Компьютерные инструменты в образовании, 2020
№ 1: 19–27
УДК: 378:51-77:004.942
http://cte.eltech.ru
doi:10.32603/2071-2340-2020-1-19-27

УЧЕБНАЯ МОДЕЛЬ РАЗВИТИЯ ЭПИДЕМИИ

Ляпцев А. В.[1], доктор физико-математических наук, ✉ upm_eno@mail.ru

[1]Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена, набережная реки Мойки, д. 48, 191186, Санкт-Петербург, Россия

Аннотация

Предлагается учебная модель, описывающая развитие эпидемии в некотором ограниченном сообществе особей. Основная «жесткая» модель содержит лишь один параметр, что позволяет применять её в учебном процессе в качестве задачи по математическому моделированию. Обсуждаются качественные выводы, следующие из численных расчетов по этой модели. Обсуждается также «смягчение» модели, что позволяет качественно проанализировать некоторые аспекты применительно к эпидемии, развивающейся в человеческом обществе.

Ключевые слова: *компьютерное моделирование, математическая модель, жесткая модель, мягкая модель, эпидемия.*

Цитирование: Ляпцев А. В. Учебная модель развития эпидемии // Компьютерные инструменты в образовании. 2020. № 1. С. 19-27. doi: 10.32603/2071-2340-2020-1-19-27

1. ВВЕДЕНИЕ

Во время написания этой статьи тема развития эпидемии была очень актуальной. Практически неожиданно вследствие пандемии коронавируса занятия со студентами были переведены в дистанционный режим. Именно в это время студентам, обучающимся по дисциплине «математическое моделирование и вычислительный эксперимент» в РГПУ им. А. И. Герцена было предложено разобраться в модели, описывающей развитие эпидемии, и попробовать провести исследование путем проведения вычислений с различным набором исходных параметров. Поскольку графики, представляющие развитие пандемии коронавируса в различных странах, регулярно появлялись в средствах массовой информации и весь мир следил с надеждой за их поведением, задача, как нам представлялось, должна быть интересной для студентов.

Хотим подчеркнуть, что предлагаемая ниже модель является учебной и не претендует на реальное отражение ситуации с пандемией. В настоящее время в связи с развитием пандемии имеется достаточно много исследовательских групп, занимающихся моделированием, анализом и предсказанием развития пандемии (см. например [1]). Цель данной работы — представить учебную модель, на основе которой можно научить основным навыкам математического моделирования. Учебные модели должны быть достаточно просты, чтобы в них можно было разобраться за короткое время и написать программу по их исследованию. Такая модель должна, по возможности, содержать небольшое число параметров, смысл которых был бы достаточно прозрачен. То, что излагается ниже, относится в основном к случаю, когда предпринимаемые «разумные» действия в процессе развития эпидемии исключаются, что делает её пригодной для описания развития в некоторой ограниченной области, заполненной некоторыми животными. Возможность влияния «разумных» действий обсуждается лишь кратко, а используемые численные значения не обязательно соответствуют каким-либо реальным значениям.

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

За основу модели взята известная модель Лотка–Вольтера, которая активно используется в учебном процессе (см. например [2]). Предполагается, что есть некоторая замкнутая область, населенная некоторыми особями, в которой по некоторым причинам появляется вирус. Зараженные вирусом особи при встрече со здоровыми собратьями заражают их, так что вирус начинает размножаться. Обозначим через N число особей в области, $N_1(t)$ — число не заболевших особей, $N_2(t)$ — число больных в данный момент особей. Предположим, что часть больных особей со временем выздоравливает, причем получает после выздоровления иммунитет, то есть уже не может заразиться. Обозначим число здоровых особей с иммунитетом через $N_3(t)$. Число умерших к моменту времени t особей легко найти как разность $N - N_1(t) - N_2(t) - N_3(t)$.

