Компьютерные инструменты в образовании, 2019
№ 4: 94–106
УДК: 372.851:517.3
http://cte.eltech.ru
doi:10.32603/2071-2340-2019-4-94-106

О СИМВОЛЬНОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ В КУРСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Малых М. Д.[1], доктор физико-математических наук, ✉ malykh_md@pfur.ru
Севастьянов А. Л.[1], кандидат физико-математических наук, sevastianov_al@pfur.ru
Севастьянов Л. А.[1], доктор физико-математических наук, sevastianov_la@pfur.ru

[1]Российский университет дружбы народов, ул. Миклухо-Маклая, 6, 117198, Москва, Россия

Аннотация

В статье рассмотрены трудности, возникающие при изложении темы «Неопределенный интеграл» в курсе математического анализа, которая, как известно, содержит очень много задач и очень мало теории.

Мы полагаем, что вся эта тема относится к разделу компьютерной алгебры, относящемуся к интегрированию в элементарных функциях. Наивные методы интегрирования, которые только и рассматриваются на первом курсе, были тщательно изучены Слеглем и Мозесем в 1960-х годах, когда создавался первый символьный интегратор на ЭВМ. В настоящей статье отчеты Слегля и Мозеса, доступные на сайте Массачусетского технологического института, представлены как ценнейший источник дополнительного материала, инкорпорация которого в курс анализа не требует каких-либо существенных перемен в содержании самого курса.

В конце статьи обсуждено место наивных методов символьного интегрирования в современной компьютерной алгебре и в курсе современного анализа.

Ключевые слова: *математический анализ, методика преподавания, компьютерная алгебра, элементарные функции.*

Цитирование: Малых М. Д., Севастьянов А. Л., Севастьянов Л. А. О символьном интегрировании в курсе математического анализа // Компьютерные инструменты в образовании. 2019. № 4. С. 94–106. doi:10.32603/2071-2340-2019-4-94-106

1. ВВЕДЕНИЕ

Тема «Неопределенный интеграл» занимает важное место во всем курсе математического анализа, ей уделено заметное место на семинарских занятиях в 1-ом семестре, задачи из этой темы традиционно входят в любые проверочные работы и экзамены по предмету. Всем, и в первую голову студентам, хорошо известно, что эти задачи можно решить при помощи той или иной системы компьютерной алгебры (CAS), более того, коммерческие системы, такие как Wolfram Alpha и Maple, позволяют получить не только ответ, но и само решение, расписанное по ходам. На контрольных работах и экзаменах преподавателям приходится проявлять повышенное внимание с целью недопущения использования этих систем. Однако понятно, что эта борьба с прогрессом будет проиграна так же, как несколько десятилетий назад была проиграна борьба с калькуляторами.

Вполне очевидно, что всеобщее распространение калькуляторов дурно повлияло на развитие навыков устного счета у школьников, а повсеместное использование CAS дурно скажется на навыках интегрирования. Однако актуальный вопрос не в том, как предотвратить использование CAS на занятиях, а как использовать компьютерною алгебру для обучения математическому анализу.

В настоящее время CAS изучаются разве лишь на IT-специальностях, да и то в конце бакалавриата. Студенты-первокурсники осваивают CAS своими силами, и это освоение сводится к разучиванию синтаксиса и написания программ в одну строчку (бесплатная облачная версия Wolfram Alpha большего и не предлагает). Чтобы читатель мог оценить тривиальность получаемых таким путем навыков, приведем стандартный пример. Для вычисления интеграла

$$\int xe^x dx$$

в CAS Sage [1] нужно ввести после приглашения `sage:` следующее

```
integral(x*e^x,x)
```

и сразу получить ответ

```
( x - 1) * e ^ x
```

Понятно, что в этом нет никакой пользы для изучения математического анализа. Поэтому здесь мы должны вновь вернуться к содержанию самой темы и попытаться понять, чему именно нужно было научить в теме «Неопределенный интеграл» и как этому может помочь компьютерная алгебра.

