

ПОИСК ДИАГРАММ ЮНГА С БОЛЬШИМИ РАЗМЕРНОСТЯМИ

Дужин В. С.¹, ассистент, ✉ vsduzhin@etu.ru
Чудновская А. А.¹, студентка, aachudnovskaya@stud.eltech.ru

¹ Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»
им. В. И. Ульянова (Ленина), ул. Профессора Попова, д. 5, корп. 23, 197376, Санкт-Петербург, Россия

Аннотация

Поиск диаграмм Юнга с максимальными размерностями или, что эквивалентно, неприводимых представлений симметрической группы $S(n)$ с максимальными размерностями, является важной задачей асимптотической комбинаторики. В данной работе предложены алгоритмы, позволяющие преобразовывать диаграмму Юнга в другую диаграмму того же размера, но обладающую большей размерностью. В результате численных экспериментов построена последовательность диаграмм Юнга с большими размерностями длины 10^6 . При этом первые 1000 членов данной последовательности не изменяются под воздействием применяемых алгоритмов, что может свидетельствовать о том, что подавляющее их число обладает максимальными размерностями. Установлено, что в построенной последовательности размерности всех диаграмм Юнга, начиная с 75778-й, превышают размерности соответствующих диаграмм из жадной планшерелевской последовательности.

Ключевые слова: диаграмма Юнга, граф Юнга, диаграмма Браттели-Вершика, процесс Планшереля, асимптотическая комбинаторика.

Цитирование: Дужин В. С., Чудновская А. А. Поиск диаграмм Юнга с большими размерностями // Компьютерные инструменты в образовании. 2019. № 4. С. 33–43. doi:10.32603/2071-2340-2019-4-33-43

1. ВВЕДЕНИЕ

Диаграммы Юнга [1, с. 37] взаимно однозначно соответствуют неприводимым представлениям симметрической группы $S(n)$. При этом размерность неприводимого представления равна количеству путей из корня графа Юнга в соответствующую диаграмму Юнга, то есть размерности данной диаграммы. Таким образом, некоторые задачи асимптотической теории представлений могут быть решены в терминах диаграмм Юнга.

Одной из таких важных задач является поиск неприводимых представлений симметрической группы $S(n)$ с максимальными размерностями [2] или, что эквивалентно, поиск диаграмм Юнга с максимальными размерностями [3]. Проблема явного описания диаграмм с максимальными размерностями до сих пор остается открытой. На первых 130 уровнях графа Юнга диаграммы с максимальными размерностями были найдены с помощью переборного алгоритма [4]. Этот подход не применим для диаграмм большего размера из-за экспоненциального роста их количества [5, с. 80–97]. Тем не менее, для

эффективного поиска диаграмм с большими размерностями могут использоваться различные стратегии, в том числе рассмотренные в работе [6]. В настоящей статье описываются новые алгоритмы, применение которых позволило построить последовательность из 10^6 диаграмм с еще большими размерностями, включающую в себя первые 130 диаграмм с максимальными размерностями.

Данная задача также изучалась для случая строгих [7] и трехмерных [8] диаграмм Юнга.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

2.1. Диаграммы Юнга

Диаграмма Юнга — это конечный набор клеток, выровненных по левому и нижнему краям, в котором длины столбцов образуют невозрастающую последовательность. Такой способ представления диаграмм называется французской нотацией. На рис. 1а приведен пример диаграммы Юнга во французской нотации.

