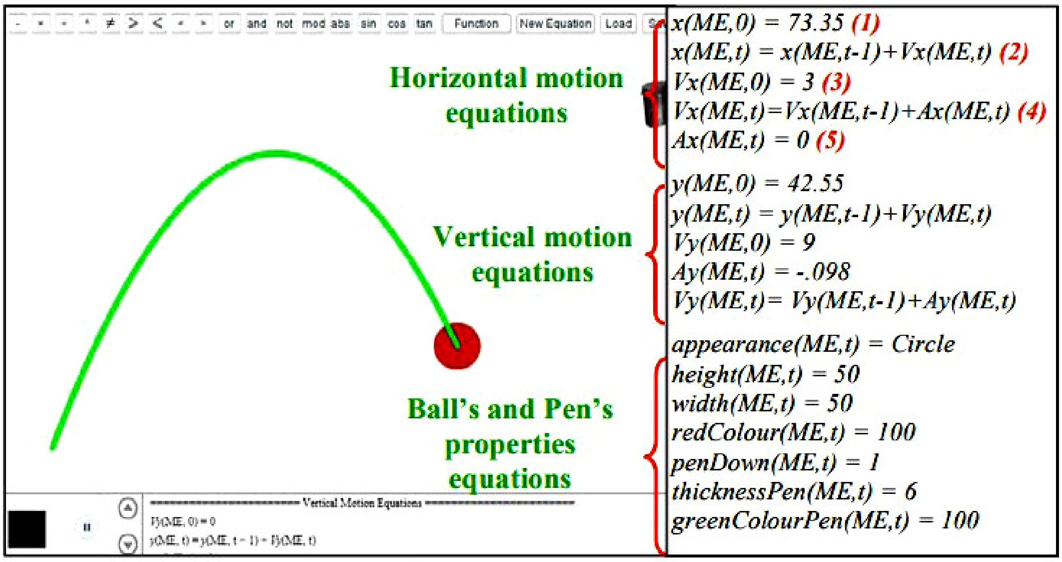

Рис. 8. Представление функций дифференциальными уравнениями в среде MoPiX [29, p. 1421]

MaLT — это трёхмерная “геометрия черепашки” (turtle geometry) в среде программирования Logo, построенная на игровом движке, для конструирования и исследования трёхмерных геометрических объектов. Объекты создаются либо добавлением существующих геометрических тел (таких, как сферы или цилиндры) в интерактивную среду, либо путём следования запрограммированным лого-инструкциям и рисования объектов построением следа. Основная характеристика этого DDA состоит в том, что он включает инструменты управления, с помощью которых конструкции становятся динамически управляемыми в стиле динамической геометрии. Однако в этом случае происходит манипуляция не фигурой, а значением параметров в процедуре, по которой рисуется фигура.

Среда **Cruislet** — это цифровая среда, основанная на технологии ГИС (географических информационных системах), которая включает язык программирования Logo (информация, полученная в режиме онлайн с веб-сайтов Cruislet и ReMath).

5. ОБСУЖДЕНИЕ

Сравнивая различные компьютерные среды и соответствующие исследования, можно сделать вывод, что развитие этой области было связано с переплетением двух линий: первая — это развитие возможностей вычислительной техники и программного обеспечения, симулирующего математические инструменты и представления из различных областей математики (формулы, чертежи, алгебраические уравнения, дифференциальные уравнения и моделирование), вторая — это попытки использовать или сконструировать программное обеспечение, которое открывало бы новые пути для продуктивного обучения и позволяло бы переходить к новым формам передачи математического знания в условиях быстрого изменения окружающей среды — процесса, который сейчас получил название цифровизации окружающей среды.

Первая линия легко принимается преподавателями и обусловлена их восхищением нарастающей мощностью вычислительной техники. «Теперь я могу быстро нарисовать красивый чертеж», «машина сама может решить уравнение» и пр. — типичные высказывания энтузиастов внедрения вычислительной техники в учебный процесс. Эта инициатива всячески поддерживалась (и поддерживается) фирмами, которые поставляют вычислительную технику в школы (кстати, в гораздо меньшей степени фирмами, разрабатывающими программное обеспечение).