2. ТЕМА «НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ»

Существующая система преподавания математического анализа в РФ сложилась в середине прошлого века. В рамках этой системы лекции и семинарские занятия идут параллельно, без жесткой привязки семинаров к лекциям. Дабы изложение не было абстрактным, в качестве примера мы будем ссылаться на организацию такого курса на физическом факультете МГУ, где в качестве учебника используется учебник В. А. Ильина и Э. Г. Позняка [2], а семинарские занятия ведутся по пособию В. Ф. Бутузова [3].

В задачнике В. Ф. Бутузова теме «Неопределенный интеграл» посвящена вся V глава, которая содержит порядка 120 задач, среди которых есть и весьма трудные. Эти задачи иллюстрируют самую короткую 6 главу учебник В. А. Ильина и Э. Г. Позняка [2], содержащую 12 страниц текста, то есть по 10 задач на страницу. Однако на самом деле соотношение еще более радикальное, поскольку эти 12 страниц содержат в основном примеры решения задач.

Теоретический материал сводится к следующим трем фактам. Во-первых, по определению

$$\int du = u + \text{const}.$$

Во-вторых, если u является функцией v, то есть $u = U(v)$, а v — функцией x, то есть $v = V(x)$, то

$$\int u dv = \int U(v) dv \Big|_{v=V(x)}.$$

В-третьих, если u и v — функции x, то

$$duv = udv + vdu,$$

откуда по определению интеграла

$$\int udv = uv - \int vdu. \tag{1}$$

Если лектор — сторонник математического ригоризма и обозначений Лагранжа (то есть штрихов вместо дифференциалов), он может развить изложение на пару печатных страниц. Однако и в этом случае весь материал является набором из 3–4 тривиальных следствий из теорем дифференциального исчисления.

Посмотрим теперь на задачи. Вот, например № 58:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x d \ln x = x \ln x - x.$$

Из теории здесь используется формула (1) интегрирования по частям. Однако требует ли эта тривиальная формула какой-либо иллюстрации? А если нет, то какова цель тех задач, которые вроде бы ее иллюстрируют? Ответ на этот вопрос кажется очевидным: задача о вычислении интеграла представляет ценность сама по себе. Следует однако заметить, что эта задача нигде — ни в лекциях, ни в задачниках не сформулирована.

Задача 1. Дана элементарная функция y переменной x, $y = f(x)$, требуется отыскать ее первообразную в классе элементарных функций, то есть отыскать такую элементарную функцию $F(x)$, что

$$F'(x) = f(x).$$

Эта задача принадлежит компьютерной алгебре, точнее, ее большому разделу, посвященному интегрированию в символьном виде [4, 5]. Найденная верная атрибуция позволяет нам сразу отыскать потерянный теоретический материал.

3. ПЕРВЫЕ СИМВОЛЬНЫЕ ИНТЕГРАТОРЫ И НАИВНЫЙ ПОДХОД К ИНТЕГРИРОВАНИЮ В СИМВОЛЬНОМ ВИДЕ

Первый символьный интегратор — SAINT — был создан Слеглем в конце 1950-х годах в MIT [6–8]. Сколько можно понять, автор не ставил перед собой цели написания интегратора, а хотел предъявить пример, демонстрирующий возможность создания искусственного интеллекта. Сама задача об интегрировании была выбрана случайно: для примера нужно было взять всем известный тип задач, решение которых, как принято считать, требует «размышлений».

Слегль взял задачу 1 и на основе двух «методов» ее решения, предлагавшихся и предлагающихся до сих пор в курсе математического анализа — метода подстановки и метода интегрирования по частям — написал «эвристический» алгоритм решения этой задачи. Он ожидал, что ход решения можно описать в виде дерева, многие, а может быть, и все ветви которого не ведут к цели, и рассматривал вопрос о пресечении неперспективных ветвей как самый важный. Оставив в стороне вопросы, связанные с тем, в какой мере это представление соответствует мышлению, заметим, что работы 1960-х годов посвящены формализации наивных методов интегрирования и поэтому дают очень интересный с методической точки зрения материал, который до сих пор игнорируется.