Развитие эпидемии описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 &= -pN_1N_2, \\ \dot{N}_2 &= pN_1N_2 - \gamma N_2, \\ \dot{N}_3 &= a\gamma N_2. \end{aligned} \tag{1}$$

В этих уравнениях в левых частях стоят производные от переменных по времени, квадратичные по переменным слагаемые описывают убыль незараженных особей и прибыль больных, параметр p характеризует вероятность заражения при встрече здоровой и больной особи, параметр γ характеризует время болезни и обратно пропорционален среднему времени течения болезни. В результате болезни относительная часть особей выздоравливает, что характеризуется параметром a в последнем уравнении.

Систему уравнений (1) можно упростить, введя относительные значения, характеризующие систему:

$$x = \frac{N_1}{N}, \quad y = \frac{N_2}{N}, \quad z = \frac{N_3}{N},$$

а также сделав масштабное преобразование времени: $t' = \gamma t$. Единица времени новой временной переменной соответствует средней продолжительности болезни. Поскольку для «обычных» вирусов время протекания болезни около недели, можно считать, что далее время измеряется в неделях. В результате преобразований получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -kxy, \\ \dot{y} &= (kx - 1)y, \\ \dot{z} &= ay. \end{aligned} \tag{2}$$

где производные берутся по новой временной переменной, $k = \frac{Np}{\gamma}$. В этой системе уравнений взаимосвязанными являются два первых уравнения, решение которых определяется одним параметром k. Заметим, что этот параметр зависит не только от «активности» особей, характеризуемой параметром p, но и от числа особей в рассматриваемой области. Последнее уравнение показывает, что число выздоровевших особей есть интеграл от переменной y, умноженный на соответствующий коэффициент.

Систему уравнений (2) нужно решить при начальных условиях: $x(0) = 1 - y_0$, $y(0) = y_0, z(0) = 0$, где $y_0 \ll 1$ — малая величина начальных зараженных особей, «прибывших из-за границы».

Прежде чем решать систему уравнений, заметим, что нас интересует решение при $k > 1$. В противном случае, поскольку сомножитель $kx - 1$ отрицателен, число зараженных особей будет только убывать, и эпидемия не разовьется. Решать систему дифференциальных уравнений удобно, используя процедуры, имеющиеся, например, в средах MatLab, или Octave. На рис. 1–4, приведены характеризующие развитие эпидемии графики, рассчитанные при различных значениях параметра k. Поскольку в случае $k = 1,1$ число больных особей оказывается малым, графики здоровых и больных особей приведены в разных масштабах.