Вторая линия связана с параллельно развивающимся процессом постепенного осмысления того, как использование компьютера влияет на психологические механизмы формирования понятий. В этом многие исследователи отталкиваются от работ Жана Пиаже. Наибольший вклад в развитие идей внес его последователь Симур Паперт, который предложил новый способ формирования внутренних представлений об изучаемом предмете, используя в качестве посредника управляемую простыми командами черепашку. Такую форму концептуализации знания можно было бы назвать алгоритмической или инструментальной. В то же время большинство авторов проходит мимо трактовки роли компьютера как «орудия в развитии ребенка» [4]. Многие авторы противопоставляют идею знака (слова) и орудия в формировании механизмов мышления и внутренних представлений математических понятий. Это видно из противопоставления взглядов сторонников семиотического и конструктивистского направлений в исследованиях роли компьютера в формировании математических понятий. Изучая эту проблему, авторы не сравнивают эту форму с такими формами представления математических знаний как представление физическими моделями и понятиями и операционное представление системой навыков и умений, хотя первое исторически предваряет внедрение геометрических сред, а второе — сред для символьных вычислений. Исследователи не пытаются объяснить очевидный успех использования в образовании средств динамической геометрии по сравнению с фактическим отвержением системой образования символьных калькуляторов. Причину этого мы видим в том, что в геометрических средах вместо одного посредника (орудия) в форме физической модели или уже сформированных физических представлений пришло другое — в форме Лого-черепашки или геометрических инструментов. В то же время алгебраические среды не предоставили такого посредника, а вместо этого открыли возможность ученикам пользоваться чужим (машинным) интеллектом вместо своего. Напомним, что суть операционного представления знаний состоит именно в том, что человек использует самого себя в качестве вычислительного устройства. Пренебрежение этим, пусть и репродуктивным и малоценным с точки зрения вычислительных возможностей, процессом выбивает основу операционного способа концептуализации математических понятий. Изучая влияние символьных калькуляторов на процесс обучения, нужно четко представлять, что один из традиционных путей формирования математической культуры, хорошо работающий при массовом обучении, теперь из использования выводится. Последствием этого может стать не только неумение учеников выполнять простые алгебраические или арифметические операции, но и отсутствие механизмов мышления, основанных на свертке алгоритмов (построение умений на основе навыков и построение новых знаний на системе навыков и умений).

Обсуждая роль и сущность понятия артефакта, исследователи часто противопоставляют его знаку. Такое противопоставление исключает из рассмотрения те артефакты, которые являются орудиями (по Выготсскому), то есть используются человеком для овладения собственным мышлением. Но в этом случае и Лого-черепашку Паперта нужно исключить из множества артефактов, что противоречило бы позиции этих же исследователей. Этот факт говорит о том, что понятие артефакта более сложное и в разных работах интерпретируется по-разному. В своих более ранних работах мы практически не прибегали к использованию термина “артефакт”, предпочитая работать с термином “инструмент”, выделяя среди этих инструментов те инструменты (или функции инструментов), которые играли роль орудий. Другие — более сложные инструменты — используются для манипулирования объектами симулированной предметной области и не имеют роли, аналогичной орудию или знаку. Возникает вопрос, а может ли цифровой артефакт не быть инструментом? Можно ли сказать, например, что модель физического явления не является инструментом? Но это была бы некоторая натяжка, так как сама модель — это инструмент моделирования физического мира. Другой пример — цифровые данные. Они действительно не являются инструментами, но могут быть использованы в обучении. Например, можно анализировать текст программы. Куда отнести этот объект? К цифровым артефактам? Считаем, что понятие цифрового артефакта нуждается в дальнейшем уточнении в зависимости от контекстов его использования.

6. ВЫВОДЫ

Сделанный анализ теоретических и практических работ, связанных с передачей математических знаний посредством использования цифровых артефактов, показывает, что их инструментальная функция недостаточно изучена.

Роль артефакта как орудия, посредством которого ученик может овладевать механизмами своего мышления, ярко представленная в работах Паперта, не нашла столь же глубоко понимаемого развития в работах других исследователей, хотя концепция конструктивизма стала одной из самых популярных теорий в спектре всех теорий, связанных с обучением.