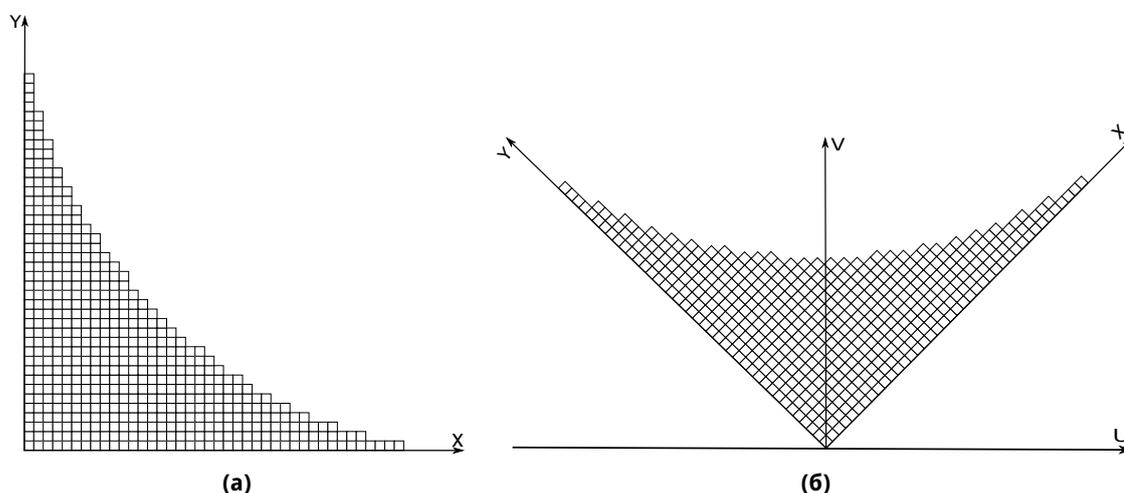


Рис. 1. Пример диаграммы Юнга (а) во французской нотации, (б) в нотации Вершика-Керова

Также существуют и другие способы изображения диаграмм Юнга. В данной работе наряду с французской нотацией используется нотация Вершика-Керова [9], которая получается поворотом используемой ранее системы координат (x, y) на 45 градусов против часовой стрелки. Диаграмма из рис. 1а в нотации Вершика-Керова изображена на рис. 1б.

Размером диаграммы называется количество клеток, из которых она состоит. Фронт диаграммы Юнга называется ломаная линия, проходящая через угловые клетки диаграммы, то есть клетки, которые можно удалить из диаграммы, не нарушив ее структуру. Как будет показано далее, фронт диаграммы размера n удобно представлять в нормированном виде, разделив координаты на \sqrt{n} , в результате чего площадь под фронтом станет равна единице. В нотации Вершика-Керова фронт диаграммы является кусочно-линейной функцией, у которой производная в точках, где она определена, равна $+1$ или -1 .

Граф Юнга — это ориентированный градуированный граф (диаграмма Браттели-Вершика), вершинами которого являются диаграммы Юнга, а ребра связывают вло-

женные друг в друга диаграммы, отличающиеся одной клеткой. Каждая диаграмма принадлежит определенному уровню графа. Первый уровень, состоящий из единственной диаграммы размера 1, называется корнем графа. Каждое ребро соединяет диаграмму уровня i с диаграммой уровня $i + 1$.

2.2. Размерности диаграмм Юнга

Количество путей, соединяющих корень графа Юнга с диаграммой, называется размерностью данной диаграммы. Размерность диаграммы λ_n размера n может быть вычислена с использованием формулы крюков [10]:

$$\dim(\lambda_n) = \frac{n!}{\prod_{(i,j \in \lambda)} h(i,j)}, \quad (1)$$

где $h(i, j)$ — длина крюка с вершиной в клетке (i, j) , то есть количество клеток, расположенных выше в том же столбце и правее в той же строке, включая клетку (i, j) .

С увеличением размера диаграммы Юнга, то есть количества клеток, из которых она состоит, размерности растут экспоненциально [5], что затрудняет вычисление их точных значений. В связи с этим для изучения асимптотического поведения размерностей диаграмм Юнга удобно рассматривать нормализованные размерности. Нормализованная размерность c диаграммы λ вычисляется по формуле [9]:

$$c(\lambda) = \frac{-2}{\sqrt{n}} \ln \frac{\dim(\lambda)}{\sqrt{n!}}, \quad (2)$$

где $\dim(\lambda)$ — точная размерность диаграммы, n — размер диаграммы.

2.3. Процесс Планшереля

На графе Юнга можно определить марковский процесс, если задать для каждого ребра переходную вероятность так, чтобы сумма исходящих вероятностей из каждой вершины была равна единице. Одним из важнейших таких процессов является марковский процесс Планшереля, обладающий свойством центральности: вероятности любых двух различных путей, соединяющих одинаковые диаграммы, равны. Процесс Планшереля задает вероятностную меру на графе Юнга, называемую мерой Планшереля, характеризующую вероятность прохождения через диаграмму λ при случайном блуждании из корня графа Юнга:

$$P_{diag}(\lambda) = \frac{\dim(\lambda)^2}{n!}, \quad (3)$$

где n — размер диаграммы, $\dim(\lambda)$ — точная размерность диаграммы. В силу центральности, планшерелевская вероятность пути в диаграмму λ определяется как:

$$P_{path}(\lambda) = \frac{\dim(\lambda)}{n!}. \quad (4)$$

Планшерелевская вероятность перехода из одной диаграммы в другую по ребру графа Юнга равна [11]:

$$p(\lambda, x, y) = \prod_{i=0}^{x-1} \frac{h(\lambda, i, y)}{h(\lambda, i, y) + 1} \prod_{j=0}^{y-1} \frac{h(\lambda, x, j)}{h(\lambda, x, j) + 1}, \quad (5)$$

где λ — диаграмма Юнга, x и y — координаты добавляемой клетки, h — длина крюка с вершиной в добавляемой клетке.

