Компьютерные инструменты в образовании, 2020
№ 2: 59–65
УДК: 519.1
http://cte.eltech.ru
doi:10.32603/2071-2340-2020-2-59-65

ГРАФЫ ПРОИЗВОДНЫХ В ГЛОБАЛЬНЫХ СТРУКТУРАХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ БАЙЕСОВСКИХ СЕТЕЙ*

Максимов А. Г.[1,2], младший научный сотрудник, agm@dscs.pro
Завалишин А. Д.[1,2], младший научный сотрудник, adz@dscs.pro
Абрамов М. В.[1,2], кандидат технических наук, ✉ mva@dscs.pro
Тулупьев А. Л.[2,1], доктор физико-математических наук, alt@dscs.pro

[1]Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации Российской академии наук,
14 линия, 39, 199178, Санкт-Петербург, Россия
[2]Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., 7–9, 199034, Санкт-Петербург, Россия

Аннотация

Статья направлена на обобщение понятий графа производной и первообразной графа для графов, обладающих магистральной связанностью. Сформулированы и доказаны теоремы о магистральной связности графа производной и о графе первообразной магистрально связных графов. Теоретическая и практическая значимость результата заключается в упрощении поиска удачной визуализации алгебраических байесовских сетей, которая способствовала бы выявлению особенностей их структуры, а также определению новых видов глобальных структур этих сетей. Такие структуры позволили бы хранить те же самые сведения, но использовать другие алгоритмы вывода, что упростило бы программную реализацию данной модели. Отметим, что сохранение свойства магистральной связности при нахождении графа производной рассматривается в этой статье впервые.

Ключевые слова: *граф производной, первообразная графа, граф смежности, магистральное свойство графа, алгебраические байесовские сети.*

Цитирование: Максимов А. Г., Завалишин А. Д., Абрамов М. В., Тулупьев А. Л. Графы производных в глобальных структурах алгебраических байесовских сетей // Компьютерные инструменты в образовании. 2020. № 2. С. 59–65. doi: 10.32603/2071-2340-2020-2-59-65

1. ВВЕДЕНИЕ

В искусственном интеллекте и мягких вычислениях одним из инструментов представления данных и знаний с неопределенностью являются алгебраические байесовские сети [3–5]. В свою очередь, они являются подклассом логико-вероятностных графических моделей. При работе с алгебраическими байесовскими сетями (априорный вы-

* Работы произведены при поддержке гранта РФФИ 18-01-00626 «Методы представления, синтеза оценок истинности и машинного обучения в алгебраических байесовских сетях и родственных моделях знаний с неопределенностью: логико-вероятностный подход и системы графов» и по государственному заданию № 0073-2019-0003.

вод, апостериорный вывод, поддержание непротиворечивости) существенную роль играет глобальная структура сети: она представляется в виде графа смежности, отличительной чертой которого является магистральная связность [6]. Вместе с тем, для поиска удачной визуализации алгебраических байесовских сетей, для поиска новых структур алгебраических байесовских сетей, которые позволили бы хранить те же самые сведения, но использовать другие алгоритмы вывода, приходится исследовать преобразование вторичных структур сетей. При этом возникают вопросы сохранения свойства магистральной связности этих структур, лежащих в основе сети.

Целью настоящей статьи является анализ сохранения свойства магистральной связанности графа при построении графа его производной и первообразной.

2. ГРАФ СМЕЖНОСТИ

Пусть заданы неориентированный граф $G = \langle V, E\rangle$, конечный алфавит $\mathscr{A}$, а также определена и известна функция $\omega : V \to 2^{\mathscr{A}}$, сопоставляющая каждой вершине графа ее нагрузку — множество элементов $\mathscr{A}$. Сразу условимся не делать различий между вершиной и ее нагрузкой, если из контекста очевидно, о чем идет речь.

