Компьютерные инструменты в образовании, 2017
№ 6: 5–11
http://ipo.spb.ru/journal

К ЮБИЛЕЮ ЮРИЯ ВЛАДИМИРОВИЧ МАТИЯСЕВИЧА

Бельтюков А. П.[1]

[1]Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия

Аннотация

В статье рассказывается об известном российском математике Юрии Владимировиче Матиясевиче. Говорится о его основных результатах, в частности, о решении десятой проблемы Гильберта. Автор делится личными впечатлениями о Юрии Матиясевиче и интересными нерешёнными задачами.

Ключевые слова: *Матиясевич, Гильберт, десятая проблема, алгоритмическая разрешимость.*

Цитирование: Бельтюков А. П. К юбилею Юрия Владимирович Матиясевича // Компьютерные инструменты в образовании. 2017. № 6. С. 5–11.

В 2017 году мы отмечали 70-летие замечательного российского учёного-математика Юрия Владимировича Матиясевича, решившего в возрасте 22 лет знаменитую десятую проблему Гильберта [1, 2], в которой требовалось выяснить, существует ли способ, позволяющий при помощи конечного числа операций установить, разрешимо ли в целых числах заданное уравнение с произвольными целыми коэффициентами и произвольными переменными (диофантово уравнение) [3]. Юрий Матиясевич в 1970 году завершил доказательство того, что общее решение этой задачи в виде алгоритма невозможно. Это считается окончательным решением десятой проблемы.

Надо отметить, что десятая проблема имела длинную историю. Она была предложена Давидом Гильбертом на Втором Международном конгрессе математиков в Париже 8 августа 1900 года в числе 23 важных математических задач для решения в наступающем столетии [3]. Из всех 23 задач десятая — единственная проблема разрешимости. По-видимому, Гильберт считал, что метод решения будет найден. До 1940-х годов все исследования по десятой проблеме велись именно в направлении поиска требуемого алгоритма. В 1944 году Эмиль Пост поставил задачу о доказательстве алгоритмической неразрешимости десятой проблемы [4]. В 1953 году Мартин Дэвис опубликовал работу, в которой наметил путь решения десятой проблемы в направлении доказательства неразрешимости [5]. Он ввёл понятие диофантова множества: множества решений диофантова уравнения по определённой переменной или группе переменных. Например, множество точных квадратов определяется значениями переменной x в уравнении

$$x = y^2.$$

Мартин Дэвис поставил задачу доказать диофантовость любого алгоритмически перечислимого множества, откуда бы следовала неразрешимость десятой проблемы, так как проблема распознавания непустоты перечислимого множества по перечисляющему его алгоритму алгоритмически неразрешима, а Дэвис фактически и предлагал по перечисляющим алгоритмам строить диофантовы многочлены. Мартин Дэвис также сделал первый шаг в решении проблемы — построил специальную нормальную форму для представления перечислимых множеств. В 1958–1961 годах благодаря работам Джулии Робинсон, Мартина Дэвиса и Хилари Патнем удалось перейти к так называемому экспоненциально-диофантовому представлению перечислимых множеств (в многочлены, кроме операций сложения и умножения добавлялась операция возведения в переменную степень, то есть рассматривались выражения, составленные из переменных и констант при помощи операций сложения, умножения и возведения одного выражения в степень, задаваемую другим выражением) [6–8]. Теперь для завершения доказательства неразрешимости десятой проблемы оставалось построить многочлен, выражающий так называемую «зависимость экспоненциального роста»: это многочлен, корни которого по двум переменным x и y образуют пары, задающие функцию $f : f(x) = y$, которая больше экспоненты, то есть $f(x) > a^x$ для некоторого рационального a, большего 1. Гипотеза о существовании такого многочлена была известна как гипотеза Джулии Робинсон. Решение этой проблемы и было получено Юрием Матиясевичем в 1970 году [1]: он предъявил набор диофантовых уравнений, который задаёт функцию порождения n-го числа Фибоначчи. Это и есть пример, выражающий зависимость экспоненциального роста (порядок роста функции, задающей n-е число Фибоначчи — экспоненциальный). Так постепенно от невозможности решения общей задачи определения разрешимости диофантовых уравнений был пройден путь к задаче построения уравнений, задающих числа Фибоначчи, которая и была решена Юрием Матиясевичем. А ведь первоначально задача, поставленная научным руководителем Ю. В. Матиясевича — Сергеем Юрьевичем Масловым, была противоположной: положительно решить десятую проблему Гильберта. Возникает вопрос: почему же задача, поставленная Джулией Робинсон, не была решена почти десятилетие? Ответ тогда в математической среде выражался меткой фразой: «Все знали, что туда ходить нельзя, а этот мальчик не знал!». Правда, говорят, что некоторые зарубежные математики так и предполагали: появится какой-то юный математик из России и решит проблему. Конечно, всё гораздо сложнее: при решении сложных проблем, когда какое-то утверждение нужно доказать или опровергнуть, мысль математиков время от времени переключается с доказательства на опровержение и наоборот, продвигаясь и в том и в другом направлении. Работа эта оказалась очень трудной, и последний её этап занял в итоге почти десяток лет математической мысли. И на вершине её по праву оказался этот юный талант.