На наш взгляд, скромность спектра программных средств, вошедших в практику образования (мы считаем, что к таким пока можно отнести только среды динамической геометрии) связана с попытками ускорить внедрение компьютерных сред в обучение, что вызвано скорее социально-политическими, нежели эпистемологическими соображениями.

Противопоставление семиотического и конструктивистского взглядов на роль артефактов в обучении связано с упрощенной трактовкой работ Выготского, в которых показано, что совокупное использование знака и орудия, а также знака как орудия учителем и является тем социально обусловленным процессом, который лежит в основе передачи смыслов.

Необходимо сместить акцент в подготовке учителей математики в области информационных технологий на использование программных средств как орудия для развития механизмов мышления учеников.

Также нужны работы по непредвзятому сравнению эффективности бескомпьютерных и компьютерных методик с целью более точного очерчивания тех условий, которые обеспечивают неформальную передачу математических знаний в условиях богатой математическими инструментами окружающей среды. Возможно, что для этого придется отказаться от некоторых областей, которые ранее служили полигоном для развития механизмов мышления, а теперь перестали быть социально значимыми, получив компьютерных «дублеров».

Список литературы

1. *Башмаков М. И., Поздняков С. Н., Резник Н. А.* Информационная среда обучения. СПб.: Свет, 1997. 400 с.
2. *Рубинштейн С. Л.* Основы общей психологии. СПб.: Питер, 2017. 705 с.
3. *Леонтьев А. Н.* Деятельность. Сознание. Личность. Избранные психологические произведения. Т. II. М.: Педагогика, 1983. 392 с.
4. *Выготский Л. С.* Психология развития человека. М.: Изд-во Смысл; Эксмо, 2005. 1136 с.
5. *Пуанкаре А.* О науке / Пер. с фр. 2-е изд., стер. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.
6. *Minsky M.* The Society of Mind. Simon and Schuster. 1987.
7. *Лавров С. С.* Прикладные вопросы математики и программирование // Компьютерные инчтрументы в образовании. 2000. № 5. С. 13–16.
8. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике / Пер. с англ. М.: Мир, 1977.
9. *Зельдович Я. Б., Яглом И. М.* Высшая математика для начинающих физиков и техников. М.: Наука, 1982.
10. *Rogers H. Jr.* Physics and Mathematics // Mathematics tomorrow / ed. L. A. Steen. New York, Heidelberg: Springer-Verlag, 1981. P. 231–236. doi: 10.1007/978-1-4613-8127-3_23
11. *Александров А. Д.* О геометрии в школе // Математика в школе. 1980. № 3. С. 56–62.
12. *Гальперин П. Я.* Формирование умственных действий // Хрестоматия по общей психологии. Психология мышления / Под ред. Ю. Б. Гиппенрейтер, В. В. Петухова. М.: Изд-во МГУ, 1981.
13. *Арнольд В. И.* Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук — первые шаги математического анализа и теории катастроф, от эвольвент до квазикристаллов / Серия «Современная математика для студентов» М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 96 с.
14. *Пейперт С.* Переворот в сознании. Дети, компьютеры и плодотворные идеи: Пер. с англ. М.: Педагогика, 1989.
15. *Papert S.* An Exploration in the Space of Mathematics Educations // International Journal of Computers for Mathematical Learning. 1996. Vol. 1. № 1. P. 95–123.
16. *Noss R., Hoyles C.* (1996). Windows on Mathematical Meaning: Learning Cultures and Computers. Vol. 17. Springer Science & Business Media, 1996. doi: 10.1007/978-94-009-1696-8
17. *Resnick, M.* Turtles, Termites, and Traffic Jams: Explorations in Massively Parallel Microworlds. Cambridge, MA: MIT Press, 1994.
18. *Wilensky, U.* Modeling Rugby: Kick First, Generalize later? // International Journal of Computers for Mathematical Learning. 1996. Vol. 1. № 1. P. 125–131.
19. *Wertsch, 1. V.* (Ed.). Culture, Communication and Cognition: Vygotskian Perspectives. New York, USA: Cambridge University Press, 1985.