Граф G тогда является графом смежности, если выполнены следующие условия [2, 4]:

- любые две вершины, имеющие непустое пересечение нагрузок, соединены путем;
- в нагрузки всех вершин этого пути входят все элементы, общие для его начальной и конечной вершин;
- нагрузка никакой вершины не содержится ни в какой другой.

Первые два условия называются условием *магистральной связности*, а удовлетворяющие им графы — *магистрально связными*.

Замечание: нагрузкой ребра по определению считают пересечение нагрузок его концов.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

Определение: Будем называть граф малым, если он не содержит уникальных элементов $\mathscr{A}$.

Определение: Пусть дан граф G. Графом его производной (наименование по Сабидуси) называется граф $L(G)$, вершины которого соответствуют ребрам графа G и смежны в том и только том случае, когда соответствующие им ребра в G имеют общую вершину [7, 8].

Попробуем обобщить это определение. Возникает вопрос: что делать с нагрузками вершин? Часть текста ниже посвящена ответу на этот вопрос.

Естественным кажется определить нагрузки вершин в $L(G)$ как нагрузки соответствующих ребер в G.

Теорема 1. (об адекватности дифференцирования) пусть граф G магистрально связен. Тогда $L(G)$ магистрально связен.

Доказательство: Рассмотрим две вершины в $L(G)$. Рассмотрим также их прообразы в G: e_1 и e_2. Пусть пересечение их нагрузок равно s. Тогда концы ребер e_1 и e_2 содержат s. Обозначим концы e_1 за u_1, u_2, а концы e_2 за v_1, v_2. Существует путь P из u_1 в v_1. Так как $s \subset u_1, v_1$, все вершины в пути P содержат s. Тогда любое ребро в этом пути содержит s. Рассмотрим в графе $L(G)$ путь по образам вершин из P в соответствующем порядке. Он нас устроит ■

Комментарий: мы говорим именно о магистральной связности графов, а не о графах смежности, потому что не хотим задумываться об условии «нагрузка никакой вершины не содержится ни в какой другой», которое наверняка нарушается.

С графом производной разобрались — теперь будем «интегрировать». Под интегрированием здесь понимается операция, обратная операции построения графа производной.

Теорема Уитни [1] доставляет критерий «интегрируемости» графа — его ребра можно покрыть кликами так, чтобы каждая вершина входила ровно в две клики. При этом клики вида K_1 тоже разрешаются. Теорема Уитни гарантирует, что любой граф производной имеет ровно одно покрытие такого рода.

Рис. 1, 2 содержат пример такого рода разбиения.

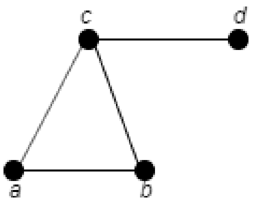

Рис. 1. Исходный граф G

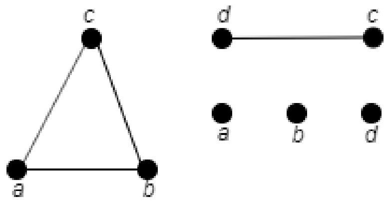

Рис. 2. Покрытие G кликами

Если такое покрытие найдено, то сопоставим каждой клике вершину, затем будем соединять получившиеся вершины ребром, если их клики имеют общую вершину. Обозначим получившийся граф $L^{-1}(G)$.

Рис. 3 продолжает пример рис. 1, 2 и содержит восстановленный по разбиению рис. 2 граф.

Естественным здесь кажется считать нагрузкой вершины в $L^{-1}(G)$ объединение нагрузок входящих в нее вершин.

Каждое ребро в $L^{-1}(G)$ является образом какой-то вершины. Возникает вопрос: можно ли тогда нагрузкой ребра считать нагрузку его прообраза?

Ответ: нельзя. Пример на рис. 4, 5.