Для некоторых вероятностных мер с ростом размера диаграммы ее нормированный фронт в пределе стремится к функции, называемой предельной формой диаграммы Юнга. Предельная форма процесса Планшереля, также известная как кривая Вершика-Керова, задается формулой [9]:

$$S = \begin{cases} \frac{2}{\pi}(u \arcsin(u) + \sqrt{1-u^2}), |u| \leq 1 \\ |u|, |u| \geq 1 \end{cases} . \quad (6)$$

Заметим, что предельная форма (6) определена в системе координат Вершика-Керова (u, v) .

3. СТРАТЕГИИ ПОИСКА ДИАГРАММ С БОЛЬШИМИ РАЗМЕРНОСТЯМИ

Цель настоящей работы состоит в построении последовательности диаграмм Юнга с размерами от 1 до 10^6 , обладающих большими и максимальными размерностями. Один из подходов для решения данной задачи, впервые рассмотренный в [6], состоит в построении так называемых жадных последовательностей диаграмм Юнга. На произвольном взвешенном градуированном графе можно построить детерминированную марковскую цепь, которая определяет последовательность вершин, называемую жадной последовательностью. Для построения такой последовательности на каждом шаге принимается локально оптимальное решение, состоящее в переходе по ребру с максимальным весом. Жадные последовательности диаграмм Юнга — это последовательности, в которых i -я диаграмма получается из $(i-1)$ -й добавлением клетки с наибольшим весом.

В настоящей работе используются два вида жадных последовательностей диаграмм Юнга: планшерелевские и blow-up, описание которых приведено в 3.1 и 3.2 соответственно. Для поиска диаграмм Юнга с большими размерностями были разработаны два алгоритма, описанных в 3.3 и 3.4, в которых используются жадные стратегии. В данных алгоритмах на каждом шаге вычисляются оптимальные для добавления клетки (жадные инкременты), то есть те, которые приводят к наибольшему увеличению размерности, и оптимальные для удаления клетки (жадные декременты), удаление которых приводит к наименьшему уменьшению размерности диаграммы.

Оптимальной для добавления для жадной планшерелевской последовательности является клетка, соответствующая переходу на следующий уровень по ребру с наибольшей переходной вероятностью, а оптимальной для удаления — клетка, соответствующая переходу с предыдущего уровня по ребру с наименьшей переходной вероятностью. Для нахождения оптимальной для удаления клетки из исходной диаграммы поочередно удаляются все угловые клетки, затем вычисляются переходные вероятности соответствующих им ребер. Для жадной blow-up последовательности оптимальными для добавления и удаления являются клетки, в наибольшей степени приближающие диаграмму к предельной форме (6).

Рассматриваемые алгоритмы применяются к последовательности диаграмм, в которой каждая следующая диаграмма больше предыдущей на одну клетку и обладает наибольшей размерностью из известных на данный момент диаграмм того же размера.

3.1. Жадная планшерелевская последовательность

Жадная последовательность строится добавлением на каждом шаге к диаграмме клетки с наибольшей планшерелевской переходной вероятностью (5). Как видно из (4), размерность диаграммы Юнга прямо пропорциональна планшерелевской вероятности пути в эту диаграмму. Поскольку вероятность пути равна произведению переходных вероятностей, добавление к диаграмме λ клетки с максимальной переходной вероятностью приводит в диаграмму с наибольшей размерностью среди всех диаграмм, получаемых из λ добавлением одной клетки. Пример пяти жадных планшерелевских инкрементов к диаграмме Юнга показан на рис. 2. Цветом отмечены клетки с наибольшей планшерелевской вероятностью, которые добавляются к диаграмме. Сами вероятности приведены в виде рациональных чисел.

