



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ

Дубровский В. Н.¹

¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Аннотация

В статье рассказывается о сравнительно новом международном научном конкурсе для школьников — соревновании по математическому моделированию (International Mathematical Modeling Challenge), его целях, идеологии и порядке проведения. Приводится работа, выполненная в рамках этого конкурса.

Ключевые слова: математическое моделирование, интеллектуальные соревнования школьников.

Цитирование: Дубровский В. Н. Математическое моделирование для школьников // Компьютерные инструменты в образовании. 2017. № 6. С. 54–66.

Традиция российского школьного математического образования уделяет весьма скромное внимание прикладному аспекту математики. В основном он проявляется в форме упражнений «практического характера», которые преимущественно сводятся к обычным математическим задачам, сформулированным с использованием реальных объектов и ситуаций. Бывали периоды, когда даже такие поверхностные приложения математики вытеснялись на периферию учебного процесса чисто математическими формулировками, но сегодня место «практическим» задач в школьном курсе обеспечивается их включением в задания ЕГЭ. Отметим также, что такие задачи неизменно включаются в сравнительные международные тестирования PISA и TIMSS.

С другой стороны, во многих странах (назовем в первую очередь США и Китай) уже не один десяток лет школьников знакомят с такой важнейшей областью прикладной математики как математическое моделирование объектов и явлений окружающей действительности. Происходит это как в форме курсов математического моделирования, в основном, факультативных, но кое-где, например в Гонконге, обязательных, так и в виде различных конкурсов. С недавних пор появилось и международное соревнование по математическому моделированию — International Mathematical Modeling Challenge (ИММС). Чтобы дать представление, о каких моделях идет речь, приведем (в сокращении) условия нескольких заданий этих конкурсов; первые три предлагались на ИММС, последнее — в его российском туре.

1. *Расписание съемок фильма.* Требуется создать математическую модель для составления расписания съемок, учитывающую такие факторы, как наличие у занятых в фильме кинозвезд свободного для съемки времени, затраты времени на съемки определенных мест, постройки декораций и т.д. Расписание должно быть гиб-

- ким, регулируемым на случай неожиданных изменений в учитываемых факторах. На основе модели надо выделить наиболее влиятельные факторы.
2. *Страхование рекорда.* Организаторы международного забега на 15 км в одном голландском городе выплачивают приз в 25000 евро спортсмену, который побьет мировой рекорд для 15-километровых забегов по городским улицам. Они хотят застраховать эту выплату так, чтобы страховка покрывала выплату приза. Требуется определить приемлемую цену ежегодного страхового взноса и создать модель для ответа на аналогичный вопрос в аналогичных других, более сложных ситуациях.
 3. *Смена часовых поясов.* Группа специалистов из разных стран собирается на 2–3 дня для обсуждения важных вопросов. Как выбрать место встречи, исходя в первую очередь из необходимости обеспечить максимальную трудоспособность её участников с учетом смены часовых поясов?
 4. *Стада.* Построить модель формирования стада животных с учетом их выживаемости при нападении хищника.

В условия некоторых заданий включаются данные для обработки (например, в задаче 2 — списки результатов победителей забегов за много лет), в других случаях сбор необходимых данных лежит на самих участниках. Следует пояснить, что конкурс проводится дистанционно и в ходе работы над заданием разрешается использовать любые печатные источники и интернет-ресурсы.

Кратко коснемся организации конкурса IMMS. Соревнование проводится дистанционно. В нем участвуют команды школ, не более четырех человек в каждой команде; от каждой страны к конкурсу допускаются две команды, отбор которых производит национальное жюри. На выполнение работы отводится пять дней, которые выбирают сами команды в рамках примерно двухмесячного периода в марте-апреле. В начале своей пятидневки команда загружает задание, в конце высылает решение (на английском языке). Работы оцениваются международной группой экспертов, которая распределяет команды на четыре категории в соответствии с качеством работ. Наградой служит приглашение за счет организаторов на встречу команд-победителей, включающую представление команд и их работ, вручение дипломов, культурные мероприятия. Такие встречи проводились в Гонконге, Гамбурге (во время 13-го Международного конгресса по математическому образованию), Бостоне. В 2018 году награждение состоится в Мельбурне. Кроме того, многие зарубежные университеты охотно учитывают успешное выступление в IMMS при поступлении, а один из научно-исследовательских институтов в Гонконге открыл программу стажировки, в которую приглашаются победители IMMS. Число участников конкурса выросло с 17 команд из 10 стран при первом его проведении, до 54 команд из 29 стран в в 2018 году. Основателями и спонсорами IMMS являются расположенный в Бедфорде, США, «Консорциум по математике и ее приложениям» (COMAP), созданный в 1980 году с целью внедрения математического моделирования в университетское и школьное математическое образование, и NeoUnion, международная организация для развития образования, науки и культуры, базирующаяся в Гонконге. Более подробно с правилами проведения и другой информацией об IMMS можно познакомиться на сайте [1].

Возвращаясь к конкурсным заданиям на математическое моделирование, выделим некоторые их характерные особенности.

