

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ САМООРГАНИЗАЦИИ. СТРУКТУРЫ В ОДНОМЕРНОЙ ЦЕПОЧКЕ СТАЛКИВАЮЩИХСЯ ШАРОВ

Денисевич А. А., Ляпцев А. В.

Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена, Санкт-Петербург, Россия

Аннотация

Рассматриваются простейшие компьютерные учебные модели, демонстрирующие свойства систем, способных к самоорганизации. Модели представляют собой цепочку шаров,двигающихся поступательно вдоль одной прямой. Предполагается, что при столкновении шаров действуют силы неупругой деформации, что обеспечивает диссипацию энергии. Восполнение энергии обеспечивается при столкновении со стенками, сообщающими шарам дополнительную энергию. Исследование модели в учебном процессе позволяет продемонстрировать такие свойства, как бифуркации при изменении управляющего параметра и гистерезис. Математическая простота моделей позволяет использовать их в процессе обучения, поскольку требует от обучаемых минимальных навыков программирования.

Ключевые слова: процессы самоорганизации, математическая модель, неупругие столкновения, компьютерное моделирование.

Цитирование: Денисевич А. А., Ляпцев А. В. Компьютерное моделирование процессов самоорганизации. Структуры в одномерной цепочке сталкивающихся шаров // Компьютерные инструменты в образовании. 2018. № 4. С. 27–34. doi:10.32603/2071-2340-4-27-34

Метод математического моделирования является в настоящее время одним из универсальных методов познания, на основе которого, например, получены основные сведения о строении и свойствах Вселенной. Изучение метода математического моделирования входит в образовательные программы многих вузов. Большое значение имеют практические занятия, на которых учащиеся осваивают основные средства и методы математического моделирования, в частности методы компьютерного моделирования. Чтобы такое освоение шло достаточно успешно, задачи, предлагаемые на практических занятиях, должны быть, с одной стороны, доступными для студентов, обладающих знаниями на уровне школьной информатики, а с другой стороны, достаточно интересными с непредсказуемым заранее результатом. Желательно, чтобы при решении подобных задач была видна роль компьютера как необходимого инструмента, без которого получение соответствующего решения оказывается невозможным.

Одним из направлений успешного применения компьютерного моделирования является исследование процессов в системах, описываемых нелинейными уравнениями. В частности, к подобного рода задачам относятся модели, используемые в синергетике

и связанные с изучением образования упорядоченных временных и пространственных структур в системах различной природы (см., например, [1]). При решении подобных задач аналитические методы исследований предоставляют некоторый анализ, указывающий направления, в которых можно искать решения, а конкретный результат, дающий новые качественные особенности, возможен лишь методами компьютерного моделирования.

К сожалению, круг моделей, описывающих процессы самоорганизации и доступный для использования в учебном процессе, весьма ограничен. Некоторые из таких моделей, не требующие для решения углубленных знаний в области динамики нелинейных систем, мы успешно используем в учебном процессе. Эти модели были изложены ранее в статьях, в частности, опубликованных в журнале «Компьютерные инструменты в образовании» [2–4]. Ниже мы предлагаем еще одну подобную модель, для которой средствами, доступными для студентов, осваивающих курс математического моделирования, могут быть получены интересные результаты.

Напомним основные свойства систем, способных к самоорганизации. Такие системы должны быть открытыми, то есть способными обмениваться с окружением, по крайней мере, энергией. Системы должны быть нелинейными, то есть их эволюция во времени должна описываться нелинейными уравнениями. Такие системы должны быть диссипативными. В частности, для механических систем диссипация означает возможность перехода энергии макроскопического движения во внутреннюю энергию, то есть в энергию неупорядоченного движения частиц, образующих макроскопические тела. В реальных механических системах диссипация возникает в результате действия неконсервативных сил, таких, например, как силы трения или силы неупругой деформации. В рассмотренных нами ранее моделях [2, 3] диссипация возникала как следствие сил трения при движении тел. Здесь мы предлагаем еще одну модель, в которой диссипация возникает вследствие сил неупругой деформации, действующей при столкновении тел.

Рассмотрим цепочку из шаров, способных двигаться поступательно лишь вдоль одной оси, сталкиваясь между собой и с ограничивающими движение стенками (рис. 1) и двигаясь с постоянными скоростями между столкновениями.