Замечание 1. Рассказывая о работах Слегля, мы часто сталкиваемся с одним и тем же вопросом: где можно взять софт, разработанный Слеглем, и как его установить? Софт был написан на LISP и имел множество версий, ни одна из которых не была опубликована официально. Возобновление этого софта не представляет никакого практического интереса. Работы Слегля сейчас интересны как неудачная попытка реализации на ЭВМ советов, взятых из наших учебников по анализу.

Поясним, как в 1960-х годах виделось символьное интегрирование, несколькими примерами и посмотрим, какие полезные методические указания можно извлечь из работ Слегля.

3.1. Подстановки

Пусть дан интеграл

$$\int e^{x^2} x dx.$$

Этого интеграла нет в таблице интегралов. Пробуем его взять подставкой, для чего перебираем все подстановки вида

$$u = g(x),$$

где $g(x)$ — символьное выражение, содержащееся в символьном выражении для подынтегральной функции. В данном случае вариантов не много

$$u = x^2, \quad u = e^{x^2}.$$

Преобразуем интеграл в соответствии с этими подстановками. Идя по первой ветке, имеем

$$u = x^2$$

и

$$\int e^{x^2} x dx = \frac{1}{2} \int e^u du.$$

Этот интеграл в таблице имеется (успех). Идя по второй ветке, имеем

$$u = e^{x^2}$$

и

$$\int e^{x^2} x dx = \frac{1}{2} \int du,$$

то есть тоже успех.

Следует заметить, что Слегль заменил множество всех подстановок на конечное множество выражений, содержащихся в подынтегральном выражении. Этого правила нет в руководствах по интегральному исчислению, однако оно выполняется при решении подавляющего большинства задач. Разумеется есть исключения — интегралы, которые берутся по известному алгоритму: интегралы вида

$$\int r(\sin x, \cos x) dx, \quad r \in \mathbb{R}(u, v),$$

которые берутся при помощи универсальной тригонометрической подстановки

$$u = \tan \frac{x}{2},$$

и интегралы вида

$$\int r(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx,$$

которые берутся при помощи подстановок Эйлера.

Слегль ожидал, что на этом пути будет получаться очень много ветвей, большая часть которых не приведет к цели. Наиболее очевидно это в случае интеграла

$$\int e^{x^2} dx,$$

который, как известно, не берется в элементарных функциях [4, 5]. Применим к нему описанный выше подход. Этот интеграл не табличный. Берем его подстановкой, при этом вариант один

$$u = x^2,$$

который дает

$$\int e^u \frac{du}{\sqrt{u}}.$$

Этот интеграл — не табличный. Берем его подстановкой, но теперь вариантов уже несколько

$$v = e^u, \quad v = \sqrt{u}, \quad v = 1/\sqrt{u}.$$

Так процесс можно продолжить до исчерпания всех ресурсов.

Слегль пытался сформулировать условия, при которых подстановку следует отбросить, и в итоге сформулировал это условие так. Подсчитаем количество непостоянных множителей в подынтегральной функции до и после преобразования, если оно не уменьшилось, подстановку делать не нужно.

Замечание 2. Здесь и далее будем считать, что x^n дает n множителей.

Замечание 3. Под постоянным множителем подразумевается символьное выражение, которое при всех рассматриваемых значениях x принимает одно и то же значение. Это определение, естественное для курса анализа, к сожалению, не является конструктивным, поскольку мы не можем перебрать все рассматриваемые значения x. Поэтому на практике мы должны упростить выражение для того, чтобы убедиться в его постоянстве, например применить основное тригонометрическое тождество, чтобы убедится в постоянстве выражения

$$\sin^2 x + \cos^2 x.$$

Хотя в настоящее время функция simplify реализована во всех системах компьютерной алгебры общего назначения, в нашем распоряжении нет алгоритма позволяющего гарантированно решить, является ли символьное выражение константой или нет [5]. Обычно функция simplify в состоянии упростить выражения по всем известным тригонометрическим формулам, однако она не справляется с выражениями типа формулы Эйлера

$$\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

и ее обобщений, используемых для вычисления числа π [**?**]. Например, система Maxima [9] и использующая ее система Sage не способны опознать в выражении

$$\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} - \frac{\pi}{4}$$

нуль, а, следовательно, в выражении

$$x\left(\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}\right)-\frac{x\pi}{4}$$

константу.