20. *Confrey, J.* How Compatible are Radical Constructivism, Sociocultural Approaches, and Social Constructivism? / L. P. Steffe & J. Gale (Eds.), Constructivism in Education Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 1995. P. 185-225.
21. *Edwards L. D.* Embodying mathematics and science: Microworlds as representations // The Journal of Mathematical Behavior, 1998. Vol. 17. № 1. P. 53–78. doi: 10.1016/S0732-3123(99)80061-3
22. *Verillon P., Rabardel P.* Cognition and Artifacts: A Contribution to the Study of Though in Relation to Instrumented Activity // European Journal of Psychology of Education. 1995. Vol. 1. № 1. P. 77–101. doi: 10.1007/BF03172796
23. *Якиманская И. С.* Развитие пространственного мышления школьников. М.: Педагогика, 1980. 240 с.
24. *Шапиро С. И.* От алгоритмов — к суждениям (Эксперименты по обучению элементам математического мышления). М.: Советское радио, 1973. 288 с.
25. *Lagrange J.-B., Gelis J.-M.* The Casyopée project: a Computer Algebra Systems environment for students' better access to algebra // International Journal of Continuing Engineering Education and Life Long Learning. 2008. Vol. 18, № 5/6. P. 575–584. doi: 10.1504/IJCEELL.2008.022164
26. *Bannon L., Büdker S.* Constructing Common Information Spaces // Proceedings of the Fifth European Conference on Computer Supported Cooperative Work. Springer, Dordrecht. 1997. P. 81–96. doi: 10.1007/978-94-015-7372-6_6
27. *Chiappini G., Pedemonte B., Robotti E.* Using Alnuset to construct the notions of equivalence and equality in algebra / Learning to Live in the Knowledge Society. IFIP WCC TC3 2008. Vol. 281. Boston, MA: Springer, 2008. P. 345–348. doi: 10.1007/978-0-387-09729-9_50
28. *Назаров М. М., Поздняков С. Н.* Компьютерное моделирование физических явлений на уроках физики и информатики. Метод. рек. Ош. 1991. 64 с.
29. *Moustaki F., Psycharis G., Kynigos C.* Making sense of structural aspects of equations by using algebraic-like formalism // Proceedings of CERME 6, January 28th – February 1st 2009, Lyon, France, 2010. C. 1419–1428.
30. *Artigue M.* Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work // International Journal of Computers for Mathematical Learning. 2002. Vol. 7, № 3. P. 245–274. doi: 10.1023/A:1022103903080
31. *Artigue M.* Teaching Mathematics in the Digital Era: Challenges and Perspectives // Baldin En Y. (Ed.), Anais do VI HTEM. Universidade Federal de São Carlos (2013): 1–20.
32. *Artigue M., Mariotti M. A.* Networking theoretical frames: the ReMath enterprise // Educational studies in mathematics. 2014. Vol. 85. P. 329–355. doi: 10.1007/s10649-013-9522-2
33. *Calder N.* The layering of mathematical interpretations through digital media // Educational studies in mathematics. 2012. Vol. 80. P. 269–285. doi: 10.1007/s10649-011-9365-7
34. *Hoyles C.* Transforming the mathematical practices of learners and teachers through digital technology // Research in Mathematics Education. 2018. Vol. 20, № 3. P. 209–228. doi: 10.1080/14794802.2018.1484799
35. *Kynigos C., Lagrange J-B.* Cross-analysis as a tool to forge connections amongst theoretical frames in using digital technologies in mathematical learning // Educ Stud Math. 2014. Vol. 85. P. 321–327. doi: 10.1007/s10649-013-9521-3
36. *Lagrange J-B.* Chapter 5: Using Symbolic Calculators to Study Mathematics. The case of tasks and techniques / Guin D. Ruthven K. & Trouche L. (Ed.) The Didactical Challenge of Symbolic Calculators. Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument. 2014: P. 113–135. doi: 10.1007/0-387-23435-7_6
37. *Lagrange J-B., Kynigos C.* Digital technologies to teach and learn mathematics: Context and recontextualization // Educ Stud Math. 2014. Vol. 85. P. 381–403. doi: 10.1007/s10649-013-9525-z
38. *Morgan C., Kynigos C.* Digital artefacts as representations: forging connections between a constructionist and a social semiotic perspective // Educ Stud Math. 2014. Vol. 85. P. 357–379. doi: 10.1007/s10649-013-9523-1
39. *Nicaud J-F., Viudez C.* First Version of the Dynamic Digital Artrefacts. 2006. hal-00190488. URL: https://telearn.archives-ouvertes.fr/hal-00190488 (дата обращения: 06.02.2020).