Прежде всего, это задания «открытого типа», то есть они не имеют какого-то одного правильного ответа. Высшие оценки жюри за одно и то же задание получали работы с очень разными моделями: в одних применялась статистическая обработка данных, в других — элементы теории графов, в третьих — компьютерное моделирование, но бы-

ли и такие, где использовался только математический аппарат, не выходящий за рамки школьной программы. При оценке представленных математических моделей акцент делается не на математике, а на моделировании, поэтому задания подбираются так, чтобы одно лишь знание математики в большем объеме или более высокого уровня, в том числе умение решать математические олимпиадные задачи, не создавало участникам критического преимущества. В то же время, одной математики для успешного выполнения заданий недостаточно. Участникам приходится привлекать сведения из физики, биологии, других естественных наук, причем обычно эти сведения добываются по ходу работы, что требует свободного владения поиском в интернете. Большая роль уделяется умению ясно и сжато излагать свои мысли (а для международного конкурса работа должна быть написана по-английски). Совместить все необходимые умения и навыки в одном лице трудно, но потому конкурс и является командным, а на работу отводится не несколько часов, как на олимпиаде, а несколько дней. Таким образом, в дополнение к перечисленным выше, важным условием успеха является и умение работать в команде. Хорошее представление о математическом моделировании для школьников, возможной структуре и содержании соответствующего курса и его месте в школьном образовании, а также рекомендации по подготовке к соревнованиям можно получить из книги [2], доступной в интернете.

Для организаторов ИММС соревнование как таковое, выявление победителей — не самоцель, а лишь средство для пропаганды математического моделирования среди учителей и других участников образовательного процесса. Они видят свою конечную задачу, сколь бы амбициозно это ни звучало, в том, чтобы реформировать массовое математическое образование во всем мире, переориентировав его на приложения математики к реальной жизни. В отличие от столь бурно развивающегося сейчас олимпиадного движения, рассчитанного на особо способных детей, они стремятся вовлечь в сферу своей деятельности всех школьников. Во многих странах математическое моделирование уже проникло в школу, а в соревнованиях участвуют тысячи школьников. Так, в одном Пекине в национальном соревновании принимают участие около 25000 (!) команд. В России пока сделаны только первые шаги, но с учетом таких факторов, как внедрение в школы проектно-исследовательской деятельности, растущее число классов инженерного профиля, перспективы развития этого нового для нас направления представляются благоприятными.

В качестве примера приводим развернутую формулировку задания, предлагавшегося участникам российского конкурса 2016 года (автор задания — сотрудник ИПМ РАН, член жюри ИММС К. К. Авилов), и работу, выполненную в рамках этого конкурса учащимися СУНЦ МГУ Н. Елфимовым, В. Жариковой, А. Шахиди и М. Шуляевым. Данная работа заняла одно из первых мест и была высоко оценена на школьных научно-практических конференциях в Москве и Санкт-Петербурге.

Приложение 1

НА РАБОТУ НА ВЕЛОСИПЕДЕ... ИЛИ НЕТ?

В крупных городах добраться из одной точки в другую зачастую оказывается не так легко и не так быстро, как хотелось бы. Расстояние между домом и работой, как правило, слишком велико, чтобы идти пешком; общественный транспорт может быть неудобен и ненадежен; личный автомобиль может застрять в «пробках». Многие города России про-

водят «дни без автомобиля» и акции «На работу на велосипеде», устраивают велодорожки и системы велопроката. Но насколько успешными могут быть эти инициативы?

В рамках разработки общероссийского плана по улучшению транспортной ситуации в городах за счет популяризации велотранспорта к вашей экспертной группе (вашей команде) обратились с просьбой оценить, какую часть горожан можно пересадить на велосипеды в разных городах России. Наиболее острые транспортные проблемы возникают в утренние и вечерние часы пик, связанные с перемещением на работу и с работы. Поэтому основная задача состоит в оценке того, для какой части горожан поездки на работу на велосипеде будут в целом «лучше», чем другие способы перемещения. Одинаковы ли будут эти доли для городов разного размера и разного географического положения?

1. Определите, какие способы перемещения по городу конкурируют с перемещением на велосипеде. Каковы их основные преимущества и недостатки? (Вопросами финансовой доступности и «престижности» пренебрегите: считайте, что горожанин может воспользоваться всеми «обычными» способами перемещения.)
2. Выбор вида транспорта для поездки на работу зависит от ряда условий, например, от ее дальности. Перечислите условия и параметры, наиболее существенно влияющие на этот выбор для российских горожан. Определите распределение этих параметров, то есть, например, в случае дальности поездки, какая доля горожан совершает поездки каждой возможной дальности. Как это распределение зависит от размера города и прочих его характеристик?
3. Какие проблемы могут возникнуть при использовании разных способов перемещения по городу? Какова вероятность возникновения таких проблем для каждого из рассматриваемых вами видов транспорта в зависимости от параметров поездки и параметров города?
4. Придумайте «меру удобства» поездки, которая учитывала бы не только преимущества и недостатки использованного способа перемещения, но и случившиеся в дороге проблемы, описанные в вопросе 3. Объясните, на каких принципах и предположениях основана ваша «мера удобства». (Под «мерой удобства» тут понимаются некоторая функция или алгоритм, вычисляющие количественную оценку удобства поездки в зависимости от параметров поездки — вида транспорта, расстояния, случившихся проблем и т. п.)
5. Используя «меру удобства», определите, для какой доли горожан поездка на велосипеде будет удобнее других способов перемещения. Как это зависит от параметров города?
6. Составьте для заказчиков исследования краткое резюме (размером не более одной страницы), содержащее выводы о том, каковы потенциальные возможности внедрения велотранспорта в городах России, и в городах каких типов внедрение массового велотранспорта наиболее и наименее перспективно.