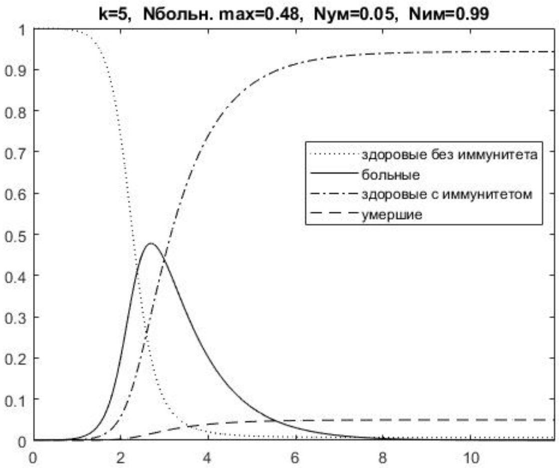

Рис. 1. Расчет основных характеристик модели при параметре $k = 5$

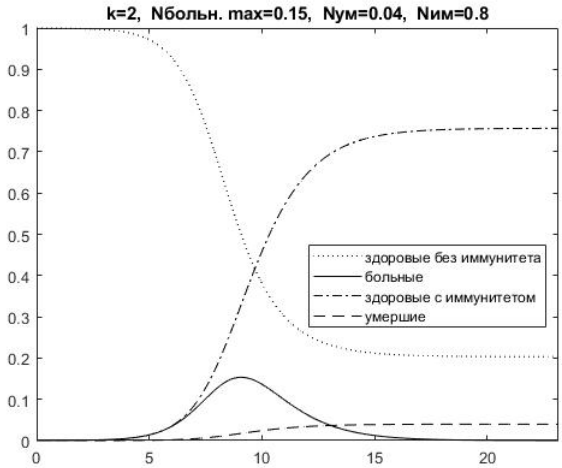

Рис. 2. Расчет основных характеристик модели при параметре $k = 2$

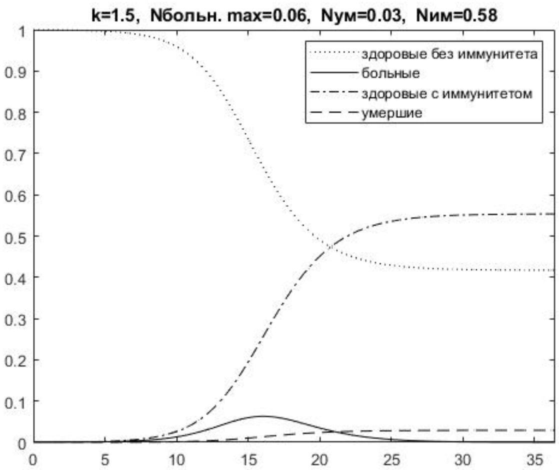

Рис. 3. Расчет основных характеристик модели при параметре $k = 1,5$

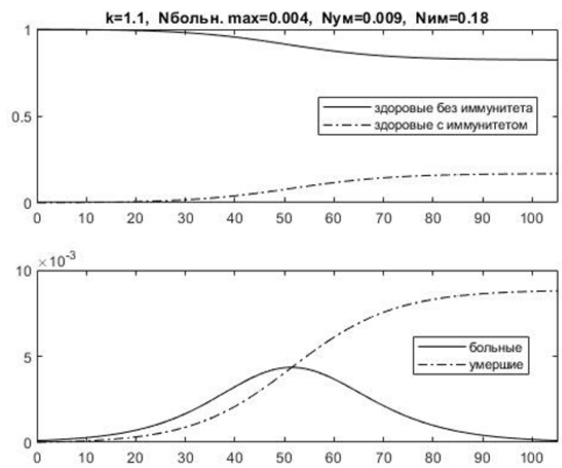

Рис. 4. Расчет основных характеристик модели при параметре $k = 1,1$

Все остальные параметры одинаковы для всех графиков: $a = 0{,}95$ (выживает 95 %), $y_0 = 0{,}0001$. Вычисления прекращались, когда значения y также уменьшались до этого же значения y_0. Над графиками приведены значения выздоровевших особей с иммунитетом и умерших особей в этот конечный момент времени, а также максимальное число больных особей на протяжении эпидемии.

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Как видно из графиков, во всех случаях число больных вначале возрастает и после достижения определенного максимума убывает. Остальные переменные монотонно возрастают или убывают. Значения больных в максимуме возрастает с ростом параметра k, так что меньшие значения параметра выгоднее для сообщества.

Для лучшего понимания происходящих процессов полезно провести некоторый качественный анализ, а также рассмотреть результаты для предельных случаев, поскольку именно сочетание аналитических и вычислительных методов позволяет лучше изучить картину происходящего [3]. Как следует из первого уравнения (2), величина x со временем всегда уменьшается, поскольку значения переменных по смыслу являются положительными. Величина y в начальные моменты времени увеличивается, но, если значение x падает ниже $x_0 = k^{-1}$, то y начинает убывать. Обязательно ли будет достигнут рубеж x_0? Если предположить, что всегда $x \geqslant x_0$, то, поскольку x всегда убывает, при больших временах x должно стремиться к некоторой константе $x_f < x_0$. Но это возможно только, если производная от x стремится к нулю. Однако при возрастающем значении y и $x \geqslant x_0$ правая часть первого из уравнений (2) не стремится к нулю. Таким образом, общий ход картины развития эпидемии ясен: число не заразившихся x монотонно убывает, а число больных y вначале возрастает и затем после достижения максимума убывает.