Посмотрим с этой точки зрения на рассмотренные примеры. У подынтегральной функции в интеграле

$$\int e^{x^2}x\,dx$$

два множителя. Перебирая выражения, содержащиеся в подынтегральной функции, мы имеем две подстановки

$$u=x^2,\quad u=e^{x^2}.$$

Идя по первой ветке, имеем

$$u=x^2$$

и

$$\int e^{x^2}x\,dx=\frac{1}{2}\int e^u\,du.$$

Таким образом, остается 1 непостоянный множитель. Идя по второй ветке, имеем

$$u=e^{x^2}$$

и

$$\int e^{x^2}x\,dx=\frac{1}{2}\int du,$$

то есть 0 непостоянных множителей. Критерий Слегля, следовательно, не забраковал удачные подстановки.

Подынтегральная функция в интеграле

$$\int e^{x^2}dx$$

имеет 1 множитель. Замена

$$u=x^2,$$

дает интеграл

$$\int e^u\frac{du}{\sqrt{u}},$$

под которым стоят два непостоянных множителя. По критерию Слегля, такую подстановку следует отбросить.

Таким образом, метод подстановки пополнился у Слегля

— указанием, что подстановки следует искать как составные части выражения для подынтегральной функции,
— критерием выбраковки подстановок: число непостоянных множителей в подынтегральном выражении должно уменьшиться после подстановки.

На самом деле, эти добавки очень полезны и при вычислении интегралов на бумаге, поскольку заменяют абсолютно бессмысленное предложение угадать подстановку, которое фактически присутствует сейчас не только в задачниках, но и в так называемых«решебниках».

3.2. Интегрирование по частям

Обратимся теперь ко второму элементарному методу — интегрированию по частям. Рассмотрим интеграл

$$\int e^x x^2 dx.$$

Этого интеграла в таблице нет. Пытаемся взять его по методу подстановки. У нас имеется три варианта

$$u = e^x, \quad u = x^2, \quad u = e^x x.$$

Идя по первой ветке, имеем

$$\int \ln^2 u du. \tag{2}$$

Этого интеграла в таблице нет, поэтому опять пытаемся взять его по методу подстановки. У нас один вариант

$$v = \ln u,$$

который приводит нас к интегралу

$$\int v^2 e^v dv, \tag{3}$$

то есть дальше процесс зацикливается. Сформулированное выше условие Слегля позволяет остановить этот процесс, поскольку при переходе от интеграла (2) к интегралу (3) мы должны увеличить число непостоянных множителей. Таким образом, потратив довольно много сил, особенно, с учетом перебора всех веток, мы придем к тому, что метод подстановки в данном случае неприменим, и перейдем к методу интегрирования по частям.

Это метод подразумевает, что подынтегральную функцию можно разбить на множители

$$f = uw.$$

Разумеется, если такое разбиение можно выполнить несколькими способами (порядок следования множителей важен), то придется рассматривать несколько ветвей, по ветви на каждое разбиение.

В данном случае возможно несколько вариантов. Один из них ведет к цели, однако приводит к ней не сразу, другие — нет. В самом деле, приняв

$$u = x^2, \quad w = e^x,$$

мы найдем по таблице

$$v = \int w dx = \int e^x dx = e^x,$$

и поэтому

$$\int x^2 e^x dx = \int x^2 de^x = x^2 e^x - 2\int e^x x dx.$$

Выбрав далее из двух возможностей разбиения xe^x на множители вариант

$$u = x, \quad w = e^x,$$

получим

$$\int e^x x dx = \int x de^x = xe^x - \int e^x = xe^x - e^x,$$

что дает решение задачи.

Понятно, что здесь важно сформулировать критерий отбраковки ветвей, дабы можно было применить интегрирование по частям несколько раз, без необходимости перебора огромного числа ветвей.

Слегль сформулировал это условие так. Следует использовать только такие разбиения подынтегральной функции на множители $f = uw$, у которых интеграл

$$v = \int w\,dx$$

берется по таблице интегралов.