Исследование возможностей велосипедного транспорта в городах России

Велосипед — экологически чистый, удобный и полезный с точки зрения здоровья транспорт. Удобно ли использовать этот вид транспорта в повседневной жизни? Плюсы велосипеда в том, что он относительно дешёв, манёврен, автономен, бесперебоен, безопасен, не боится бездорожья и прост в управлении. С помощью велосипедов можно решить проблему перенасыщения городов автомобилями.

Почему же до сих пор все люди не перестали ездить на автомобилях или общественном транспорте, например, на работу? Приводятся разные причины. Самые

актуальные — это далёкое расположение, физическая подготовка, неудачная погода, затраченное время. Нельзя не упомянуть проблему обустройства городов. Очень важно подготовить условия для велосипедистов, чтобы уменьшить риск аварий и просто обеспечить комфортное передвижение. На данный момент в немногих российских городах предусмотрены велодорожки, велопарковки и, возможно, велопрокат. Но наши заказчики будут принимать решение об улучшении велосипедной инфраструктуры только после заключения, к которому мы придём в работе. Поэтому не будем терять ни минуты!

Для начала, разумеется, нужно решить, каким видам транспорта велосипед представляет альтернативу. Во-первых, это, безусловно, личный автомобиль. Кроме него, мы рассматриваем мотоцикл, общественный транспорт и, конечно, ходьбу пешком. Общественный транспорт по своим свойствам мы разделили на 2 группы: в группу А попали наземные виды транспорта, которые ездят по дорогам и зависимы от светофоров (троллейбусы, автобусы, трамваи), а в группе Б рассмотрены виды транспорта, для которых пробки не страшны (метро, городская электричка).

Итак, у нас вышло 6 различных видов транспорта, включая велосипед. Что же с ними делать?

Первым делом, мы решили разобрать преимущества и недостатки различных видов городского транспорта, которые служат критериями для выбора того или иного средства передвижения при перемещении от дома до работы. Строго говоря, эти критерии могут сильно отличаться у разных людей, зависеть от их здоровья, морали и т. п. Например, не очень физически развитым людям будет сложно перейти от комфортного автомобиля к открытому всем ветрам велосипеду. Другие, возможно, побоятся соприкосновения с грязью на дорогах. Все эти «субъективные» критерии учесть слишком сложно, поэтому мы отталкиваемся от следующего предположения:

Гипотеза 1. *Люди при выборе средства передвижения руководствуются только объективными и очевидными для всех критериями.*

В частности, в данные критерии не входит финансовое положение, так как в условии обговорено, что горожанам доступны любые средства передвижения. Почти сразу мы поняли, что вместо каких-то плюсов и минусов для каждого транспорта выгодно рассматривать показатели каждого из видов транспорта по каким-то общим свойствам, которые имеют место для всех видов транспорта. По нашим убеждениям, очевидными критериями для выбора транспортного средства являются скорость, комфорт, надежность и простота подготовки транспорта к эксплуатации. Их мы и выбрали для сравнения удобства того или иного вида транспорта. Метод подсчёта нашей «меры удобства» заключается в том, чтобы оценить каждый из видов транспорта по некоторой шкале, а затем просуммировать оценки по каждому из критериев. Конечный результат и будет «мерой удобства».

Нельзя забывать, что выбор вида транспорта зависит от параметров поездки. Мы используем дальность поездки как один из основных таких параметров. Больше никаких специальных параметров поездки было решено не учитывать, потому что введение дополнительных параметров повлечёт за собой необходимость искать распределение по двум параметрам, что уже затруднительно. Также к такому параметру можно отнести температуру за окном, но мы учитываем её в среднем за год и среди параметров, зависящих только от города, так как нас интересует целесообразность использования того или иного транспорта в течение всего года.

Рассмотрим теперь каждый из выбранных нами критериев в отдельности.