При $x \leqslant x_0$ система уравнений (2) является диссипативной, поскольку дивергенция от правой части является отрицательной:

$$\frac{\partial(-kxy)}{\partial x} + \frac{\partial\big((kx-1)y\big)}{\partial y} = -ky + kx - 1 < -ky + kx_0 - 1 < -ky < 0.$$

Как следует из теории (см. например [3]), фазовая траектория в этом случае при больших временах стремится к некоторому аттрактору — множеству точек в фазовом пространстве. В случае двумерного фазового пространства (x, y) аттрактором может быть либо предельная точка, либо замкнутая кривая. Поскольку при $x \leqslant x_0$ обе величины x и y монотонно убывают, аттрактор в данном случае есть предельная точка. При стремлении к этой точке в фазовом пространстве обе производные (первые два уравнения системы (2)) стремятся к нулю. Но это возможно только в случае, когда предельным значением y является ноль. Что касается предельного значения x, то оно может быть получено только в результате численного расчета.

В моменты времени, близкие к нулю, значение x близко к 1, так что второе уравнение системы (2) принимает вид:

$$\dot{y} = (k-1)y.$$

Аналитическое решение этого уравнения имеет вид:

$$y(t) = y_0 \exp\big((k-1)t\big).$$

Подобное экспоненциальное развитие на начальном этапе эпидемии стало общеизвестным благодаря средствам массовой информации. Подставляя теперь эту функцию в первое из уравнений (2), получим дифференциальное уравнение для $x(t)$ при малых значениях времени, решение которого также может быть получено аналитически:

$$x(t) = \exp\left(\frac{ky_0}{k-1}\big(1-\exp((k-1)t)\big)\right).$$

Несложно показать, что при больших временах, когда $x \to x_f$, величина y будет стремиться к нулю по экспоненте $\exp\big((kx_f - 1)t\big)$.

Как видно из графиков, время длительности эпидемии возрастает с убыванием значения k. Из графиков также видно, что суждения «эпидемия кончится, когда все мы переболеем» не верны. Число особей не переболевших может быть значительным и даже превышать число переболевших.

Увеличение длительности эпидемии становится отрицательным фактором для случая человеческой эпидемии, поскольку оказывает отрицательное влияние на экономику. Таким образом, преодоление эпидемии с уменьшением значения k не всегда является оптимальным. Чтобы понять значимость зависимости основных результатов от значения k на рис. 5 представлены соответствующие графики.

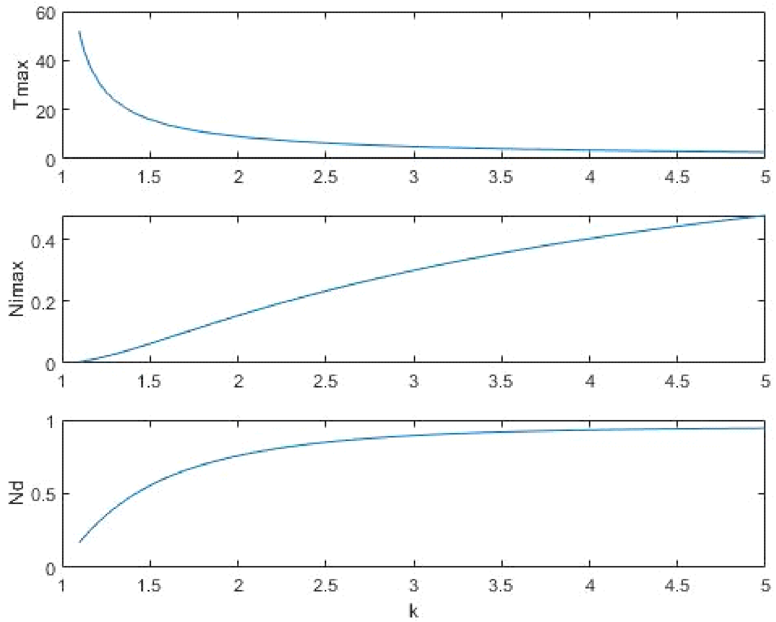

Рис. 5. Зависимость основных характеристик модели от основного параметра k

На верхнем графике приведены значения времени, когда число заболевших достигает максимума, на среднем — значение заболевших в этот момент времени и на нижнем — число умерших особей. Очевидно, что уменьшение k при значениях, меньших 1,5, «может принести больше вреда, чем пользы».