Теперь — немного о начале биографии Ю. В. Матиясевича:

- Родился Юрий Владимирович 2 марта 1947 года в г. Ленинграде.
- В 1962–1963 гг. учился в 239-й физико-математической школе города Ленинграда.
- В 1963–1964 гг. учился в московской физико-математической школе-интернате № 18 имени А. Н. Колмогорова (СУНЦ МГУ).
- В 1964–1969 гг. учился на Математико-механическом факультете Ленинградского государственного университета (был принят до окончания школы как победитель международной олимпиады по математике).
- В 1966 г. на втором курсе выполнил две работы по математической логике, напечатанные в «Докладах Академии наук СССР», представил доклад на Международном математическом конгрессе в Москве.

- В 1969–1970 гг. учился в аспирантуре Ленинградского отделения Математического института АН СССР (ЛОМИ) под руководством Сергея Юрьевича Маслова.
- В 1970 г. Юрию Владимировичу присуждена степень кандидата физико-математических наук.
- В 1970–1974 гг. работал научным сотрудником ЛОМИ.
- В 1972 г. защитил докторскую диссертацию как раз по неразрешимости 10-й проблемы Гильберта.

Мне впервые посчастливилось познакомиться с Юрием Владимировичем Матиясевичем, когда я ещё учился в школе — Физико-математической школе-интернате при Ленинградском университете в 1968–1970 годах. Тогда нам, ученикам, читали некоторые факультативные курсы. И вот был объявлен курс «Теория алгорифмов» (тогда в «ленинградской школе» было принято писать именно так, через «ф»). Было сказано, что вести курс будет неизвестный нам тогда Юрий Владимирович Матиясевич. Юрий Владимирович сумел заразить учеников любовью к этой науке. Всё было так необычно в сравнении с той математикой, которую мы до этого изучали. Больше всего запомнилось, как Юрий Владимирович нас разделял на команды и заставлял соревноваться, играя в какую-то загадочную игру. Правила каждый из нас знал, но общая цель как-то ускользала. Как выяснилось впоследствии, каждая команда составляла компьютер, работающий по определённой программе, и мы соревновались в скорости численного решения некоторых уравнений. Кто-то из нас был устройством управления, кто-то — памятью, кто-то — арифметическим устройством и т. д. Интересно, что тогда мы ничего не знали про десятую проблему Гильберта, которой занимался Юрий Владимирович. Юрий Владимирович спросил, почувствовали ли мы во время таких занятий, как над нами в воздухе носился некий «коллективный разум». При этом он проиллюстрировал этот вопрос, прочитав нам отрывок из фантастического произведения, в котором ставился подобный эксперимент, но в гораздо большем масштабе. Для нас так и осталось загадкой: если реализовать таким образом искусственный интеллект, то где он будет находиться? Но главное, что мы вынесли из этого курса: мечта составить алгоритм решения всех проблем неосуществима. Юрий Владимирович как учитель нас заражал стремлением что-то сделать из того, что он нам дал: я писал нормальные алгоритмы Маркова, о которых он нам рассказывал. Алгоритмы предназначались для решения разных задач, которые я сам ставил. Юрий Владимирович очень внимательно относился к этой деятельности, неизменно находил в алгоритмах ошибки и указывал нам на них. В результате я до сих пор, получая некоторый алгоритм, тут же начинаю искать в нём ошибки. У нас даже создалось впечатление, что везде таятся ошибки, только мы их пока не обнаружили.