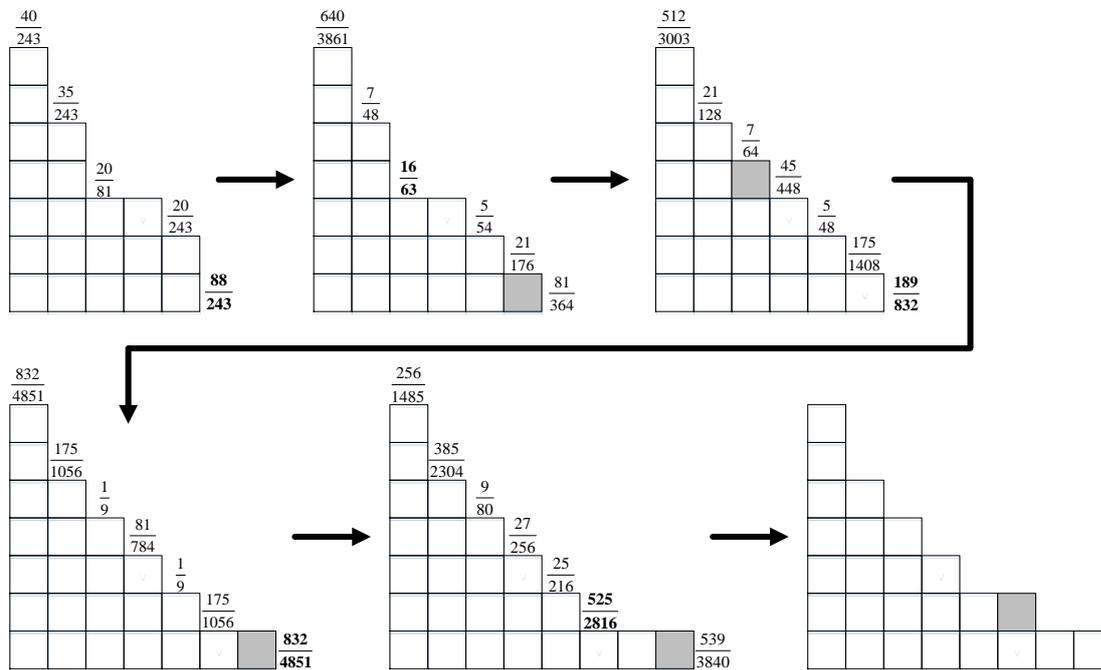


Рис. 2. Пример жадной планшерелевской последовательности диаграмм Юнга

3.2. Жадная blow-up последовательность

В [9] доказано, что предельная форма типичных по мере Планшереля диаграмм Юнга и диаграмм Юнга с максимальными размерностями совпадает. Из этого следует, что асимптотически последовательность диаграмм с максимальными размерностями также стремится к планшерелевской предельной форме (6). Идея построения жадной blow-up последовательности состоит в пропорциональном увеличении (раздутии) предельной планшерелевской кривой с последующим заполнением пространства под ней максимальным количеством клеток. Такая процедура как правило уменьшает произведения длин крюков и, как следствие (1), увеличивает размерности диаграммы Юнга. Соответственно, процесс добавления к диаграмме клеток таким образом, чтобы форма диаграммы максимально быстро стремилась к планшерелевской, должен приводить к диаграммам с большими размерностями.

В настоящей статье жадный инкремент к диаграмме λ_n по blow-up реализован следующим образом. В начале планшерелевская предельная форма (6) масштабируется так, чтобы ее площадь стала равна n . Затем для каждой позиции, в которую может быть добавлена новая клетка, методом Ньютона вычисляется кратчайшее расстояние от данной клетки до предельной формы. К диаграмме добавляется клетка с наименьшим расстоянием. На рис. 3 слева изображен пример диаграммы Юнга. Позиции, в которые можно добавить новую клетку, отмечены пунктиром. Числа характеризуют расстояния до масштабированной планшерелевской предельной формы, также приведенной на рисунке. Добавляемые клетки, соответствующие минимальным расстояниям, выделены цветом.

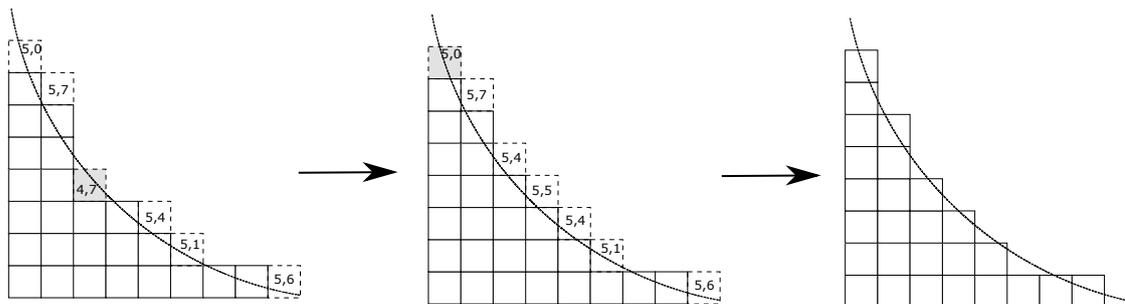


Рис. 3. Пример двух жадных по blow-up инкрементов к диаграмме Юнга

Заметим, что несмотря на то, что рассмотренные жадные последовательности состоят из диаграмм с большими размерностями, не все из этих диаграмм имеют максимальные размерности. В частности, уже 15-е диаграммы жадной планшерелевской и жадной по blow-up последовательностей не обладают максимальными размерностями.