Как легко понять из рис. 5, нагрузки прообразов не обеспечивают нужный путь между вершинами *abc* и *abd*. Отметим, однако, что магистральная связность в таком графе все же будет достигаться.

Более того, оказывается, что даже без этого ограничения граф $L^{-1}(G)$ вовсе не обязан быть магистрально связным. Пример на рис. 6, 7.

Тем не менее, хорошие новости все же есть. Предложенный способ назначения нагрузок вершинам из $L^{-1}(G)$ — считать нагрузкой вершины объединение нагрузок вершин ее клики-прообраза — достаточно разумен, потому что можно сформулировать следующее утверждение:

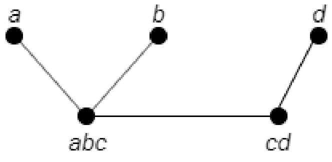

Рис. 3. Восстановленный по G граф $L^{-1}(G)$

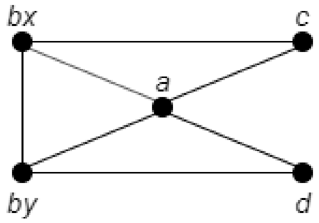

Рис. 4. интегрируемый граф G

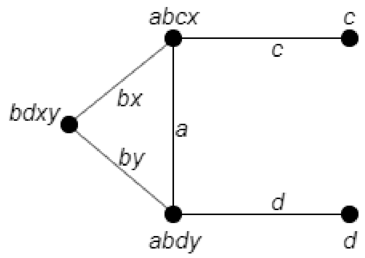

Рис. 5. интеграл $L^{-1}(G)$

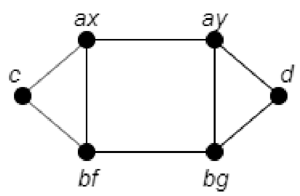

Рис. 6. интегрируемый граф G

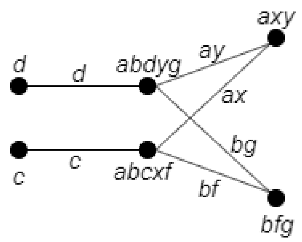

Рис. 7. интеграл $L^{-1}(G)$

Теорема 2. (об адекватности интегрирования)

Пусть граф G является малым и магистрально связным. Тогда $L^{-1}(L(G)) = G$ в смысле нагрузок вершин.

Доказательство: обозначим $L^{-1}(L(G))$ за G^*. Из теоремы Уитни известно, что G^* и G изоморфны. Рассмотрим произвольную вершину в G и ее образ в G^*. Обозначим их v и v^*. Пусть нагрузка вершины v равна s. Для каждого символа алфавита a, если он принадлежит s, существует ребро из v, которое содержит a. Тогда в клике, которая является прообразом v в $L(G)$ при применении L^{-1}, есть вершина, нагрузка которой содержит a, то есть нагрузка e^* содержит a. Тогда нагрузка e равна нагрузке e^*. ■

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе было предложено обобщение графа производной на магистрально связные графы и показана корректность этого обобщения. Удалось установить, что свойство магистральной связности сохраняется при нахождении графа производной. Стоит отметить, что для малых графов, обладающих магистральной связностью, верно, что граф прообраза графа образа совпадает с исходным графом. Ближайшей целью теперь является поиск способа априорно определить, является ли «интеграл» графа магистрально связным, или, что то же самое, найти инварианты в графах производных графов смежности.