В следующий раз я изучал «теорию алгорифмов» уже на втором курсе математико-механического факультета Ленинградского университета под руководством Николая Кирилловича Косовского. Тогда я и узнал, про десятую проблему Гильберта и решение её Юрием Владимировичем. Тогда это было удивительно: уравнениями над целыми числами можно описать любой вычислительный процесс. Теперь уже понятно, что такие решения проблем носят идеальный характер и нужны совсем не для моделирования вычислений уравнениями, а для расстановки логических «ограничительных флажков» на поле наших желаний решить те или иные проблемы: теорема Матиясевича говорит о том, в каком виде ставить задачу безнадёжно. Это значит, что если задача поставлена именно так, что она оказалась неразрешимой, то постановку нужно изменить (например, ограничить класс уравнений или ограничить сами решения). Конечно, Юрий Владимирович работал не на пустом месте — многие исследователи до него брались за эту задачу, многое было сделано, что могло помочь в её решении, но не хватало решающего броска, а для этого нужна была смелость: успех в таких делах заранее не гарантирован, а усилий можно потратить очень много. И вот, у него получилось!

С Юрием Владимировичем было связано одно удивительное событие. На втором курсе Николай Кириллович Косовский и Юрий Владимирович Матиясевич увлекли меня решением некоторых проблем, смежных с десятой проблемой Гильберта, таких, как проблема разрешимости систем линейных уравнений и делимостей — систем сложений и делимостей. Ведь в сущности, Юрий Владимирович доказал неразрешимость систем сложений и умножений. А что будет, если вместо отношения умножения, связывающего три числа использовать отношение делимости, связывающее два числа? Это означает, что требуется решать системы, состоящие из линейных уравнений и утверждений, о том, что значение одного линейного многочлена делится на значение другого линейного многочлена. Вроде бы задача решения таких систем проще, чем аналогичная задача для произвольных диофантовых уравнений. Останется ли она неразрешимой или её можно решать алгоритмически? Тогда Юрий Владимирович тесно взаимодействовал по этому поводу с Джулией Робинсон в США. Интересно, что у Джулии Робинсон также нашёлся ученик для решения этой проблемы — Леонард Липшиц. В итоге после примерно трехлетних размышлений (сравните с девятью годами последнего этапа решения десятой проблемы) мы решили эту проблему практически одновременно и похожими способами, не только не общаясь, но и вообще не зная даже о существовании друг друга [9, 10]. Оказалось, что такие задачи алгоритмически разрешимы. О том, что Л. Липшиц сообщил, что он решил эту проблему, я узнал только тогда, когда сам заявил о своём решении своему научному руководителю Н. К. Косовскому. Само решение Липшица мне прислали уже после того, как я изложил своё на семинаре ЛОМИ. Решение оказалось аналогичным, но немного сложнее, потому что мне удалось использовать не известные Липшицу результаты советских математиков. Юрий Владимирович тогда мне сказал, что в такой ситуации я должен либо найти ошибку в доказательстве Липшица, либо снять свою работу с публикации. Удивительно, но ошибка там действительно была, я написал об этом Леонарду, и он её впоследствии с успехом исправил. К сожалению, как заметил Леонард Липшиц, решённая нами проблема является NP-полной, и вряд ли быстрый алгоритм её решения будет получен. В сущности, наше решение было очень сложным обобщением широко известной Китайской Теоремы об Остатках, но для самой этой теоремы алгоритм был эффективен, а в общем случае — нет. Удивительно, что в это же время были найдены похожие решения этой проблемы другими российскими авторами, с которыми мы также до этого не общались. Более того, как мне передал Юрий Владимирович, некоторые детали этих решений совпадали с точностью до обозначений. После этого нам пришлось задуматься о том, что пути распространения научной истины совсем не так очевидны, как может показаться: наука распространяется не только в публикациях и «преданиях», но и ещё какими-то неосознанными и не понятными нам способами.