Скорость

Разумеется, скорость — один из важнейших критериев при выборе транспорта. Как говорил Гоголь, «какой русский не любит быстрой езды?» Мы посчитали, что в этом параметре важно ответить на вопрос не только качественно, но и количественно (на сколько больше скорость автомобиля, чем велосипеда?). Наш метод, который мы будем использовать и для других критериев, заключается в том, чтобы сначала каким-то образом посчитать сравнимые друг с другом индексы по каждому виду транспорта, а затем использовать как итоговый «балл» долю абсолютного значения по определённому транспорту в сумме по всем видам транспорта. Это будем называть «относительной величиной критерия». Скорость пешего мы положили 5 км/ч, среднюю скорость велосипедиста — 16 км/ч, среднюю у мотоциклиста в городе — 50 км/ч. Сложно оценить среднюю скорость велосипеда и мотоцикла, это достаточно субъективный показатель, из-за недостатка информации по данной теме нам пришлось использовать неофициальные исследования [3, 4]. Среднюю скорость в метро и электричках по аналогичным допущениям сделали равной 40 км/ч.

Сложнее мы поступили со скоростями автомобилей и общественного транспорта класса А, ведь они зависят от таких факторов, как пробки на дорогах. Мы заметили, что средняя скорость автомобиля сильно зависит от поездки: чем дальше поездка, тем больше средняя скорость. Но как вычислить её достаточно точно? Нам помогло исследование Яндекса по поездкам от дома до работы жителей Москвы [5]. В нём для каждого из районов Москвы подсчитано среднее время, затраченное на поездку в одну сторону, и среднее расстояние у людей от дома до работы. Следовательно, отсюда для каждого района можно рассчитать и среднюю скорость. Соответственно, для разных расстояний от дома до работы получится разная средняя скорость. Так мы получили точечные значения функции средней скорости от дальности поездки $v(L)$ для каждого района Москвы, имевшего место в исследовании Яндекса. По этим значениям можно аппроксимировать функцию $v(L)$. В качестве приближающей функции мы решили выбрать кубическую, как оптимальный многочлен, способный подстраиваться под ситуацию. Результаты аппроксимации можно увидеть на следующем графике.

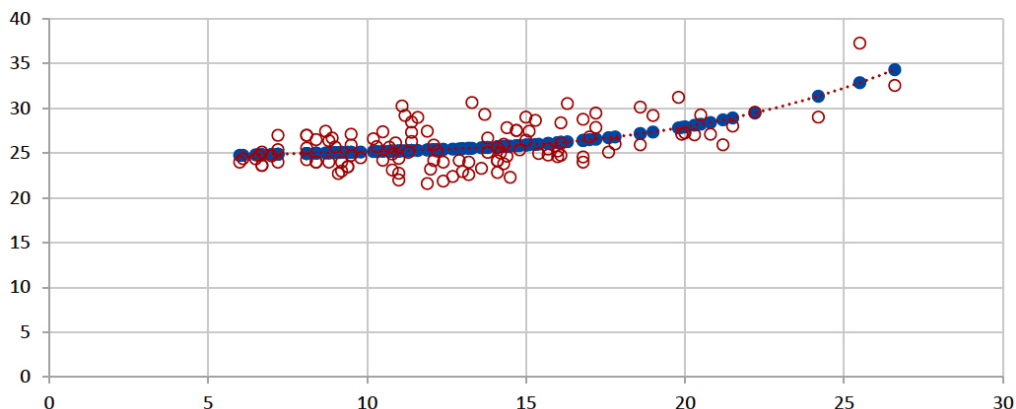


График зависимости средней скорости от расстояния, которое проезжает человек до работы (данные на основе Яндекс. Исследований). Оранжевым на графике выделены точки, полученные из исследования Яндекса, а синим и оранжевым пунктиром — функция аппроксимации $v(L)$

Теперь о том, как уровень загруженности дорог, который влияет на скорость транспортных средств, зависит от города.

Гипотеза 2. *Плотность населения — основополагающий фактор загруженности дорог.*

Остальными факторами в нашей модели мы пренебрегаем. Зная зависимость скорости от дальности перемещения в Москве, мы находим данную зависимость для произвольного города по следующей формуле:

$$v = v_M(L) \cdot (K - k \frac{n}{S}), \quad (1)$$

где v — скорость в некоем городе, v_M — скорость в Москве, K — такой коэффициент нормировки, что при его умножении на максимальное значение скорости в Москве мы получим значение, принимаемое за максимально возможное в городских условиях (в данном случае был выбран порог в 60 км/ч). Из K вычитается поправка на пробки — коэффициент, пропорциональный плотности городского населения, а k — коэффициент пропорциональности.

Коэффициенты K и k являются постоянными для всех городов, значение первого известно из определения — $60/v_{M,max}$. Известно, что при подстановке плотности населения Москвы правая скобка обращается в единицу из равенства. Отсюда k для любого города равен

$$k = (K - 1) \cdot \frac{S_M}{n_M}, \quad (2)$$

где S_M и n_M — площадь и население Москвы. Так мы можем найти функцию скорости автомобиля от дальности перемещения в любом городе.

И, наконец, считаем скорость для общественного транспорта класса А. Ведь этот вид транспорта останавливается на многих остановках по пути. Среднюю скорость транспорта класса А мы нашли по статистике из Ярославля [6]. Её значение $\langle V \rangle$ равно 17,56 км/ч. Далее, предположение, которым мы руководствовались, состоит в том, что *скорость автобуса в любом городе всегда пропорциональна скорости автомобиля*. Сформулируем ещё одну гипотезу.