Замечание 4. Чтобы брались интегралы вида

$$\int \ln x\,dx$$

следует особо оговорить случай, когда последнее действие в подынтегральной функции — обратная операция (ln, arcsin, arccos, arctan). В этом случае всегда применяется формула

$$\int f\,dx = xf - \int x\,df.$$

В нашем примере возможны такие разбиения

$$u = x^2,\ w = e^x, \quad \text{или} \quad u = x,\ w = xe^x, \quad \text{или} \quad u = e^x,\ w = x^2.$$

Второй вариант

$$w = xe^x$$

можно сразу забраковать, поскольку этой функции нет в таблице интегралов. К сожалению, вариант $w = x^2$ остается, и получается вторая ветвь, которая потребляет ресурсы.

Этот критерий Слегля существенно зависит от выбора таблицы интегралов. В учебной литературе никогда не объясняют, почему интеграл

$$\int \ln x\,dx$$

не попал в таблицу интегралов. Теперь же понятно, что его отсутствие позволяет по критерию Слегля избавиться от целого ряда лишних ветвей.

Например, для вычисления

$$\int x \ln x\,dx$$

мы имеем два варианта

$$u = x,\ w = \ln x, \quad \text{или} \quad u = \ln x,\ w = x,$$

однако первый следует отбросить, поскольку интеграла

$$v = \int \ln x\,dx$$

нет в таблице. Второй вариант сразу ведет к цели:

$$\int x \ln x\,dx = 1/2 \int \ln x\,dx^2 = 1/2x^2 \ln x - 1/2 \int x^2\,d\ln x = 1/2x^2 \ln x - 1/2 \int x\,dx.$$

Критерии Слегля неплохо сочетаются друг с другом. Например, требуется вычислить

$$\int x^3 e^{x^2}\,dx.$$

Интеграла нет в таблице. Пытаемся взять его подстановкой. Вариант

$$u = x^2$$

приводит к интегралу

$$\frac{1}{2}\int u e^u\,du$$

Вместо трех множителей получилось два, поэтому по критерию Слегля такую подстановку следует сделать. Подстановка

$$v = e^u$$

сводит интеграл к

$$\frac{1}{2}\int \ln v\,dv,$$

в котором еще меньше непостоянных множителей. Дальнейшие подстановки не уменьшают число множителей и, следовательно, можно перейти к интегрированию по частям. Поскольку последнее действие — обратная операция, мы имеем

$$\frac{1}{2}\int \ln v\,dv = \frac{v\ln v}{2} - \frac{1}{2}\int v\,d\ln v = \frac{v\ln v}{2} - \frac{v}{2}.$$

Возвращаясь обратно, имеем

$$\int x^3 e^{x^2}\,dx = \frac{e^{x^2}\ln e^{x^2} - e^{x^2}}{2} = \frac{x^2-1}{2}e^{x^2}$$

Человек, конечно, решит эту задачу проще, поскольку заметит бесполезность замены

$$v = e^u$$

и проинтегрирует выражение

$$\frac{1}{2}\int u e^u\,du$$

по частям сразу. Однако важно подчеркнуть, что критерии Слегля справляются с такого рода примерами.

Таким образом, изыскания Слегля [6, 7] позволяют существенно дополнить изложение наивных методов интегрирования критериями, позволяющими выбирать подстановки и разбиение на множители при интегрировании по частям. Фактически они позволяют описать эти методы как алгоритмы, пригодные для реализации на ЭВМ.

Это не только существенно упрощает решение задач, снабдив студентов алгоритмом их решения, но и объясняет те трудности, которые возникают при их решении: первокурсники в этом месте курса математического анализа впервые сталкиваются с задачами, алгоритм решения которой нельзя записать в виде формулы, но можно описать в виде довольно сложной инструкции. Это обстоятельство никак не выделяется, между тем скачок здесь делается весьма значительный.

Замечание 5. На самом деле, этот скачок можно делать в два этапа, если на первом этапе аккуратно описать алгоритм дифференцирования элементарных функций, который тоже не описывается формулой, но легко формализуем [9].

4. НАИВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ И СОВРЕМЕННЫЕ CAS

Первые успехи убедили коллег Слегля в том, что символьный интегратор сможет стать востребованной программой, поэтому вскоре Дж. Мозес взялся за доработку не столько кода, сколько идей Слегля. Были проведены тесты на многочисленных примерах, взятых из учебной литературы, с целью оптимизации критериев Слегля. Итог оказался достаточно неожиданным.

Во-первых, реализация метода подстановки вообще не нужна, а сам метод, при любой возможной формулировке критериев выполнения подстановки, приводит к огромному числу лишних ветвей или даже пучка ветвей, из которых одна ветвь не лучше другой. Оказалось, что вполне достаточно опознавать выражения вида

$$f(u)du,$$

где f — одна из операций, входящих в таблицу интегралов. Таким образом, применение таблицы было расширено достаточным образом, чтобы не вспоминать о методе подстановок.

Замечание 6. Любопытно, что в американской учебной литературе эта идея возникала еще в начале XX века в учебниках Осборна [10]. Там все формулы таблицы интегралов сразу записывались относительно произвольной функции u переменной x, а про подстановки речь заходила лишь при интегрировании сложных выражений, например при обсуждении подстановок Эйлера.

Во-вторых, метод интегрирования по частям не допускает формализации, которая позволяла бы брать популярные интегралы и в то же время не приводила бы к бесконечным циклам. Именно на этом этапе, то есть когда первый интегратор уже работал, Мозес познакомился с идеями Лиувилля по интегрированию в элементарных функциях. Дальнейшие работы по созданию символьного интегратора пошли по пути реализации именно этих идей [4, 5], таким образом, элементарные методы интегрирования как методы решения задачи 1 следует считать устаревшими.

Фактически в настоящий момент разработчики коммерческих систем компьютерной алгебры вынуждены писать два интегратора: один берет интеграл по методам, восходящим к работам Лиувилля, второй берет интеграл по ходам и ориентирован на главного заказчика таких систем — студентов.

Оставим сейчас в стороне вопросы разработки систем компьютерной алгебры и попробуем понять методическое значение этих результатов для обучения студентов.

Прежде всего, оба метода интегрирования, которые предлагаются студентам-первокурсникам, не могут быть превращены в алгоритм решения задачи 1. Поэтому вычисление интегралов в элементарных функциях для студентов-первокурсников является не столько наукой, сколько искусством. Само по себе это и не плохо, и не хорошо. Вполне допустимо, чтобы в курсе математики имелись творческие задачи. Недопустимо скрывать это обстоятельство, равно как и то, что эти задачи допускают решение, основанное на совершенно иных соображениях.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы начали эту статью с констатации того вполне очевидного факта, что тема «Неопределенный интеграл» содержит очень много задач и очень мало теории. Затем мы сформулировали в общем виде задачу, которую пытаются решать на конкретных примерах в этой теме, и естественным образом обнаружили, что вся тема относится к разделу компьютерной алгебры, трактующему об интегрировании в элементарных функциях.

Далее, опираясь на эту атрибуцию темы, мы отыскали весьма ценный в методическом отношении материал в старых книгах по символьному интегрированию Слегля и Мозеса. Мы полагаем, что, опираясь на идеи Слегля, можно существенно дополнить изложение вопросов о выборе подстановки и разбиения на множители при интегрировании по частям. Это позволит студенту заменить процедуру угадывания на следование некоторому набору советов, которые, к сожалению, не всегда ведут к цели и часто дают несколько возможных направлений для решения задачи (эвристический алгоритм). Иными словами, книги Слегля и Мозеса дают ценнейший дополнительный материал, инкорпорация которого в курс анализа не требует каких-либо существенных перемен в содержании самого курса.

Однако, взглянув на обсуждаемую тему с современных позиций, мы отметили, что современные методы решения задачи об интегрировании в элементарных функциях существенно отличаются от наивных методов, изучаемых на первом курсе.