4. «СМЯГЧЕНИЕ МОДЕЛИ»

По терминологии Арнольда [5] (см. также [2]), приведенная выше модель является жесткой моделью. Преобразование жесткой модели к мягкой осуществляется заменой параметров задачи некоторыми функциями, зависящими от переменных модели. В данной задаче — это введение функций вместо параметров k и a. Эти функции могут возникать в случае, если попытаться перенести модель на описание развития эпидемии в человеческом обществе.

Параметр a описывает относительное число выживших особей. В отличие от животных люди научились лечить болезни, так что для человеческого общества параметр a больше, чем для сообщества животных. Однако достаточно очевидно, что лечить можно относительно небольшое число людей. Положить в больницы 50 % населения (рис. 1) не удастся. Это означает, что вместо коэффициента a следует взять функцию, которая уменьшается с увеличением числа больных людей. Например, в качестве такой функции можно взять функцию:

$$a(y) = 0,9 - \frac{0,1}{3}\,\mathrm{arctg}\big(500(y - 0,025)\big), \tag{3}$$

которая стремится к 0,95 при значениях y, близких к нулю, и к 0,85 при $y = 0,05$. Это означает, что при малом числе заболевших выздоравливает 95 %, а когда число заболевших достигает 5 % выздоравливает лишь 85 %. На рис. 6 приведены графики, иллюстрирующие результат такого смягчения модели.

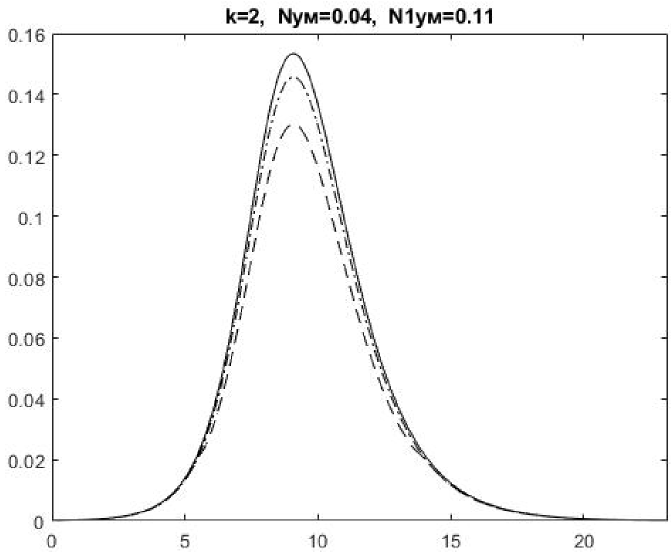

Рис. 6. Графики, иллюстрирующие «смягчение» модели. Сплошная кривая — график $y(t)$; штрихпунктирная линия — график $0,95y(t)$; штриховая линия — график $a(y)y(t)$, где $a(y)$ определяется выражением (3)

Сплошная кривая соответствует графику $y(t)$. Штрихпунктирная линия — графику $0,95y(t)$. Если в модели $a = 0,95$, то число умерших есть площадь между сплошной и штрихпунктирной линией. В данном случае это число равно 0,04. Штриховая линия соответствует графику $a(y)y(t)$, где $a(y)$ определяется выражением (3). Число умерших в этом случае определяется площадью между сплошной линией и штриховой линией. Очевидно, что число умерших в этом случае возрастает в несколько раз до 0,11.

Другая возможность смягчения модели — замена параметра k некоторой функцией. Это, в частности, происходит, когда течением эпидемии целенаправленно управляют.