Гипотеза 3. *Доля граждан, едущих на работу на расстояние X в городе А, равна доле граждан, едущих на работу на расстояние $\sqrt{\frac{S_B}{S_A}} \cdot X$.*

Иными словами, структура всех рассматриваемых городов достаточно схожа: площади рабочих и жилых зон в каждом городе пропорциональны площади города, и их местоположение относительно центра мало меняется от города к городу. А так как распределение по дальности у нас определено для Москвы, то на другие города мы с помощью гипотезы 3 «натягиваем» это распределение. Проще говоря, из нашей гипотезы следует, что каждый город — это маленькая Москва после гомотетии из её центра.

Согласно исследованиям Яндексa, среднее расстояние от дома до работы составляет $\langle L \rangle = 17,9$ км. Данные по средней скорости автобуса для Ярославля припишем расстоянию в $\langle L \rangle \cdot \sqrt{\frac{S_Y}{S_M}}$ (S_Y — площадь Ярославля, S_M — площадь Москвы). Получаем коэффициент пропорциональности B для скорости автобуса в любом городе:

$$B = \frac{\langle V \rangle}{v_Y \left(\langle L \rangle \cdot \sqrt{\frac{S_Y}{S_M}} \right)}, \quad (3)$$

где $\langle V \rangle$ — среднее значение, полученное из исследований в Ярославле, v_d — скорость автомобилей в Ярославле, посчитанная ранее по формуле (1).

Комфорт

Параметр комфорта является субъективным, и мы сочли его не определяемым количественно. Поэтому для оценки мы провели относительное сравнение всех средств передвижения. Результат вы можете видеть в таблице ?? Приложения. Так, пешком ходить, по нашему мнению, наименее комфортно. На единицу выше в нашем рейтинге комфортности идёт велосипед. Самым комфортным видом транспорта безоговорочно признан автомобиль.

Простота обслуживания

Это тоже один из важных критериев при выборе вида транспорта. Зимой, когда на улице мороз, автомобиль требует разогрева, который занимает определённое количество времени. Правда, и велосипедом зимой пользоваться затруднительно. Однако в тёплое время велосипед весьма прост в использовании: проверка состояния занимает относительно меньше времени, чем потребовалось бы на автомобиль. А, например, общественный транспорт не требует от нас обслуживания, но до него нужно добраться (и купить билет), учитывая его расписание и маршрут.

Однако грамотно в пропорциональных величинах этот коэффициент посчитать тоже не представляется возможным. Мы не можем сказать точно, насколько просто или сложно управляться с тем или иным видом транспорта — для этого нужно как минимум провести социологический опрос с репрезентативной выборкой, на что у нас просто нет ресурсов. Поэтому мы решили, что самое честное в этом случае — сделать такую же рейтинговую систему, как и в параметре «комфорт». Пешеходу и пассажиру общественного транспорта поставили 4, велосипедисту — 3, мотоциклисту — 2, а автомобилисту — 1.

Функция приоритетов

Итак, мы построили шкалу по трём критериям. Но они необоснованно выступают как равнозначные. Действительно, для одних людей важна скорость, для других главное — с комфортом доехать до пункта назначения. Конечно, это достаточно субъективные факторы, но кое-что мы всё-таки можем учесть.

Для того, чтобы пройти до магазина, мы обычно используем свои ноги (или велосипед). А для поездки на загородную дачу мы выберем автомобиль повместительнее. Мы предполагаем, что в зависимости от дальности важными становятся одни или другие критерии. А именно, для малых расстояний во главу угла встаёт простота обслуживания, а для больших намного важнее комфорт. Поэтому мы создали весовую функцию от дальности поездки, которая и внесёт эту поправку. Как она выглядит?

Раньше у нас каждый параметр имел вес 1. Теперь функция приоритетов w будет такова: при $L = 0$ вес комфорта $w(c)$ равен нулю, а вес простоты сервиса $w(s)$ — двум. При очень больших L ситуация противоположная: комфорт стремится к наибольшему весу, а сервис — к наименьшему. Причём при равенстве времени на обслуживание и времени на поездку веса обоих параметров станут равными 1, а сумма весов всегда равняется двойке. Эти свойства навеяли простую реализацию весовой функции от расстояния L :

$$w(s) = 2 \cdot \frac{\lambda}{\lambda + \frac{L}{v}}$$

— для параметра «простота обслуживания»;

$$w(c) = 2 \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + \frac{L}{v}} \right) \text{ — для параметра «комфорт»}.$$

Здесь v — это скорость транспортного средства (как мы помним, у автомобиля и автобуса она зависит от L). Через λ выражается приблизительное характерное время на подготовку транспортного средства. Для общественного транспорта это среднее время, которое человек затрачивает на то, чтобы добраться до остановки. Его мы брали из ГОСТов и других предписаний [7]. Разумеется, никаких стандартов по времени обслуживания мотоцикла, автомобиля и велосипеда нет, поэтому нам приходилось лишь прикидывать. Для велосипеда мы взяли характерное время в 3 минуты, для мотоцикла — в 6 минут. Для автомобиля это время зависит от времени года: зимой нужно потратить время на прогревание. Поэтому здесь нам понадобится температурный коэффициент T , который нам ещё пригодится: среднее количество дней в году с температурой выше 0°C , поделённое на общее число дней в году. В данном случае время в минутах для автомобиля мы берём по формуле $10 + 5 \cdot (1 - T)$.