Интересно, что работы в области родственных задач продолжаются и поныне: оказывается, многим хочется знать, где здесь проходят границы между разрешимостью и неразрешимостью, эффективностью и неэффективностью. Пример одной из таких нерешённых задач — установить, можно ли построить алгоритм для решения систем уравнений в словах и в длинах слов в определённом конечном алфавите. Это — усложнение задачи решения в натуральных числах систем линейных уравнений и делимостей. Дело в том, что с помощью уравнений в словах можно выразить равенства сумм длин слов и делимости сумм длин слов. Задача осложняется тем, что нужно находить не только длины слов, но и сами слова. К настоящему моменту решение этой задачи мне не известно. Здесь так же, как и в случае самой десятой проблемы просматриваются, прежде всего, два пути: либо разработать алгоритм решения таких систем, либо выразить умножение длин слов. Возможны и другие менее очевидные ходы.

Для желающих попробовать свои силы сформулирую задачу точнее. Требуется построить алгоритм, решающий системы, состоящие из уравнений двух видов:

$$uv = w$$

и

$$length(u) = length(v),$$

где u, v, w — переменные или буквы конечного алфавита, значения переменных — слова в этом алфавите, $length(u)$ — общее число вхождений букв в слово u.

Аналогичная задача без равенств длин решена Г. С. Маканиным в 1977 году [11]. Кстати, Геннадий Семёнович приезжал к нам в Ленинград на семинар в ЛОМИ с докладом по этой работе. Обсуждение всех таких работ проводилось весьма тщательно. Я, помня о былом требовании Юрия Владимировича искать ошибки, указал на один пробел в предъявленном доказательстве, устранить который оказалось не так просто: Геннадий Семёнович представил успешно исправленный вариант только на следующем заседании семинара.

Продолжение биографии Юрия Владимировича в качестве уже известного крупного ученого-математика.

- В 1974–1980 гг. — старший научный сотрудник ЛОМИ.
- С 1980 г. — заведующий лабораторией математической логики ЛОМИ.
- С 1995 г. — профессор СПбГУ на кафедре Математического обеспечения ЭВМ, впоследствии — на кафедре алгебры.
- В 1997 г. избран членом-корреспондентом РАН.
- С 1998 г. — вице-президент Санкт-Петербургского математического общества.
- С 2002 г. — председатель жюри Санкт-Петербургской городской математической олимпиады.
- В 2008 г. избран действительным членом Российской академии наук.
- С 2008 г. — президент Санкт-Петербургского математического общества.

О наградах, премиях и почётных званиях Юрия Владимировича:

- В 1964 г. завоевал диплом первой степени на Международной математической олимпиаде, проходившей в Москве.
- В 1970 г. получил премию «Молодому математику» Ленинградского математического общества.
- В 1980 г. получил медаль А. А. Маркова Академии наук СССР.
- В 1996 г. получил звание почетного доктора Университета французской провинции Овернь в г. Клермон-Ферран.
- В 1998 г. получил премию Гумбольдта.
- В 2003 г. получил звание почетного доктора Университета Париж-6.

У Юрия Владимировича есть ученики, защитившие кандидатские диссертации: Э. А. Мусаев, М. А. Всемирнов (ученики — Олег Етеревский и Сергей Норин), А. В. Пастор, Д. В. Карпов, Юрий Лифшиц. Самого же Юрия Владимировича можно отнести к научной школе Андрея Андреевича Маркова (младшего), к ученикам Сергея Юрьевича Маслова (который, в свою очередь, — ученик Николая Александровича Шанина).

Скажем немного о других известных результатах Ю. В. Матиясевича.

В теории чисел Ю. В. Матиясевич получил ответ на поставленный в 1927 году вопрос Д. Пойа, касающийся бесконечной системы неравенств, связывающих тейлоровские коэффициенты кси-функции Римана. Юрий Владимирович показал, что все эти неравенства являются следствием одного функционального неравенства, связывающего Фурье-преобразование кси-функции и его производные.