Предпринятая большинством стран при эпидемии коронавируса самоизоляция есть способ уменьшить значение k. При принятии подобных решений ориентируются на значение числа заболевших людей. То есть при превышении значения y выше некоторой величины принимаются меры, ограничивающие общение людей. Очевидно, что это наносит удар по экономике, так что «при улучшении ситуации» принятые меры необходимо отменить. Но что означает «улучшение ситуации»? Достаточно ли считать, что ситуация улучшилась, если число больных стало малым?

Чтобы разобраться, смоделируем ситуацию, когда при начальном значении $k = 2$ при достижении значения $y = 0,05$ предпринимаются жесткие меры, так что k резко падает до нуля. В соответствии с уравнениями (2) число больных начнет экспоненциально уменьшаться, а число не заболевших будет оставаться неизменным. Очевидно, что если при каком-то малом значении у мы вернемся к исходному значению k, то сомножитель $(kx - 1)$ во втором уравнении (2) окажется положительным, и эпидемия вновь начнет развиваться. Расчет такого развития приведен на рис. 7. При расчете предполагалось, что строгие меры, снижающие значение k до нуля, вводятся при $y = 0,05$ и полностью отменяются при падении y до значения 0,01.

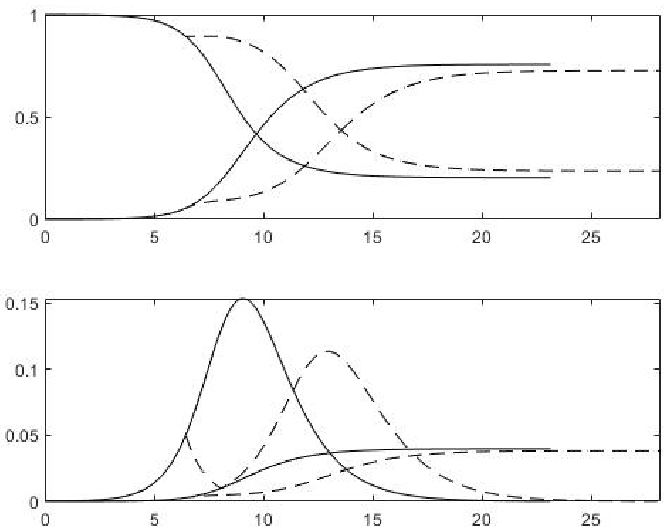

Рис. 7. Расчет основных характеристик модели при «неправильной попытке управления» течением эпидемии

На графиках кривые, изображенные сплошными линиями, соответствуют течению болезни без управления, а штриховые линии — вышеописанному управлению. На верхних графиках изображены зависимости не переболевших (падающие кривые) и выздоровевших после болезни (возрастающие зависимости). На нижних графиках — монотонно возрастающие зависимости соответствуют числу умерших людей, а кривые с максимумами — числу больных людей. Окончание расчета во всех случаях соответствует значению $y = 0,0001$.

Очевидно, что подобное управление течением эпидемии не дает положительного результата. Время протекания эпидемии, а следовательно, и «удар по экономике» увеличились, а окончательное число умерших практически не снизилось. Расчеты показывают в данном случае снижение числа смертей со значения 0,040 до 0,038. Несложный анализ показывает, что отменять ограничения, влияющие на активность, следует не тогда, когда число больных становится малым, а когда число не болевших падает ниже некоторого значения. То есть функция k должна зависеть как от величины y, так и от величины x. Заметим, что именно это достигается при вакцинации, то есть при искусственном создании эпидемии, которая протекает в легкой форме.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение ещё раз подчеркнем, что предлагаемая модель является учебной. Даже в сообществе животных реальная область обитания разбивается на отдельные подобласти со слабым взаимодействием особей между ними. Ситуация в человеческом обществе ещё более сложная, обусловленная многими факторами, возникающими вследствие разумного влияния на эпидемию. Тем не менее, анализ простейших моделей часто дает качественные результаты, не изменяющиеся при переходе к более мягким моделям [5]. Предлагаемая модель в силу своей простоты, а также демонстрации особенностей, связанных с математическим моделированием (жесткие и мягкие модели, сочетание вычислительных и аналитических методов в моделировании) является, на наш взгляд, удобной для использования в учебном процессе.