Осталось лишь умножить значения комфорта и простоты обслуживания на полученные соответствующие весовые функции. То, что получилось, можно видеть в таблице 1.

Таблица 1. «Мера удобства» для Москвы, дальность поездки равна 10 км

Виды транспорта	Скорость	Комфорт	Простота подготовки	λ (ч)	$w(c)$	$w(s)$	Надёжность	Итог
Пеший	5	1	4	0	2	0	0,89	0,11
Обществ. А	17,94	4	4	0,125	1,63	0,37	0,88	0,78
Обществ. Б	40	3	4	0,25	1	1	1	0,62
Мотоцикл	50	5	2	0,100	1,33	0,67	0,99	0,43
Велосипед	16	2	3	0,050	1,85	0,15	0,99	0,18
Автомобиль	25,16	6	1	0,28	1,17	0,83	0,78	0,35
Сумма	154,1	21	18				5,53	

Надёжность

Для многих людей при выборе вида транспорта крайне важен такой показатель, как безопасность. Надёжность — это коэффициент, отражающий поездки без ЧП. Под ЧП мы подразумевали ДТП, так как остальные происшествия не имеют веского значения. А в ДТП на кону часто стоит жизнь человека. Ну, а мелкие травмы, вызванные по вине самого человека, не имеет смысла рассматривать. Поэтому под коэффициентом надёжности мы подразумеваем отношение количества ДТП данного вида транспорта к количеству всех ДТП, то есть вес данного вида транспорта в общем числе несчастных случаев. Мы его умножаем на коэффициент «меры удобства» для данного вида транспорта. Получается итоговый коэффициент «меры удобства», которым мы оперируем при вычислении процента велосипедистов. Статистику надёжности мы брали из интернет-источника [8].

Параметры города

Гипотеза 4. Исследовать имеет смысл только города с населением более 500 тысяч человек — остальные города не столь весомы.

Следовательно, в нашу выборку попало 36 российских городов. Мы вводили различные коэффициенты, определяющие «меру удобства» для каждого вида транспорта. Некоторые из них зависят от города. Например, скорость автобуса и автомобиля зависят от уровня пробок в городе. Также время обслуживания автомобиля зависит от

температуры. Теперь этот температурный коэффициент T , вводимый нами ранее, будет использован как фактор, определяющий возможности велосипедного и мототранспорта. Как правило, зимой эти виды транспорта не используются. Поэтому мы выдвинули следующую гипотезу.

Гипотеза 5. *Велосипеды и мотоциклы резонно использовать только при температуре выше нуля градусов по Цельсию.*

Исходя из этого итоговую меру удобства для велосипеда и мотоцикла необходимо умножить ещё на коэффициент T , который мы брали из метеосводок [9]. Что до общественного транспорта класса Б, под которым мы понимаем в первую очередь метро, то он есть только в семи городах России: Москва, Санкт-Петербург, Новосибирск, Екатеринбург, Нижний Новгород, Казань, Самара. Пожалуй, только на пешеходов параметров города не нашлось.

Переходим к ответу

С помощью вышеперечисленных методов, мы определили «меру удобства» для каждого из видов транспорта. Она показывает эффективность одного вида транспорта над другим. Но чтобы оценить процент людей, которых велосипед удовлетворяет, мы нашли отношение «меры удобства» велосипеда к сумме всех коэффициентов. Мы исходили из того, что несмотря на то что люди рациональны, но не для всех людей приоритеты имеют тот вес, который мы указали. Тем самым новый коэффициент показывает процент людей, для которых данный вид весьма удобен.

Выборка жителей

Для детей младше 18 лет велосипед, скорее, развлечение. Для оценки доли жителей, которые смогут использовать этот вид транспорта в повседневной жизни, не будем учитывать группу людей младше 18. Престарелые и старики не обладают необходимым здоровьем и физической подготовкой. В этот период жизни люди, работающие по найму, как правило, имеют право прекращать работу и уходить на пенсию (в Российской Федерации женщины — с 55 лет, мужчины — с 60 лет). Но имеется также некоторый процент работающих из общего числа пожилых людей. В нашей модели рассматривается группа людей от 18 до 55 лет, которая составляет 50 % от общего числа населения. Этот процент мы получили благодаря статистике.

Использование велосипеда на постоянной основе — улучшение своего здоровья. Но это требует значительных усилий и подготовки, как физической, так и моральной. По статистике 30 % населения РФ — люди, страдающие ожирением. Процент людей из этой группы, которые согласятся использовать велосипед, пренебрежимо мала.