В теории графов Ю. В. Матиясевич предложил несколько критериев раскрашиваемости графов. Его результаты в этой области устанавливают неожиданную связь гипотезы четырех красок и делимости биномиальных коэффициентов, а также дают вероятностную интерпретацию теоремы о четырех красках.

Можно ли говорить о новых неожиданных применениях работ Юрия Матиясевича? Заранее такие вещи предсказать невозможно. Тем не менее, некоторые говорят даже о компьютерах, основанных на новых принципах, «машинах Матиясевича», хотя пока, по всей видимости, наука и техника ещё не созрели для таких вещей. Остаётся надеяться, что пытливый ум Человека не остановится на достигнутом в этой области, а будет двигаться дальше и дальше, и мы ещё увидим новые горизонты познания.

Список литературы

1. *Матиясевич Ю. В.* Диофантовость перечислимых множеств // Доклады Академии наук СССР. 1970. Т. 191, № 2. С. 279–282.
2. *Матиясевич Ю. В.* Десятая проблема Гильберта. М.: Наука: Физико-математическая литература, 1993. (Математическая логика и основания математики; выпуск № 26).
3. Проблемы Гильберта / под ред. *П. С. Александрова*. М.: Наука, 1969. С. 39.
4. *Leon E.* Post Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems // Bulletin of the American Mathematical Society. 1944. Vol. 50, № 5. P. 284–316.
5. *Davis M.* Arithmetical Problems and Recursively Enumerable Predicates // The Journal of Symbolic Logic. 1953. Vol. 18, № 1. P. 33–41.
6. *Robinson J.* Existential definability in arithmetic // Transactions of the American Mathematical Society. 1952. Vol. 72, № 3. P. 437–449.
7. *Davis M.* Hilary Putnam Reductions of Hilbert's tenth problem // The Journal of Symbolic Logic. 1958. Vol. 23, № 2. P. 183–187.
8. *Davis M., Putnam H., Robinson J.* The decision problem for exponential Diophantine equations // Annals of Mathematics. 1961. Vol. 74, № 3. P. 425–436.
9. *Бельтюков А. П.* Разрешимость универсальной теории натуральных чисел со сложением и делимостью // Записки научных семинаров Ленингр. отделения Матем. института АН СССР. 1976. Т. 60. С. 15–28.
10. *Lipshitz L.* The Diophantine Problem for Addition and Divisibility. Transactions of the American Mathematical Society, 1978. Vol. 235. P. 271–283.
11. *Маканин Г. С.* Проблема разрешимости уравнений в свободной полугруппе // Матем. сб., 103(145):2(6) (1977), С. 147–236; *Makanin G. S.* The problem of solvability of equations in a free semigroup. Math. USSR-Sb., 32:2 (1977), P. 129–198.

Поступила в редакцию 21.11.2017, окончательный вариант — 20.12.2017.

Computer tools in education, 2017
№ 6: 5–11
http://ipo.spb.ru/journal

TO THE ANNIVERSARY OF YURI VLADIMIROVICH MATIYASEVICH

Beltyukov A. P.[1]

[1]Udmurt State University, Izhevsk, Russia

Abstract

The article describes the well-known Russian mathematician Yuri Vladimirovich Matiyasevich. It is a question of his main results, in particular, about the solution of the tenth problem of Hilbert. The author shares his personal impressions of Yuri Matiyasevich and interesting unresolved problems.

Keywords: *Matiyasevich, Hilbert, the tenth problem, algorithmic decidability.*

Citation: A. P. Beltyukov, "To the Anniversary of Yuri Vladimirovich Matiyasevich," *Computer tools in education*, no. 6, pp. 5–11, 2017 (in Russian).

Received 21.11.2017, the final version — 20.12.2017.

Anatolii P. Beltyukov, Professor, Head of the Department of theoretical foundations of Informatics, Udmurt State University; 426034, Izhevsk, Russia, Universitetskaya St., 1, belt.udsu@mail.ru

Бельтюков Анатолий Петрович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретических основ информатики Удмуртского государственного университета; 426034, Удмуртия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, belt.udsu@mail.ru