3.3. Алгоритм встряски с перебором

Идея алгоритма состоит в преобразовании исходной диаграммы λ_n в другую диаграмму λ'_n того же размера, но предположительно обладающую большей размерностью. К диаграмме λ_n последовательно применяется N жадных инкрементов, а затем к полученной диаграмме λ_{n+N} применяется N жадных декрементов. Под глубиной встряски N будем понимать число добавляемых к λ_n клеток.

Алгоритм встряски с перебором состоит из следующих шагов:

1. Для исходной диаграммы λ_n вычисляются k оптимальных для добавления клеток.
2. Из найденных клеток выбирается клетка с наибольшим весом и добавляется к диаграмме, для полученной диаграммы снова вычисляются k оптимальных для добавления клеток. Шаг повторяется N раз.
3. Для полученной диаграммы размера $n + N$ клеток вычисляются k оптимальных для удаления клеток.
4. Клетка с наименьшим весом удаляется, вычисляются k новых оптимальных для удаления клеток. Шаг повторяется N раз.
5. Размерность полученной диаграммы λ'_n размера n сравнивается с размерностью исходной диаграммы λ_n . Если размерность λ'_n больше, чем размерность λ_n , то λ_n заменяется на λ'_n и шаги 1–5 выполняются для λ'_n . Иначе перебираются другие комбинации добавляемых и удаляемых клеток из шагов 2–3.
6. Алгоритм завершает работу, когда размерности всех диаграмм λ'_n не превышают размерность диаграммы λ_n .

3.4. Алгоритм ветвей

В данном алгоритме вместо одной строится множество жадных последовательностей, называемых ветвями, проходящих через незначительно отличающиеся друг от друга диаграммы. Такой подход позволяет найти диаграммы Юнга с размерностями, большими чем у диаграмм жадной последовательности, построенной из корня графа Юнга.

Из исходной диаграммы генерируются k диаграмм, отличающихся от нее на s случайных клеток, к каждой из них добавляются локально оптимальные клетки, позволяющие получить h диаграмм с размерами от $n+1$ до $n+h$. Размерность каждой полученной диаграммы сравнивается с размерностью диаграммы такого же размера из накопленного массива диаграмм с большими размерностями. Если размерность новой диаграммы больше, то она сохраняется в массив накопленных диаграмм вместо находящейся там диаграммы такого же размера.

На рис. 4 изображен пример работы алгоритма ветвей. В начале из исходной диа-

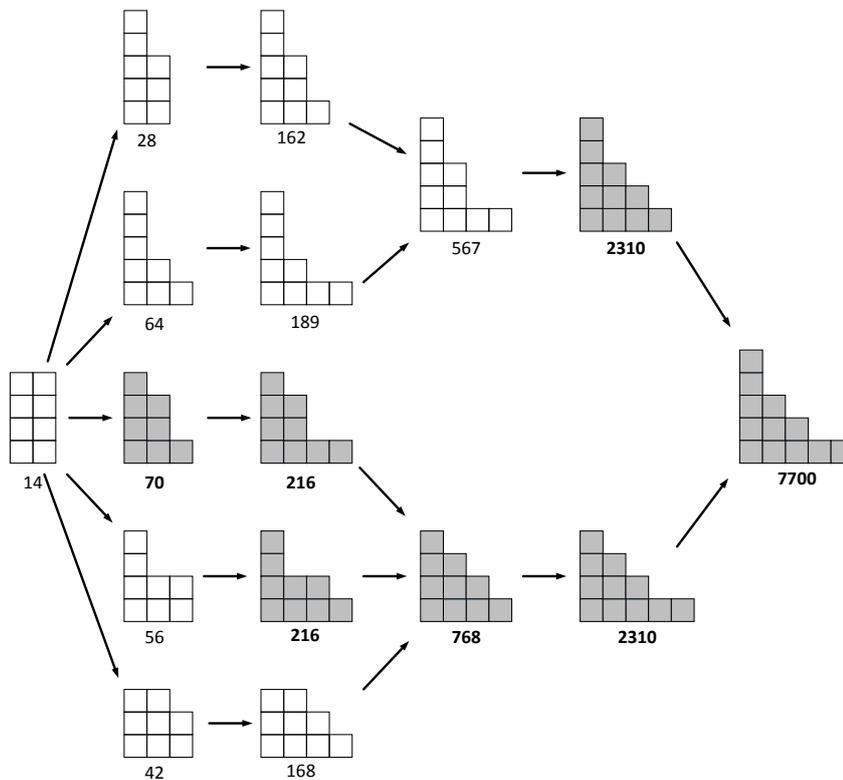


Рис. 4. Пример работы алгоритма ветвей

граммы Юнга генерируются 5 диаграмм, отличающихся от нее не более, чем на 2 клетки. Затем из этих диаграмм строятся жадные планшерелевские последовательности. Процесс завершается, когда эти последовательности сливаются. Рядом с каждой диаграммой подписана ее размерность, а диаграммы с наибольшими размерностями выделены цветом. В случае, когда несколько ветвей содержат диаграммы с одинаковыми наибольшими размерностями, сохраняется любая из этих диаграмм.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ

В качестве начальной последовательности диаграмм Юнга, к которой применялись описанные выше стратегии, было взято объединение диаграмм с наибольшими размерностями из планшерелевской и blow-up жадных последовательностей. Затем эта последовательность поочередно преобразовывалась с помощью алгоритма встряски с перебором с параметрами $N = 1$, $k = 3$ и алгоритмом ветвей с параметрами $k = 2$, $h = 10$, $s = 1$; $k = 5$, $h = 10$, $s = 1$; $k = 10$, $h = 10$, $s = 1$. Вычисления производились на вычислительном кластере в течение трех недель. Мы предполагаем, что полученная нами результирующая последовательность, содержащая диаграммы с размерами $n < 10^6$ с наибольшими известными нам размерностями, все-таки может не содержать всех диаграмм Юнга с максимальными размерностями, поскольку алгоритмы все время позволяют нам находить новые диаграммы с большими размерностями. Тем не менее размерности полученных диаграмм существенно превышают размерности диаграмм из жадной последовательности. На рис. 5 изображены фрагменты графиков нормализованных размерностей жадной планшерелевской последовательности (серая кривая), а также последовательностей, построенных в [6] (пунктирная кривая) и в настоящей работе (черная кривая) на диапазоне [100000, 102000].

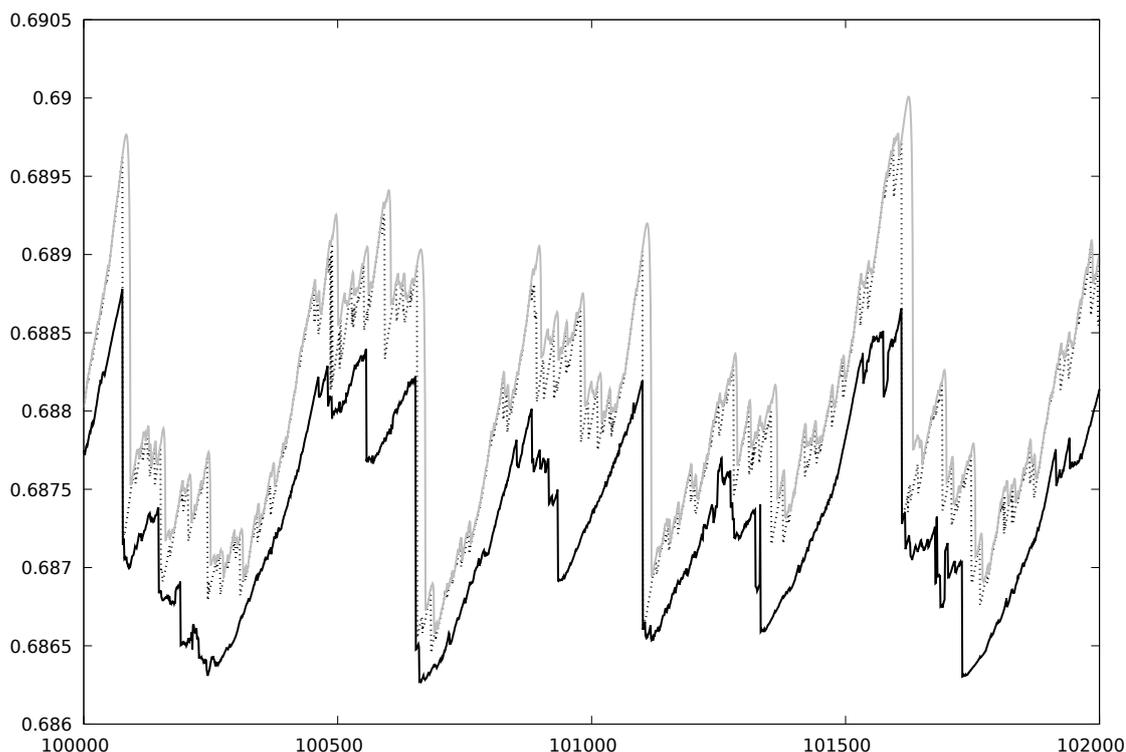


Рис. 5. Нормализованные размерности диаграмм Юнга

Исходя из (2), при фиксированном размере диаграммы ее точная размерность тем больше, чем меньше ее нормализованная размерность. Как видно из рисунка, размерности полученных в данной работе диаграмм превышают размерности диаграмм, известных ранее. Еще одно наблюдение состоит в том, что для $n > 75778$ все диаграммы из последовательности, полученной в настоящей работе, имеют размерности, превыша-

ющие размерности диаграмм жадной планшерелевской последовательности. Аналогичное пороговое значение для жадной по blow-up последовательности равно 6856.