Финансовое состояние не рассматривается и люди не классифицируются по этому параметру. Считается, что покупка любого вида транспорта не вызывает трудностей.

Конечный результат для всех городов можно увидеть в таблице 2.

Заключение

По результатам нашего исследования мы выявили, что развивать велосипеды в России всё же имеет смысл. Но так как большая часть России лежит в широтах, в которых есть зима, то велосипед на территории этих городов можно использовать не круг-

Таблица 2. Подсчёт «меры удобства» для всех городов с промежуточными вычислениями

Города	$\sqrt{\frac{s}{s_M}}$	Пробки (отн. Москвы)	Население	T	Пеший	Общ. тр. А	Общ. тр. Б	Мотоцикл	Велосипед	Автомобиль	Доля велосипедистов	Кол-во населения
Москва	1,00	1,00	12330000	0,61	0,13	0,75	0,63	0,42	0,18	0,38	7,39	319073
Санкт-Петербург	0,75	1,18	5226000	0,62	0,13	0,75	0,63	0,43	0,19	0,42	7,43	135959
Новосибирск	0,44	1,26	1584000	0,52	0,13	0,74	0,63	0,36	0,16	0,44	6,38	35347
Екатеринбург	0,43	1,27	1444000	0,54	0,13	0,74	0,63	0,38	0,16	0,44	6,64	33559
Нижний Новгород	0,40	1,27	1267000	0,59	0,13	0,74	0,63	0,41	0,18	0,44	7,08	31408
Казань	0,41	1,30	1217000	0,58	0,13	0,74	0,63	0,40	0,17	0,44	6,94	29546
Челябинск	0,45	1,40	1192000	0,56	0,13	0,74	0,00	0,39	0,17	0,46	9,00	37533
Омск	0,47	1,43	1178000	0,54	0,13	0,74	0,00	0,37	0,16	0,47	8,75	36073
Самара	0,39	1,27	1171000	0,59	0,13	0,74	0,63	0,41	0,18	0,44	7,13	29231
Ростов-на-Дону	0,37	1,25	1120000	0,72	0,13	0,74	0,00	0,50	0,22	0,43	10,89	42689
Уфа	0,53	1,50	1111000	0,57	0,13	0,74	0,00	0,39	0,17	0,48	9,01	35023
Красноярск	0,39	1,32	1067000	0,53	0,13	0,74	0,00	0,37	0,16	0,45	8,74	32650
Пермь	0,56	1,55	1042000	0,54	0,13	0,74	0,00	0,38	0,16	0,49	8,69	31699
Воронеж	0,48	1,48	1032000	0,64	0,13	0,74	0,00	0,44	0,19	0,47	9,78	35325
Волгоград	0,58	1,56	1016000	0,68	0,13	0,74	0,00	0,47	0,21	0,49	10,20	36254
Краснодар	0,36	1,36	854000	0,87	0,13	0,74	0,00	0,60	0,26	0,44	12,12	36238
Саратов	0,39	1,42	843000	0,61	0,13	0,74	0,00	0,43	0,19	0,46	9,60	28315
Тюмень	0,52	1,59	720000	0,54	0,13	0,74	0,00	0,37	0,16	0,50	8,63	21748
Тольятти	0,35	1,40	713000	0,59	0,13	0,74	0,00	0,41	0,18	0,46	9,34	23310
Ижевск	0,35	1,43	644000	0,56	0,13	0,74	0,00	0,39	0,17	0,47	8,97	20220
Барнаул	0,35	1,44	636000	0,54	0,13	0,74	0,00	0,38	0,16	0,47	8,77	19525
Иркутск	0,33	1,40	623000	0,52	0,13	0,74	0,00	0,36	0,16	0,46	8,51	18562
Ульяновск	0,35	1,44	622000	0,58	0,13	0,74	0,00	0,40	0,18	0,47	9,18	19982
Хабаровск	0,39	1,50	611000	0,56	0,13	0,74	0,00	0,39	0,17	0,48	8,92	19067
Владивосток	0,36	1,46	607000	0,64	0,13	0,74	0,00	0,44	0,19	0,47	9,85	20929
Ярославль	0,28	1,29	607000	0,59	0,13	0,74	0,00	0,41	0,18	0,44	9,40	19977
Махачкала	0,43	1,55	588000	0,90	0,13	0,74	0,00	0,63	0,27	0,48	12,22	25152
Томск	0,34	1,45	569000	0,51	0,13	0,74	0,00	0,36	0,16	0,47	8,41	16745
Оренбург	0,32	1,41	563000	0,58	0,13	0,74	0,00	0,40	0,18	0,46	9,27	18261
Кемерово	0,33	1,44	553000	0,52	0,13	0,74	0,00	0,36	0,16	0,47	8,54	16535
Новокузнецк	0,41	1,55	551000	0,53	0,13	0,74	0,00	0,37	0,16	0,49	8,56	16516
Рязань	0,30	1,38	535000	0,61	0,13	0,74	0,00	0,42	0,18	0,46	9,54	17862
Астрахань	0,29	1,35	532000	0,71	0,13	0,74	0,00	0,49	0,22	0,45	10,68	19887
Н. Челны	0,26	1,27	527000	0,59	0,13	0,74	0,00	0,41	0,18	0,44	9,45	17436
Пенза	0,34	1,47	524000	0,59	0,13	0,74	0,00	0,41	0,18	0,47	9,34	17138
Липецк	0,36	1,51	510000	0,62	0,13	0,74	0,00	0,43	0,19	0,48	9,55	17048
Итого:			45929000									1331822