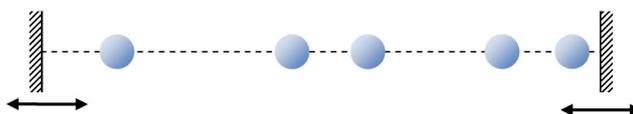


Рис. 1

Близкую к данной модели натурную модель можно реализовать, подвесив шары на длинных нитях. Заметим, что при упругих столкновениях шаров они просто обмениваются скоростями, что легко показать, используя законы сохранения энергии и импульса. То есть при столкновении i -го и j -го шаров их скорости до и после столкновений связаны соотношениями:

$$v'_i = -v_j, \quad v'_j = -v_i. \quad (1)$$

Поскольку движение одномерное в этой и последующих формулах рассматриваются проекции скоростей на ось, вдоль которой происходит движение.

Наличие сил неупругой деформации приводит к тому, что кинетическая энергия шаров после столкновения становится меньше, чем до столкновения. Учет потери энер-

гии при неупругом столкновении феноменологически был предложен еще Ньютоном и описывается как уменьшение относительной скорости после столкновения (см., например, [5]):

$$|v'_i - v'_j| = e|v_i - v_j|. \quad (2)$$

Коэффициент e называется коэффициентом восстановления относительной скорости после удара. При $e = 1$ столкновение является упругим. Для реальных систем e всегда меньше единицы. Ньютон опытным путем нашел $e = 15/16$ для стекла и $e = 5/9$ для железа. Далее вместо коэффициента e мы будем использовать характеризующий диссипацию коэффициент $\gamma = 1 - e$, обращающийся в ноль при отсутствии диссипации (упругие соударения). Заметим, что диссипация увеличивается не только с увеличением параметра γ , но и с увеличением числа столкновений, которое, в свою очередь, увеличивается с числом шаров в цепочке.

Чтобы получить соотношения между скоростями, аналогичными соотношениям (1), удобно перейти в систему отсчета центра масс сталкивающихся шаров, в которой скорости определяются формулой:

$$u_i = v_i - \frac{v_j + v_i}{2}. \quad (3)$$

В этой системе отсчета с учетом формулы (2) скорости шаров до и после столкновения связаны соотношениями:

$$u'_i = -(1 - \gamma)u_i.$$

Переходя обратно в лабораторную систему отсчета при помощи формулы (3), получим соотношения:

$$v'_i = v_j + \frac{\gamma}{2}(v_i - v_j), \quad v'_j = v_i + \frac{\gamma}{2}(v_j + v_i). \quad (4)$$

переходящие в (1) при $\gamma \rightarrow 0$.

Достаточно очевидно, что, вследствие потерь механической энергии при столкновениях без восполнения энергии при столкновении со стенками, скорости шаров будут замедляться и, в конце концов, обратятся в ноль. Чтобы этого не произошло, будем считать, что при каждом ударе стенка подталкивает шар подобно, например, теннисной ракетке, передавая ему энергию. Столкновение со стенкой будем рассматривать подобно упругому столкновению шара с телом, намного большей массы. Пусть стенка движется со скоростью w , а налетающий на неё шар со скоростью v_1 (крайний левый шар). Наиболее просто столкновение описывается в системе отсчета, связанной со стенкой, в которой скорость шара равна: $u_1 = v_1 - w$. Поскольку стенка имеет массу, существенно превосходящую массу шара, налетающий на неподвижную стенку шар, упруго отражаясь, изменяет скорость на противоположную по направлению и равную по модулю: $u'_1 = -u_1$. Переходя обратно в лабораторную систему отсчета, получим:

$$v'_1 = 2w - v_1. \quad (5)$$

Аналогичное соотношение будет иметь место для крайнего правого шара.

Сформулированная таким образом модель содержит два безразмерных параметра (γ и число шаров N) и три размерных параметра (модуль скорости стенки w , диаметр шара d и размер области движения L). Выбором масштаба можно обратить параметры w и L в единицы. Удобно также ввести безразмерный параметр:

$$k = \frac{L}{Nd}, \quad (6)$$

который по смыслу модели больше единицы и характеризует степень разреженности системы, то есть размер допустимой области движения к области, занимаемой шарами. Таким образом, модель содержит три безразмерных параметра γ , N и k .

Реализация модели состоит в начальном задании положений и скоростей шаров и последующем вычислении их движения в соответствии с приведенными выше формулами. Первоначальное состояние задается случайным образом, то есть положения задаются так, чтобы шары не соприкасались, а скорости — случайными числами, лежащими в диапазоне от -1 до 1 . Дальнейший расчет проводится вначале на интервале времени, ограниченном некоторым параметром T , причем в качестве максимального значения времени t_{max} удобно брать момент предшествующего моменту T столкновения. Состояние системы в момент t_{max} является начальным для расчета на следующем временном интервале $[t_{max}, t_{max} + T]$ и т. д. Как показывает расчет, после нескольких таких шагов при определенной совокупности параметров движение становится периодическим, несмотря на то, что в самой модели периодичность изначально не заложена.