Отдельно был рассмотрен начальный участок последовательности, состоящий из 1000 диаграмм Юнга. Эти диаграммы подвергались воздействию тех же алгоритмов, но с бóльшими значениями параметров. Поочередно применялись встряска с перебором с параметрами $N = 4$, $k = 10$ и алгоритм ветвей с параметрами $k = 100$, $h = 10$ до тех пор, пока диаграммы последовательности не перестали изменяться.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая работа посвящена поиску диаграмм Юнга с большими размерностями. Построена последовательность диаграмм Юнга с размерами $n \in [1, 10^6]$. К данным диаграммам последовательно применялись различные стратегии, позволяющие преобразовывать исходную диаграмму в диаграмму того же размера, но обладающую бóльшей размерностью. Результирующая последовательность включает в себя все известные диаграммы с максимальными размерностями. Также установлено, что первые 1000 диаграмм данной последовательности не изменяются под воздействием применяемых алгоритмов, что может свидетельствовать о том, что значительное число этих диаграмм, если не все, имеют максимальную размерность среди всех диаграмм соответствующего размера.

К дальнейшим планам относится анализ полученной последовательности с целью изучения свойств, характерных для диаграмм Юнга с максимальными размерностями. Также планируется разработка новых эффективных алгоритмов поиска диаграмм Юнга с большими и максимальными размерностями.

Авторы выражают свою искреннюю благодарность профессору Николаю Николаевичу Васильеву за многочисленные дискуссии, ценные советы и мотивацию.

Список литературы

1. Кнут Д. Э. Искусство программирования. М.: Мир, 1978. Т. 3.
2. McKay J. The Largest Degrees of Irreducible Characters of the Symmetric Group // Mathematics of Computation. 1976. Vol. 30. № 135. P. 624–631.
3. Baer R. M., Brock P. Natural Sorting over Permutation Spaces // Mathematics of Computation. 1968. № 22. P. 385–410.
4. Вершик А. М., Павлов Д. А. Численные эксперименты в задачах асимптотической теории представлений // Записки научных семинаров ПОМИ. 2009. Т. 373. С. 77–93.
5. Эндрюс Г. Теория разбиений. М.: Наука. 1982.
6. Васильев Н. Н., Дужин В. С. Построение неприводимых представлений симметрической группы $S(n)$ с большими и максимальными размерностями // Информационно-управляющие системы. 2015. № 3. С. 17–22. doi:10.15217/issn1684-8853.2015.3.17
7. Васильев Н. Н., Дужин В. С. Исследование роста максимальных и типичных размерностей строгих диаграмм Юнга, Теория представлений, динамические системы, комбинаторные методы // Записки научных семинаров ПОМИ. 2015. Т. 437. С. 81–99.
8. Дужин В. С., Васильев Н. Н. Рандомизированное преобразование Шютценберге и вычисление копереходных вероятностей центрального процесса на трехмерном графе Юнга // Записки научных семинаров ПОМИ. 2019. Т. 485. С. 90–106.
9. Вершик А. М., Керов С. В. Асимптотика максимальной и типичной размерностей неприводимых представлений симметрической группы // Функциональный анализ и его приложения. 1985. Т. 19. № 1. С. 25–36.
10. Frame J. S., Robinson G. de B., Thrall R. M. The hook graphs of the symmetric group // Canad J. Math. 1954. № 6. P. 316–325. doi: 10.4153/CJM-1954-030-1

11. Kerov S. V. Transition Probabilities for Continual Young Diagrams and the Markov Moment Problem // Funktsional. Anal. Prilozhen. 1993. Vol. 27. № 2. P. 32–49.

Поступила в редакцию 19.11.2019, окончательный вариант — 20.12.2019.