логодично. Возможно, это одна из причин непопулярности этого транспорта в нашей стране. Также есть ещё такой фактор, как общественное мнение. В России передвижение на велосипеде считается уделом бедняков, неудачников, глупцов. И этот стереотип очень распространён. Но в Европе побороли его. Там же велосипед является транспортом успешных людей. Многие весьма известные люди используют его. Например, Кейт Миддлтон — супруга Принца Уильяма, наследница престола. Несмотря на свою известность, она передвигается на велосипеде. Но фактор социальной одобряемости крайне сложно рассмотреть, так как требуется большое количество статистических данных, знание различных психологических и социальных законов. Также наша модель города не самая лучшая, мы не учитывали многие факторы. Стоит отметить, что личный автотранспорт

весьма нерациональная вещь. Так как он зависит от пробок, на обслуживание уходит много времени и финансовых средств. Но этими недостатками не обладает общественный транспорт и мотоциклы. И удивительно, что многие люди не осознают этого. Поэтому нужно снижать количество личных автомобилей. Также мы провели социальный опрос среди учащихся СУНЦа. Так как мы пока учащиеся, то вопрос был таков: какой вид транспорта в будущем для вас будет предпочтительным. Результаты таковы: личный автомобиль — 44,4 %, общественный транспорт — 21,1 %, велосипед — 18,7 %, ролики, самокаты, гироскутеры и прочие — 6,1 %, мотоцикл — 9,8 %. В опросе приняло участие 246 человек. На наш взгляд, если мнения не изменятся, то это весьма оптимистичные результаты, так как доля автомобиля не велика.

Список литературы

1. www.immchallenge.org (дата обращения: 12.10.2017).
2. Guidelines for Assessment & Instruction in Mathematical Modeling Education (GAIMME) / Sol Garfunkel, Michelle Montgomery (ed.). Philadelphia: COMAP, Bedford and SIAM, 2016. URL: <http://www.comap.com/Free/GAIMME> (дата обращения: 12.10.2017).
3. Скорость мотоциклиста (средняя). Всё о мото. URL: <http://vse-o-moto.com/voprosy-i-otvety/415-skorost-mototsiklista-srednyaya> (дата обращения: 12.10.2017).
4. Скорости движения на различных велосипедах в разных условиях. URL: <http://velofans.ru/raznoe/skorosti-dvizheniya-razlichnyh-velosipedah-raznyh-usloviyah> (дата обращения: 12.10.2017).
5. Дом — работа, работа — дом. Яндекс. Исследования. URL: https://yandex.ru/company/researches/2016/home_work (дата обращения: 12.10.2017).
6. Средние скорости общественного транспорта, или Гадание на солярной гуще. 22 11 2013 г. URL: <http://fomichev.livejournal.com/62905.html> (дата обращения: 12.10.2017).
7. Транспорт и улично-дорожная сеть. URL: <http://allrefs.net/c43/4bvdh/p14/> (дата обращения: 12.10.2017).
8. Статистика автокатастроф за 2016 год в России. URL: <http://provodim24.ru/statistika-dtp.html> (дата обращения: 12.10.2017).
9. Строительная климатология онлайн. Информационный инженерный портал. URL: <http://helpeng.ru/programs/klimatologiya.php> (дата обращения: 12.10.2017).

Поступила в редакцию 11.09.2017, окончательный вариант — 12.10.2017.

Computer tools in education, 2017

№ 6: 54–66

<http://ipo.spb.ru/journal>

MATHEMATICAL MODELING IN HIGH SCHOOL

Dubrovskii V. N.¹

¹MSU (Kolmogorov School), Moscow, Russia

Abstract

We present a new intellectual competition for high school students, the International Mathematical Modeling Challenge, explain its objective, ideology, and rules. A student paper written for a preliminary national round of IMMC is given as an example.

Keywords: *mathematical modeling, student intellectual competitions.*

Citation: V. N. Dubrovskii, "Mathematical Modeling in High School," *Computer tools in education*, no. 6, pp. 54–66, 2017 (in Russian).

Received 11.09.2017, the final version — 12.10.2017.

Vladimir N. Dubrovskii, Associate Professor, Math department of AESC MSU (Kolmogorov School), vndubrovsky@gmail.com

© Наши авторы, 2017.
Our authors, 2017.

Дубровский Владимир Натанович,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математики СУНЦ МГУ,
vndubrovsky@gmail.com