На рис. 1 приведены результаты расчета координат шаров в зависимости от времени при параметрах $\gamma = 0,0625$ (стеклянные шары), $k = 10$ и $N = 3$. Рис. 2а соответствует начальному интервалу времени $[0; 0,5]$, рис. 2б — интервалу приблизительно в диапазоне от 31 до 31,5. Как видно из расчета, картина движения становится периодической и симметричной. При этом двигаются, в основном, крайние шары, а средний шар становится «промежуточной стенкой».

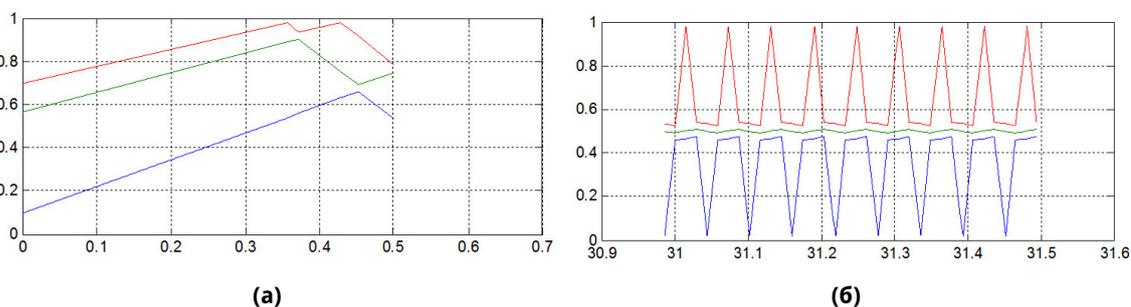


Рис. 2

Аналогичные результаты могут возникать и при другом наборе параметров. На рис. 3 приведены расчеты для 15 шаров при значении $\gamma = 0,0625$ и $k = 2$.

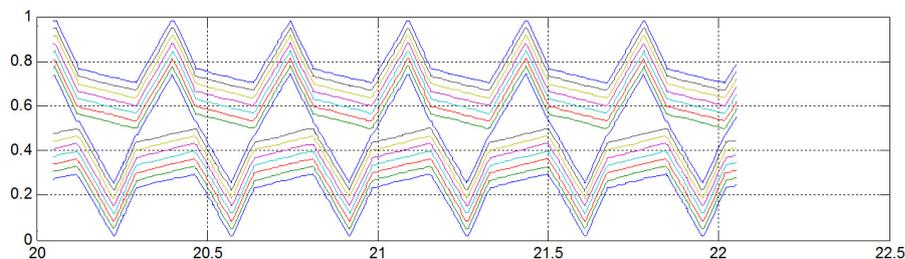


Рис. 3

Вычислительный эксперимент показывает, что в некоторых случаях установившимся состоянием является состояние, когда шары останавливаются в некоторых положениях. Отметим также, что время установления периодического движения тем меньше, чем больше параметр γ , то есть чем больше диссипация.

Предложенную выше модель можно несколько усложнить, рассмотрев движение вертикальной цепочки сталкивающихся шаров в однородном поле тяжести (рис. 4). В этом случае между столкновениями шары двигаются с постоянным ускорением. Изменение скоростей при столкновениях происходит так же, как и в предыдущей модели. Восполнение энергии происходит только при столкновении с нижней стенкой, а верхняя стенка только упруго отражает самый верхний шар.

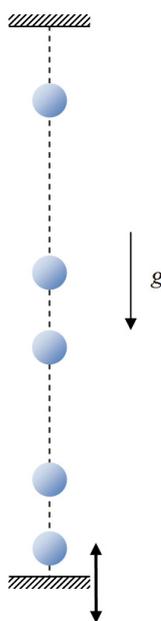


Рис. 4

Число размерных параметров, по сравнению с предыдущей моделью, увеличивается. К параметрам с размерностью длины, а именно: L — высота области движения, d — диаметр шаров и w — модуль скорости нижней стенки — добавляется ускорение, которое по смыслу модели есть ускорение свободного падения g . Как и в предыдущей модели, масштабным преобразованием длины можно параметр L обратить в единицу и ввести безразмерный параметр k при помощи выражения (6). Затем преобразованием масштаба времени удобно обратить параметр ускорения свободного падения g также в единицу. В результате таких преобразований параметр скорости стенки становится безразмерным варьируемым параметром. Однако для численного эксперимента удобно ввести другой безразмерный параметр, пропорциональный квадрату w , а именно:

$$\lambda = \frac{w^2}{2gL},$$

Физический смысл параметра следующий. Величина $H_{max} = \frac{w^2}{2g}$ есть максимальная высота подъема тела, которому на нулевом уровне сообщают скорость w . Параметр λ , таким образом, есть отношение $\frac{H_{max}}{L}$. Разумно предположить, что при малом λ шары

при движении не будут касаться верхней стенки (потолка). Наоборот, при большом λ потолок будет ограничивать движение шаров.