Мы весьма далеки от мысли, что на этом основании нужно полностью отказаться от изложения наивных методов и даже вносить какие-либо существенные коррективы в курс анализа. Напротив, мы хотим закончить эту статью несколькими вопросами, к которым, на наш взгляд, подводят вскрытые обстоятельства и к обсуждению которых мы намерены вернуться в самое ближайшее время.

Во-первых, действительно ли нужно учить студентов-первокурсников элементам интегрирования в символьном виде? Мы видели, что этой теме уделяется непропорционально много места на семинарах и что ее вполне можно дополнить теорией, почерпнутой из области компьютерной алгебры. Но нельзя не заметить и опасности в уводе студентов в сторону от основных вопросов математического анализа. В современной американской учебной литературе, например у Стренга [11], вопросы вычисления интегралов в символьном виде уже существенно потеснили вопросы о численном вычислении интегралов.

Во-вторых, каково вообще место символьных манипуляций в курсе математики? Глядя на школьный курс алгебры, нельзя не заметить, что там во главу угла ставят получение ответа в виде формулы, то есть занимаются символьными манипуляциями. В то же время на старших курсах университетов все больше внимания уделяют численным методам. Это делает неизбежным перекос на младших курсах в сторону компьютерной алгебры, причем, как мы видели на примере темы «Неопределенный интеграл», очень часто излагаются устаревшие методы.

В-третьих, можно ли изложить идеи, лежащие в основе современных символьных интеграторов, способом, пригодным для обучения студентов-первокурсников? Этот вопрос вовсе не так прост, как кажется. Современные изложения этого вопроса, в том числе и популярные, подразумевают знакомство читателя с теорией Галуа, а эта тема выходит за рамки университетского курса. С другой стороны, Абель, Лиувилль и Остроградский излагали свои идеи об интегрировании в элементарных функциях еще до создания дифференциальной теории Галуа. Это позволяет надеяться на то, что некоторые идеи допускают элементарное изложение.

Благодарности. Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН «5-100».

Список литературы

1. *Stein W. A. et al.* Sage Mathematics Software (Version 7.3). The Sage Development Team, 2016. URL: http://www.sagemath.org (дата обращения: 07.12.2019).
2. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. Ч. 1. М.: Физматлит, 2005. 648 с.
3. *Бутузов В.Ф., Крутицкая Н. Ч., Медведев Г. Н., Шишкин А. А.* Математический анализ в вопросах и задачах. 4-е изд., исправ. М.: Физматлит, 2001. 480 с.
4. *Bronstein M.* Symbolic Integration I. Transcendental Functions. Springer, 2005.
5. *Павлов Д. А.* Символьное интегрирование // Компьютерные инструменты в образовании. 2010. № 2. С. 38–43.
6. *Slagle J. R.* A heuristic program that solves symbolic integration problems in freshman calculus, symbolic automatic integrator SAINT. Massachusetts Institute of Technology, 1961.
7. *Moses J.* Symbolic integration. Massachusetts Institute of Technology, 1967.
8. *Moses J.* Symbolic Integration: The Stormy Decade // Proc. of the 2nd ACM symposium on Symbolic and algebraic manipulation. Los Angeles, CA, March 23–25 1971. P. 427–440. doi: 10.1145/800204.806313
9. *Тарнавский Т.* Пишем свой `diff()` // Linux Format. 2006. Vol. 86. № 12. С. 96–99.
10. *Osborne G. A.* An elimentary treatise on the differential and integral calculus, with examples and applications. D. C. Heath & co., 1903.
11. *Strang G.* Calculus Online Textbook. MIT, 2005. URL: https://ocw.mit.edu/resources/res-18-001-calculus-online-textbook-spring-2005(дата обращения: 07.12.2019).

Поступила в редакцию 31.08.2019, окончательный вариант — 07.12.2019.