Список литературы

1. *Whitney H.* Congruent graphs and the connectivity of graphs // Hassler Whitney Collected Papers. Birkhäuser Boston, 1992. C. 61–79. doi: 10.1007/978-1-4612-2972-8_4

2. *Опарин В. В., Фильченков А. А., Сироткин А. В., Тулупьев А. Л.* Матроидное представление семейства графов смежности над набором фрагментов знаний // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2010. № 4 (68). С. 73–76.
3. *Тулупьев А. Л., Николенко С. И., Сироткин А. В.* Основы теории байесовских сетей: учебник. СПб.: СПбГУ. 2019.
4. *Тулупьев А. Л., Столяров Д. М., Ментюков М. В.* Представление локальной и глобальной структуры алгебраической байесовской сети в Java-приложениях // Труды СПИИРАН. 2007. № 5. С. 71–99.
5. *Levenets D. G., Zotov M. A., Romanov A. V., Tulupyev A. L., Zolotin A. A., Filchenkov A. A.* Decremental and incremental reshaping of algebraic Bayesian networks global structures // Proceedings of the First International Scientific Conference “Intelligent Information Technologies for Industry” (IITI’16). Springer, Cham, 2016. P. 57–67. doi: 10.1007/978-3-319-33816-3_6
6. *Filchenkov A. A., Tulupyev A. L.* Coincidence of the sets of minimal and irreducible join graphs over primary structure of algebraic Bayesian networks // Vestnik St. Petersburg University: Mathematics. 2012. T. 45. № 2. P. 106–113. doi: 10.3103/S1063454112020057
7. *Харари Фрэнк* Теория графов: Пер. с англ. / Предисл. В. П. Козырева; Под ред. Г. П. Гаврилова. Изд. 4-е. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. 296 с.
8. *Sabidussi G.* Graphs with given group and given graph-theoretical properties // Canadian journal of mathematics. 1957. T. 9. C. 515–525.

Поступила в редакцию 30.12.2019, окончательный вариант — 30.01.2020.

Максимов Анатолий Григорьевич, младший научный сотрудник лаборатории теоретических и междисциплинарных проблем информатики СПИИРАН; студент кафедры информатики СПбГУ, agm@dscs.pro

Завалишин Арсений Дмитриевич, младший научный сотрудник лаборатории теоретических и междисциплинарных проблем информатики СПИИРАН; студент кафедры информатики СПбГУ, adz@dscs.pro

Абрамов Максим Викторович, кандидат технических наук, заведующий лабораторией теоретических и междисциплинарных проблем информатики СПИИРАН; доцент кафедры информатики СПбГУ, ✉ mva@dscs.pro

Тулупьев Александр Львович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информатики, СПбГУ; главный научный сотрудник лаборатории теоретических и междисциплинарных проблем информатики СПИИРАН, alt@dscs.pro

Computer tools in education, 2020
№ 2: 59–65
http://cte.eltech.ru
doi:10.32603/2071-2340-2020-2-59-65

Graphs of Derivatives in the Global Structures of Algebraic Bayesian Networks

Maksimov A. G.[1,2], junior researcher, agm@dscs.pro
Zavalishin A. D.[1,2], junior researcher, adz@dscs.pro
Abramov M. V.[1,2], PhD, senior researcher, ✉ mva@dscs.pro
Tulupyev A. L.[2,1], PhD, Dc. Sci., professor, alt@dscs.pro

[1]Saint Petersburg Institute for Informatics and Automation of the Russian Academy of Sciences, 39, 14 Line, 199178, Saint Petersburg, Russia
[2]Saint Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, 199034, Saint Petersburg, Russia

Abstract

The article is aimed at summarizing the concepts of a derivative graph and a primitive graph for graphs with backbone connectivity. Theorems are formulated and proved on the main connectedness of the graph of the derivative and on the primitive graph of the main connected graphs. The theoretical and practical significance of the result is to simplify the search for successful visualization of algebraic Bayesian networks, which would help to identify the features of their structure, as well as the definition of new types of global structures of these networks. Such structures would allow us to store the same information, but use other output algorithms, which would simplify the software implementation of this model. Note that maintaining the property of trunk connectivity when finding the graph of the derivative is considered in this article for the first time.