Поступила в редакцию 10.12.2019, окончательный вариант — 06.02.2020.

Адлай Семён Франкович, научный сотрудник, Сектор теории устойчивости и механики управляемых систем, Отделение моделирования сложных физических и технических систем, Вычислительный центр им А. А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, ✉ semjonadlaj@gmail.com

Поздняков Сергей Николаевич, доктор педагогических наук, заведующий кафедрой алгоритмической математики СПбГЭТУ «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина), ✉ pozdnkov@gmail.com

Computer tools in education, 2020
№ 1: 58–86
http://cte.eltech.ru
doi:10.32603/2071-2340-2020-1-58-86

Digital Representations of Mathematical Objects in the Context of Various Forms of Representation of Mathematical Knowledge

Adlaj S. F.[1], scientific researcher, ✉ semjonadlaj@gmail.com, orcid.org/0000-0003-4219-7836
Pozdnyakov S. N.[2], PhD, ✉ pozdnkov@gmail.com

[1]Federal Research Center "Informatics and Control" of the Russian Academy of Sciences, 40, Vavilov st., 119333, Moscow, Russia
[2]Saint Petersburg Electrotechnical University, 5, building 3, st. Professora Popova, 197376, Saint Petersburg, Russia

Abstract

This article is devoted to a comparative analysis of the results of the ReMath project (Representing Mathematics with digital media), devoted to the study of digital representations of mathematical concepts. The theoretical provisions and conclusions of this project will be analyzed based on the theory of the information environment [1], developed with the participation of one of the authors of this article. The analysis performed in this work partially coincides with the conclusions of the ReMath project, but uses a different research basis, based mainly on the work of Russian scientists. It is of interest to analyze the work of the ReMath project from the conceptual positions set forth in this monograph and to establish links between concepts and differences in understanding the impact of computer tools (artifacts) on the process of teaching mathematics. At the same time, the authors dispute the interpretation of some issues in Vygotsky's works by foreign researchers and give their views on the types and functions of digital artifacts in teaching mathematics.

Keywords: *information learning environment, artifacts, computer tools, knowledge representation, meanings, understanding, ReMath project.*

Citation: S. F. Adlaj and S. N. Pozdnyakov, "Digital Representations of Mathematical Objects in the Context of Various Forms of Representation of Mathematical Knowledge," *Computer tools in education*, no. 1, pp. 58–86, 2020 (in Russian); doi:10.32603/2071-2340-2020-1-58-86