Дужин Василий Сергеевич, ассистент кафедры алгоритмической математики факультета компьютерных технологий и информатики СПбГЭТУ, ✉ vsduzhin@etu.ru

Чудновская Анастасия Андреевна, студентка бакалавриата кафедры информационных систем факультета компьютерных технологий и информатики СПбГЭТУ, aachudnovskaya@stud.eltech.ru

Computer tools in education, 2019

№ 4: 33–43

<http://cte.eltech.ru>

doi:10.32603/2071-2340-2019-4-33-43

Search for Young Diagrams with Large Dimensions

Duzhin V. S.¹, assistant, ✉ vsduzhin@etu.ru
Chudnovskaya A. A.¹, bachelor student, aachudnovskaya@stud.eltech.ru

¹Saint Petersburg Electrotechnical University,
5, building 3, st. Professora Popova, 197376, Saint Petersburg, Russia

Abstract

Search for Young diagrams with maximum dimensions or, equivalently, search for irreducible representations of the symmetric group $S(n)$ with maximum dimensions is an important problem of asymptotic combinatorics. In this paper, we propose algorithms that transform a Young diagram into another one of the same size but with a larger dimension. As a result of massive numerical experiments, the sequence of 10^6 Young diagrams with large dimensions was constructed. Furthermore, the proposed algorithms do not change the first 1000 elements of this sequence. This may indicate that most of them have the maximum dimension. It has been found that the dimensions of all Young diagrams of the resulting sequence starting from the 75778th exceed the dimensions of corresponding diagrams of the greedy Plancherel sequence.

Keywords: *Young diagram, Young graph, Bratteli-Vershik diagram, Plancherel process, asymptotic combinatorics, irreducible representation, symmetric group.*

Citation: V. S. Duzhin and A. A. Chudnovskaya, "Search for Young Diagrams with Large Dimensions," *Computer tools in education*, no. 4, pp. 33–43, 2019 (in Russian); doi: 10.32603/2071-2340-2019-4-33-43

References

1. D. E. Knuth, *The art of computer programming*, vol. 3, Moscow: Mir, 1978 (in Russian).
2. J. McKay, "The Largest Degrees of Irreducible Characters of the Symmetric Group," *Mathematics of Computation*, vol. 30, no. 135, pp. 624–631, 1976; doi: 10.1090/S0025-5718-1976-0404414-X

3. R. M. Baer and P. Brock, “Natural Sorting over Permutation Spaces,” *Mathematics of Computation*, no. 22, pp. 385–410, 1968.
4. A. M. Vershik and D. A. Pavlov, “Numerical experiments in problems of asymptotic representation theory,” *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI*, vol. 373, pp. 77–93, 2009 (in Russian).
5. G. E. Andrews, *The Theory of Partitions*, Moscow: Nauka, Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoi literatury, 1982.
6. N. N. Vasil’ev and V. S. Duzhin, “Postroenie neprivodimykh predstavlenii simmetricheskoi gruppy $S(n)$ s bol’shimi i maksimal’nymi razmernostyami” [Construction of irreducible representations of the symmetric group $S(n)$ with large and maximal dimensions], *Information and Control Systems*, no. 3, pp. 17–22, 2015 (in Russian); doi: 10.15217/issn1684-8853.2015.3.17
7. N. N. Vasil’ev and V. S. Duzhin, “A Study of the Growth of the Maximum and Typical Normalized Dimensions of Strict Young Diagrams,” *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 216, no. 1, pp. 53–64, 2016; doi: 10.1007/s10958-016-2887-x
8. N. N. Vasil’ev and V. S. Duzhin, “Randomized Schutzenberger transformation and uniformly random generator of Young tableaux,” *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI*, vol. 485, pp. 90–106, 2019 (in Russian).
9. A. M. Vershik and S. V. Kerov, “Asimptotika maksimal’noi i tipichnoi razmernostei neprivodimykh predstavlenii simmetricheskoi gruppy” [Asymptotics of the maximum and typical dimensions of irreducible representations of a symmetric group], *Funktsional’nyi analiz i ego prilozheniya*, vol. 19, no. 1, pp. 25–36, 1985 (in Russian).
10. J. S. Frame, G. de B. Robinson, and R. M. Thrall, “The hook graphs of the symmetric group,” *Canad J. Math.*, no. 6, pp. 316–325, 1954; doi: 10.4153/CJM-1954-030-1
11. S. V. Kerov, “Transition Probabilities for Continual Young Diagrams and the Markov Moment Problem,” *Funktsional. Anal. Prilozhen.*, vol. 27, no. 2, pp. 32–49, 1993.

Received 19.11.2019, the final version — 20.12.2019.

Vasilii S. Duzhin, assistant of Department of Algorithmic Mathematics, Saint Petersburg Electrotechnical University, ✉ vsduzhin@etu.ru

Anastasia A. Chudnovskaya, bachelor student of Department of Information Systems, Saint Petersburg Electrotechnical University, aachudnovskaya@stud.eltech.ru