Список литературы

1. *Dolgopolovas V.* Coronavirus Disease (COVID-19) Identification Time Analysis Using Queueing Model (Preprint) // Preprint March 2020 with 279 Reads. doi: 10.2196/preprints.18635
2. *Бордовский Г. А., Кондратьев А. С., Чоудери А.* Физические основы математического моделирования: учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры. 2-е издание, исправленное и дополненное. М.: Юрайт, 2019. 319 с.
3. *Кондратьев А. С., Ляпцев А. В.* Математическое моделирование: аналитические и вычислительные методы // Компьютерные инструменты в образовании. 2007. № 5. С. 20–24.
4. *Гринченко В. Т., Мацыпура В. Т., Снарский А. А.* Введение в нелинейную динамику. М.: Издательство ЛКИ, 2007.
5. *Арнольд В. И.* Жесткие и мягкие математические модели. М.: МЦНМО, 2000.

Поступила в редакцию 20.01.2020, окончательный вариант — 20.02.2020.

Ляпцев Александр Викторович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры методики обучения физике РГПУ им. А. И. Герцена, ✉ upm_eno@mail.ru

Computer tools in education, 2020
№ 1: 19–27
http://cte.eltech.ru
doi:10.32603/2071-2340-2020-1-19-27

A Training Model of Epidemic Development

Liapzev A. V.[1], PhD, professor, ✉ upm_eno@mail.ru

[1]Herzen State Pedagogical University of Russia,
Moika river embankment, 48, 191186, Saint Petersburg, Russia

Abstract

A training model describing the development of the epidemic in a limited community of individuals is proposed. The main "rigid" model contains only one parameter, which allows it to be used in the educational process as an exercise in mathematical modeling. Qualitative conclusions resulting from numerical calculations based on this model are discussed. We also discuss the "softening" of the model, which allows us to qualitatively analyze some aspects in relation to the epidemic developing in human society.

Keywords: *computer modeling, mathematical model, rigid model, soft model, epidemic.*

Citation: A. V. Liapzev, "Educational Model of Epidemic Development," *Computer tools in education*, no. 1, pp. 44–51, 2020 (in Russian); doi:10.32603/2071-2340- 2020-1-44-51

References

1. V. Dolgopolovas, "Coronavirus Disease (COVID-19) Identification Time Analysis Using Queueing Model (Preprint),"Mar.-2020. [Online]; doi: 10.2196/preprints.18635
2. G. A. Bordovskii, *Fizicheskie osnovy matematicheskogo modelirovaniya: uchebnik i praktikum dlya bakalavriata i magistratury* [Physical foundations of mathematical modeling: a textbook and workshop for undergraduate and graduate programs], Moscow: Yurait, 2019 (in Russian).
3. A. S. Kondrat'ev and A. V. Lyaptsev, "Matematicheskoe modelirovanie: analiticheskie i vychislitel'nye metody" [Mathematical modeling: analytical and computational methods], *Computer Tools in Education*, no. 5, pp. 20–24, 2007 (in Russian).
4. V. T. Grinchenko, V. T. Matsypura, and A. A. Snarskii, *Vvedenie v nelineinuyu dinamiku* [Introduction to Nonlinear Dynamics], Moscow: LKI, 2007 (in Russian).
5. V. I. Arnol'd, *Zhestkie i myagkie matematicheskie modeli* [Hard and soft math models], Moscow: MCNMO, 2000 (in Russian).

Received 20.01.2020, The final version — 20.02.2020.

- **Alexander V. Liapzev, PhD, professor of the Department of methods of teaching physics at Herzen University,** ✉ **upm_eno@mail.ru**