Малых Михаил Дмитриевич, доктор физико-математических наук, доцент кафедры ПИ и ТВ РУДН, ✉ malykh_md@pfur.ru

Севастьянов Антон Леонидович, кандидат физико-математических наук, доцент, директор Института повышения квалификации и переподготовки кадров РУДН, sevastianov_al@pfur.ru

Севастьянов Леонид Антонович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры ПИ и ТВ РУДН, sevastianov_la@pfur.ru

Computer tools in education, 2019
№ 4: 94–106
http://cte.eltech.ru
doi:10.32603/2071-2340-2019-4-94-106

About Symbolic Integration in the Course of Mathematical Analysis

Malykh M. D. [1], PhD, ✉ malykh_md@pfur.ru
Sevastianov A. L.[1], PhD, associate professor, sevastianov_al@pfur.ru
Sevastianov L. A.[1], PhD, full professor, sevastianov_la@pfur.ru

[1]Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6, Miklukho-Maklaya str., 117198, Moscow, Russia

Abstract

The work of transforming a database from one format periodically appears in different organizations for various reasons. Today, the mechanism for changing the format of relational databases is well developed. But with the advent of new types of databases, such as NoSQL, this problem was exacerbated due to the radical difference in the way data was organized. This article discusses a formalized method based on set theory, at the choice of the number and composition of collections for a key-value type database. The initial data are the properties of the objects, information about which is stored in the database, and the set of queries that are most frequently executed or the speed of which should be maximized. The considered method can be applied not only when creating a new key-value database, but also when transforming an existing one, when moving from relational databases to NoSQL, when consolidating databases.

Keywords: *mathematical analysis, teaching methods, computer algebra, elementary functions.*

Citation: M. D. Malykh, A. L. Sevastianov, and L. A. Sevastianov, "About Symbolic Integration in the Course of Mathematical Analysis," *Computer tools in education*, no. 4, pp. 94–106, 2019 (in Russian); doi: 10.32603/2071-2340-2019-4-94–106

References

1. W. A. Stein et al., Sage Mathematics Software (Version 7.3), The Sage Development Team, 2016. [Online]. http://www.sagemath.org (дата обращения: 07.12.2019).
2. V. A. Ilyin and Je. G. Poznjak, *Osnovy matematicheskogo analiza* [Fundamentals of Mathematical Analysis], Ch. 1, 7th ed., Moscow: Fizmatlit, 2005 (in Russian).
3. V. F. Butuzov et al., *Matematicheskij analiz v voprosah i zadachah* [Mathematical analysis in questions and tasks], 4th ed., Mocscow: Fizmatlit, 2001 (in Russian).
4. M. Bronstein, *Symbolic Integration I. Transcendental Functions*, Springer, 2005.
5. D. A. Pavlov, "Simvol'noe integrirovanie" [Symbolic Integration], *Computer tools in education*, no. 2, pp. 38–43, 2010 (in Russian).
6. J. R. Slagle, *A heuristic program that solves symbolic integration problems in freshman calculus, symbolic automatic integrator SAINT*, Massachusetts Institute of Technology, 1961.
7. J. Moses, *Symbolic integration*, Massachusetts Institute of Technology, 1967.
8. J. Moses, "Symbolic Integration: The Stormy Decade," in *Proc. of the 2nd ACM symposium on Symbolic and algebraic manipulation*, Los Angeles, CA, March 23–25 1971, pp. 427–440; doi: 10.1145/800204.806313
9. T. Tarnavskij, "Pishem svoj `diff()`" [Writing your `diff()`], *Linux Format*, vol. 86, no. 12, pp. 96–99, 2006.
10. G. A. Osborne, *An elimentary treatise on the differential and integral calculus, with examples and applications* D. C. Heath & co., 1903.
11. G. Strang, Calculus Online Textbook, MIT, 2005, [Online], Available: https://ocw.mit.edu/resources/res-18-001-calculus-online-textbook-spring-2005 (дата обращения: 07.12.2019).

Received 31.08.2018, the final version — 07.12.2019.

Mikhail D. Malykh, PhD, associate professor, Department of Applied Probability and Informatics, RUDN University, ✉ malykh_md@pfur.ru

Anton L. Sevastianov, PhD, director of the Institute of Advanced Training and Retraining, RUDN University, sevastianov_al@pfur.ru

Leonid A. Sevastianov, PhD, full professor, Department of Applied Probability and Informatics, RUDN University, sevastianov_la@pfur.ru