Keywords: *derivative graph, antiderivative graph, adjacency graph, backbone graph property, Bayesian algebraic networks.*

Citation: A. G. Maksimov, A. D. Zavalishin, M. V. Abramov, and A. L. Tulupyev, “Graphs of Derivatives in the Global Structures of Algebraic Bayesian Networks,” *Computer tools in education*, no. 2, pp. 59–65, 2020 (in Russian); doi:10.32603/2071-2340-2020-2-59-65

Acknowledgements: *The work was performed as part of the project on state assignment SPIIRAS No. 0073-2019-0003, with financial support from the Russian Federal Property Fund, project No. 18-01-00626; project No. 18-37-00323.*

References

1. H. Whitney, “Congruent graphs and the connectivity of graphs,” *Hassler Whitney Collected Papers. Contemporary Mathematicians*, pp. 61–79, 1992; doi: 10.1007/978-1-4612-2972-8_4
2. V. V. Oparin, A. A. Fil’chenkov, A. V. Sirotkin, and A. L. Tulupyev, “Matroidnoe predstavlenie semeistva grafov smezhnosti nad naborom fragmentov znanii” [Matroid representation of a family of adjacency graphs over a set of pieces of knowledge], *Nauchno-tekhnicheskii vestnik informatsionnykh tekhnologii, mekhaniki i optiki*, no. 4 (68), pp. 73–76, 2010 (in Russian).
3. A. L. Tulupyev, S. I. Nikolenko, and A. V. Sirotkin, *Osnovy teorii baiesovskikh setei* [Fundamentals of Bayesian Network Theory], St Petersburg, Russia: Publishing house of St. Petersburg State University, 2019 (in Russian).

4. A. L. Tulupyev, D. M. Stolyarov, and M. V. Mentyukov, “Predstavlenie lokal’noi i global’noi struktury algebraicheskoi baiesovskoi seti v Java-prilozheniyakh” [Representation of local and global algebraic structure Bayesian network in Java-applications], in *Trudy SPIIRAN*, vol. 5, pp. 71–99, 2007 (in Russian).
5. D. G. Levenets, M. A. Zotov, A. V. Romanov, A. L. Tulupyev, A. A. Zolotin, and A. A. Filchenkov, “Decremental and incremental reshaping of algebraic Bayesian networks global structures,” in *Proc. of the 1st International Scientific Conference Intelligent Information Technologies for Industry”(IITI’16), Advances in Intelligent Systems and Computing*, vol. 451, pp. 57–67, 2016; doi: 10.1007/978-3-319-33816-3_6
6. A. A. Filchenkov and A. L. Tulupyev, “Coincidence of the sets of minimal and irreducible join graphs over primary structure of algebraic Bayesian networks,” *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics*, vol. 45, no. 2, pp. 106–113, 2012; doi: 10.3103/S1063454112020057
7. F. Harary, *Graph Theory*, Moscow: Librocom, 2009 (in Russian).
8. G. Sabidussi, “Graphs with given group and given graph-theoretical properties,” *Canadian journal of mathematics*, vol. 9, pp. 515-525, 1957; doi: 10.4153/CJM-1957-060-7

Received 30.12.2019, the final version — 30.01.2020.

Anatolii Maksimov, junior researcher, Laboratory of Theoretical and Interdisciplinary Problems of Informatics, SPIIRAS; student, Computer Science Department, SPbU, agm@dscs.pro

Arsenii Zavalishin, junior researcher, Laboratory of Theoretical and Interdisciplinary Problems of Informatics, SPIIRAS; student, Computer Science Department, SPbU, adz@dscs.pro

Maxim Abramov, PhD, senior researcher, Laboratory of Theoretical and Interdisciplinary Problems of Informatics, SPIIRAS; Associate Professor, Computer Science Department, SPbU, ✉ mva@dscs.pro

Alexander Tulupyev, PhD, Dc. Sci., professor, Computer Science Department, SPbU; Principal Researcher, Laboratory of Theoretical and Interdisciplinary Problems of Informatics, SPIIRAS, alt@dscs.pro