Как и в предыдущей модели, наблюдается установление периодических движений по истечении некоторого времени. На рис. 5 приведены графики координат шаров в зависимости от времени при расчете со следующими параметрами: $\gamma = 0,3, k = 2, \lambda = 0,13$ при задании случайных начальных условий. Как видно из графиков на рис. 5а, на начальном интервале времени $[0, 10]$ движение имеет хаотический характер. На интервале $[50, 60]$ оно становится периодическим (рис. 5б). Следует отметить, что наблюдать установление периодических движений наглядней не по графикам зависимости координат от времени, а по графикам фазовых диаграмм, на которых по горизонтальной оси выводится координата шара, а по вертикальной оси его скорость.

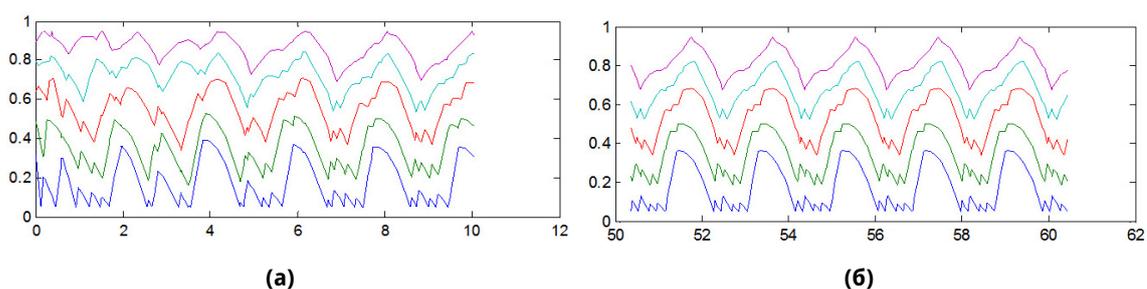


Рис. 5

Наличие еще одного параметра приводит к появлению дополнительных, характерных для нелинейных систем особенностей, связанных с медленным (адиабатическим) изменением одного из параметров, который называют параметром порядка. В данной модели таким параметром является параметр λ . При адиабатическом повышении или понижении этого параметра происходит срыв периодического движения с возникновением движения, которое не устанавливается по истечении сколь угодно длительного времени, и которое для краткости называют хаосом. При последующем увеличении параметра периодическое движение может вновь установиться, но уже с качественно иным характером.

В качестве примера на рис. 6 приведены результаты расчета при значениях параметров $\gamma = 0,3, k = 2$. При малом значении параметра $\lambda = 0,2$ устанавливается периодическое движение, изображенное на рис. 6а.

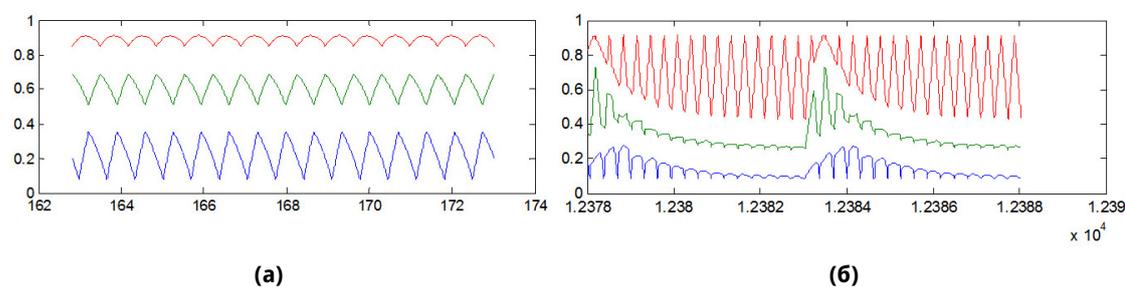


Рис. 6

Как видно из графиков, движение верхнего шара таково, что зависимость координаты от времени имеет вид повторяющихся кусков параболы, таким образом, верхний шар при движении не сталкивается с потолком. При адиабатическом увеличении параметра