References

1. M. I. Bashmakov, S. N. Pozdnyakov, and N. A. Reznik, *Informatsionnaya sreda obucheniya* [Learning Information Environment], Saint Petersburg, Russia: Svet, 1997 (in Russian).
2. S. L. Rubinshtein, *Osnovy obshchei psikhologii* [Fundamentals of General Psychology], Saint Petersburg, Russia: Piter, 2017 (in Russian).
3. A. N. Leont'ev, *Deyatel'nost' Soznanie. Lichnost'* [Activity, Consciousness, and Personality], vol. 2, Moscow: Pedagogika, 1983 (in Russian).
4. L. S. Vygotskii, *Psikhologiya razvitiya cheloveka* [Human Development Psychology], Moscow: Smysl, Eksmo, 2005 (in Russian).
5. A. Poincaré, *O nauke* [The Foundations of Science], Moscow: Gl. red. fiz.-mat. lit., 1990 (in Russian).
6. M. Minsky, "Emotions and the Society of Mind," M. Clynes, J. Panksepp, eds., *Emotions and Psychopathology*, Springer, pp. 171–179, 1988; doi: 10.1007/978-1-4757-1987-1_7
7. C. C. Lavrov, "Prikladnye voprosy matematiki i programmirovanie" [Applied Mathematics and Programming Issues], Computer tools in education, no. 5, pp. 13–16, 2000 (in Russian).
8. R. Feinman, R. Leiton, and M. Sends, *Feinmanovskie lektsii po fizike* [The Feynman Lectures on Physics], Moscow: Mir, 1977 (in Russian).
9. Ya. B. Zel'dovich and I. M. Yaglom *Vysshaya matematika dlya nachinayushchikh fizikov i tekhnikov* [Higher mathematics for beginning physicists and technicians], Moscow: Nauka, 1982 (in Russian).
10. H. Rogers Jr., "Physics and Mathematics", in *Mathematics tomorrow*, L. A. Steen ed., New York, Heidelberg: Springer-Verlag, pp. 231–236, 1981; doi: 10.1007/978-1-4613-8127-3_23
11. A. D. Aleksandrov, "O geometrii v shkole" [About geometry at school], *Matematika v shkole*, no. 3, pp. 56–62, 1980 (in Russian).
12. P. Ya. Gal'perin, "Formirovanie umstvennykh deistvii" [The formation of mental action], in *Khrestomatiya po obshchei psikhologii. Psikhologiya myshleniya*, Yu. B. Gippenreiter and V. V. Petukhova, eds., Moscow: Izd-vo MGU, 1981 (in Russian).
13. V. I. Arnol'd, *Gyuigens i Barrou, N'yuton i Guk — pervye shagi matematicheskogo analiza i teorii katastrof, ot evol'vent do kvazikristallov* [Huygens and Barrow, Newton and Hook are the first steps in mathematical analysis and catastrophe theory, from involutes to quasicrystals], Moscow: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1989 (in Russian).
14. S. Peipert, *Perevorot v soznanii. Deti, komp'yutery i plodotvornye idei* [Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas], Moscow: Pedagogika, 1989 (in Russian).
15. S. Papert, "An Exploration in the Space of Mathematics Educations," *Int J Comput Math Learning*, vol. 1, no. 1, p. 95–123, 1996; doi: 10.1007/BF00191473
16. R. Noss and C. Hoyles, *Windows on mathematical meanings: Learning cultures and computers*, vol. 17, Springer Science & Business Media, 1996; doi: 10.1007/978-94-009-1696-8
17. M. Resnick, *Turtles, Termites, and Traffic Jams: Explorations in Massively Parallel Microworlds*, Cambridge, MA, USA: MIT Press, 1997.
18. U. Wilensky, "Modeling Rugby: Kick First, Generalize later?" *Int J Comput Math Learning*, vol. 1, pp. 125–131, 1996.
19. J. V. Wertsch, ed., *Culture, Communication and Cognition: Vygotskian Perspectives*, New York, USA: Cambridge University Press, 1985.
20. J. Confrey, "How Compatible are Radical Constructivism, Sociocultural Approaches, and Social Constructivism?" L. P. Steffe and J. Gale, eds., *Constructivism in Education*, pp. 185–225, 1995.
21. L. D. Edwards, "Embodying mathematics and science: Microworlds as representations," The Journal of Mathematical Behavior, vol. 17, no. 1, pp. 53–78, 1998; doi: 10.1016/S0732-3123(99)80061-3
22. P. Verillon and P. Rabardel, "Cognition and Artifacts: A Contribution to the Study of Though in Relation to Instrumented Activity," *Eur J Psychol Educ* , vol. 10, no. 1, art. 77, 1995; doi: 10.1007/BF03172796
23. I. S. Yakimanskaya, *Razvitie prostranstvennogo myshleniya shkol'nikov* [The development of spatial thinking of schoolchildren], Moscow: Pedagogika, 1980 (in Russian).
24. S. I. Shapiro, *Ot algoritmov — k suzhdeniyam (Eksperimenty po obucheniyu elementam matematicheskogo myshleniya)* [From Algorithms to Judgments (Experiments on teaching elements of mathematical thinking], Moscow: Sovetskoe radio, 1973 (in Russian).