λ происходит срыв, и движение становится хаотическим, при этом верхний шар нерегулярно ударяется о потолок. Движение остается хаотическим вплоть до значения параметра $\lambda = 0,7$. Однако характер установившегося периодического движения изменяется по сравнению с тем, что имело место при $\lambda = 0,2$. Верхний шар практически через одинаковые промежутки времени ударяется о потолок. Аналогичный срыв происходит при уменьшении параметра λ от значения $\lambda = 0,7$. При этом периодическое движение устанавливается лишь при значении параметра $\lambda = 0,02$. Подобное характерное для нелинейных систем свойство — различие критических значений управляющего параметра, при которых имеет место переход между регулярным и хаотическим движением в случаях увеличения и уменьшения параметра, называется гистерезисом.

Мы привели лишь некоторые примеры проявления свойств, характерных для нелинейных систем, реализуемых в данных моделях. Численный эксперимент, иллюстрирующий особенности нелинейных систем для данных моделей, вполне доступен для студентов в той или иной степени владеющих основами программирования. Отметим также, что простота модели дает возможность легко осуществить визуализацию соответствующего процесса, для чего удобно использовать различные вычислительные среды, например Matlab.

Список литературы

1. Безрученко Б. П., Короновский А. А., Трубецков Д. И., Храмов А. Е. Путь в синергетику: Экскурс в десяти лекциях. М.: Ленанд, 2015.
2. Денисевич А. А., Ляпцев А. В. Игры на «теплых бильярдах». Наглядная демонстрация понятий, характеризующих нелинейные системы: аттракторы, бифуркации, гистерезис // Компьютерные инструменты в образовании. 2014. № 5. С. 42–49.
3. Денисевич А. А., Ляпцев А. В. Простейшая модель для демонстрации образования пространственных структур при изучении процессов самоорганизации // Компьютерные инструменты в образовании. 2014. № 1. С. 36–43.
4. Денисевич А. А., Ляпцев А. В. Компьютерное моделирование процессов самоорганизации. Аналогия с ячейками Бенара // Компьютерные инструменты в образовании. 2017. № 1. С. 38–44.
5. Стрелков С. П. Механика. М.: Наука, 1975.

Поступила в редакцию 27.06.2018, окончательный вариант — 02.08.2018.

Computer tools in education, 2018

№ 4: 27–34

<http://ipo.spb.ru/journal>

doi:10.32603/2071-2340-4-27-34

COMPUTER SIMULATION OF SELF-ORGANIZATION PROCESSES. STRUCTURES IN A ONE-DIMENSIONAL CHAIN OF COLLIDING BALLS

Denisevich A. A.¹, Liapzev A. V.¹

¹SPbSU, Saint-Petersburg, Russia

Abstract

In this paper we consider the simplest computer educational models that demonstrate the properties of systems capable of self-organization. The models are a chain of balls

moving progressively along a straight line. It is assumed that in the collision of the balls act inelastic deformation forces, which ensures energy dissipation. Energy replenishment is provided by colliding with the walls, which impart additional energy to the balls. The study of the model in the educational process allows us to demonstrate such properties as bifurcations by changing the control parameter and hysteresis. The mathematical simplicity of the models allows them to be used in the learning process, since they require minimal programming skills from the students.

Keywords: *processes of self-organization, mathematical model, inelastic collisions, computational simulation.*

Citation: A. A. Denisevich, A. V. Liapzev, "Computer Simulation of Self-organization Processes. Structures in a One-dimensional Chain of Colliding Balls", *Computer tools in education*, no. 4, pp. 27–34, 2018 (in Russian). doi:10.32603/2071-2340-4-27-34

Received 27.06.2018, the final version — 02.08.2018.

Alexandra A. Denisevich, postgraduate student the Herzen State Pedagogical University of Russia, Sashamy_one@mail.ru

Alexander V. Liapzev, doctor of physico-mathematical Sciences, professor, head of the Department of methods of teaching physics, the Herzen State Pedagogical University of Russia; 191186, Saint-Petersburg, Moika river Embankment 48, upm_eno@mail.ru

© Наши авторы, 2018.
Our authors, 2018.

**Денисевич Александра Алексеевна,
аспирантка РГПУ им. А. И. Герцена,
Sashamy_one@mail.ru**

**Ляпцев Александр Викторович,
доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
методики обучения физике
РГПУ им. А. И. Герцена;
191186, Санкт-Петербург,
набережная реки Мойки 48,
upm_eno@mail.ru**