25. J.-B. Lagrange and J.-M. Gelis, “The Casyopée project: a Computer Algebra Systems environment for students’ better access to algebra,” *International Journal of Continuing Engineering Education and Life Long Learning*, vol. 18, no. 5/6, pp. 575–584, 2008; doi: 10.1504/IJCEELL.2008.022164
26. L. Bannon and S. Büdker, “Constructing Common Information Spaces,” in *Proc. of the Fifth European Conference on Computer Supported Cooperative Work*, Springer, Dordrecht, pp. 81–96, 1997; doi: 10.1007/978-94-015-7372-6_6
27. G. Chiappini, B. Pedemonte, and E. Robotti, “Using Alnuset to construct the notions of equivalence and equality in algebra,” in *Learning to Live in the Knowledge Society. IFIP WCC TC3 2008*, vol. 281, Springer, Boston, MA, pp. 345–348, 2008; doi: 10.1007/978-0-387-09729-9_50
28. M. M. Nazarov and S. N. Pozdnyakov, *Komp’yuternoe modelirovanie fizicheskikh yavlenii na urokakh fiziki i informatiki. Metodicheskie rekomendatsii v pomoshch’ uchitelyam fiziki, matematiki i informatiki* [Computer modeling of physical phenomena in the lessons of physics and computer science. Guidelines to help teachers of physics, mathematics and computer science], Osh, Kyrgyzstan: Iz-vo OIUU, 1991 (in Russian).
29. F. Moustaki, G. Psycharis, and C. Kynigos, “Making sense of structural aspects of equations by using algebraic-like formalism,” in *Proc. of CERME 6, January 28th-February 1st 2009, Lyon France*, 2010, pp. 1419–1428.
30. M. Artigue, “Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work,” *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, vol. 7, no. 3, pp. 245–274, 2002; doi: 10.1023/A:1022103903080
31. M. Artigue, “Teaching Mathematics in the Digital Era: Challenges and Perspectives,” in *Proc. of 6th HTEM*, Federal University de Sao Carlos, Brasil, 2013, pp. 1–20.
32. M. Artigue and M. A. Mariotti, “Networking theoretical frames: the ReMath enterprise,” *Educ Stud Math*, vol. 85, no. 3, pp. 329–355, 2014; doi: 10.1007/s10649-013-9522-2
33. N. Calder, “The layering of mathematical interpretations through digital media,” *Educ Stud Math*, vol. 80, pp. 269–285, 2012; doi: 10.1007/s10649-011-9365-7
34. C. Hoyles, “Transforming the mathematical practices of learners and teachers through digital technology,” *Research in Mathematics Education* vol. 20, no. 3, pp. 209–228, 2018; doi: 10.1080/14794802.2018.1484799
35. C. Kynigos and J-B. Lagrange, “Cross-analysis as a tool to forge connections amongst theoretical frames in using digital technologies in mathematical learning,” *Educ Stud Math*, vol. 85, pp. 321–327, 2014; doi: 10.1007/s10649-013-9521-3
36. J-B. Lagrange, “Using Symbolic Calculators to Study Mathematics,” in *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators. Mathematics Education Library*, D. Guin, K. Ruthven, L. Trouche, eds., vol. 36, Springer, Boston, MA, 2005, pp. 113–135; doi: 10.1007/0-387-23435-7_6
37. J-B. Lagrange and C. Kynigos, “Digital technologies to teach and learn mathematics: Context and recontextualization,” *Educ Stud Math*, vol. 85, pp. 381–403, 2014; doi: 10.1007/s10649-013-9525-z
38. C. Morgan and C. Kynigos, “Digital artefacts as representations: forging connections between a constructionist and a social semiotic perspective,” *Educ Stud Math*, vol. 85, pp. 357–379, 2014; doi: 10.1007/s10649-013-9523-1
39. J-F. Nicaud and C. Viudez, *First Version of the Dynamic Digital Artrefacts*, hal-00190488. [Online]. Available at https://telearn.archives-ouvertes.fr/hal-00190488

Received 10.12.2019, the final version — 06.02.2020.

Semjon F. Adlaj, scientific researcher, section of Stability Theory and Mechanics of Controlled Systems, Division of Complex Physical and Technical Systems Modeling, Federal Research Center “Informatics and Control”, Russian Academy of Sciences, ✉ semjonadlaj@gmail.com

Sergei N. Pozdnyakov, PhD, Head of Algorithmic Mathematics Department, Saint Petersburg Electrotechnical University, ✉ pozdnkov@gmail.com