Компьютерные инструменты в образовании, 2018
№ 1: 31–50
УДК: 519.87
http://ipo.spb.ru/journal

РЕШЕНИЕ МИНИМАКСНОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ПРЯМОУГОЛЬНОЙ МЕТРИКОЙ*

Плотников П. В.[1], Кривулин Н. К.[1]

[1]Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

Аннотация

Рассматривается минимаксная задача размещения точечного объекта в трехмерном пространстве с прямоугольной метрикой (l_1-метрикой) и предлагается ее прямое аналитическое решение при помощи методов тропической (идемпотентной) математики. Сначала задача записывается в терминах тропической математики как задача тропической оптимизации, вводится параметр для обозначения минимума целевой функции, и задача сводится к решению параметризованной системы неравенств. Эта система решается относительно одной из переменных, а условия существования решений используются для нахождения оптимальных значений второй переменной с помощью вспомогательной задачи оптимизации. Затем вспомогательная задача решается аналогичным образом, и находится значение третьей переменной. Полученное общее решение преобразуется в набор прямых решений, записанных в компактной форме для различных случаев соотношений между исходными параметрами задачи.

Ключевые слова: *задача 1-центра, трехмерное пространство, прямоугольная метрика, идемпотентное полуполе, тропическая оптимизация, полное решение.*

Цитирование: Плотников П. В., Кривулин Н. К. Решение минимаксной задачи размещения в трехмерном пространстве с прямоугольной метрикой // Компьютерные инструменты в образовании. 2018. № 1. С. 31–50.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи размещения составляют важный класс задач оптимизации, который имеет многочисленные приложения в различных областях науки и техники [1–3]. Например, при решении задач пространственного размещения объектов информационной системы часто требуется определить оптимальное положение управляющего объекта относительно системы управляемых объектов. Такого рода научно-технические задачи встречаются при планировании размещения центров управления, хранения и обработки данных, собранных с видеокамер системы видеонаблюдения в здании [4].

Рассматриваемая система видеонаблюдения состоит из трех главных компонент: 1) видеокамеры, производящие входной поток видеоинформации, 2) система передачи

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-010-00723).

сигнала от камер до центра управления, хранения и обработки данных и 3) центр управления. В качестве объектов, относительно которых необходимо решать задачу размещения, выступают видеокамеры внутреннего и наружного наблюдения. Суть задачи размещения (в общем задачу называют задачей 1-центра) состоит в поиске оптимального положения центра управления системой. При этом необходимо минимизировать функцию расстояния до самой дальней камеры, чтобы снизить влияние шумов и повысить качество сигнала, благодаря уменьшению длины кабеля. Внутри одного этажа кабели чаще всего прокладывают вдоль линий разделения пола, стен и потолка. Междуэтажные перекрытия проходятся по вертикальным шахтам. Поэтому можно считать, что все изгибы кабеля осуществляются под прямыми углами, что позволяет измерять его длину при помощи прямоугольной метрики (l_1-метрики).

Существуют различные подходы к решению задачи 1-центра в прямоугольной метрике [5–8]. В качестве примера можно рассматривать методы и алгоритмы линейного и смешанного целочисленного линейного программирования. Алгоритмический подход обычно обеспечивает численное нахождение одного из решений и требует применения специальных программных средств. Такой подход не позволяет получить все решения аналитически в виде явных формульных зависимостей, в удобном для дальнейшего анализа и непосредственных расчетов виде. Возможностью получать решения в аналитическом виде обладает подход на основе применения методов тропической математики.

Тропическая математика — это перспективная и быстро развивающаяся область прикладной математики и алгебраической информатики, которая занимается изучением теории и приложений полуколец с идемпотентным сложением [9–19]. Основное преимущество использования тропического подхода состоит в том, что для целого ряда задач он дает возможность получать полные решения в виде явных формул, удобных для представления, анализа и интерпретации получаемых результатов. Это позволяет эффективно решать задачу размещения в случаях, когда алгоритмическое решение оказывается по тем или иным причинам невозможным или нецелесообразным. Кроме того, процедуры, построенные на основе методов тропической математики, часто имеют меньшую вычислительную сложность в сравнении с известными итерационными алгоритмами.

Подход на основе методов тропической математики находит свое применение при решении задач в различных областях науки и техники, включая задачи принятия решений при анализе результатов оценки альтернатив на основе парных сравнений [20], и задачи планирования сроков выполнения проектов [21]. На основе этого подхода в работах [22–26] получены решения минимаксных задач размещения точечного объекта на плоскости с прямоугольной и чебышевской метрикой без ограничений и с ограничениями на допустимую область размещения.

Настоящая работа направлена на дальнейшее развитие и применение методов тропической математики для решения задач размещения. В статье рассмотрена минимаксная задача размещения точечного объекта в трехмерном пространстве с прямоугольной метрикой. Решение основано на подходе, развитом в работах [27–29], который заключается в замене исходной задачи оптимизации, записанной в терминах тропической математики, на параметризованную систему неравенств с последующим ее решением. На основе этого подхода найдено прямое полное решение задачи, представленное в терминах тропической математики, а также в обычной форме.

2. ЗАДАЧА РАЗМЕЩЕНИЯ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В этом разделе рассматривается минимаксная задача размещения точечного объекта в трехмерном пространстве с прямоугольной метрикой. Она состоит в поиске на основе уже имеющегося набора объектов новой точки, расстояние от которой до самого дальнего объекта из набора было бы минимальным.

Пусть заданы две точки $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$ в пространстве $\mathbb{R}^3$. Расстояние между ними в прямоугольной метрике вычисляется по формуле

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |x_3 - y_3|. \tag{1}$$

Рассмотрим набор точек $\boldsymbol{r}_i = (r_{1i}, r_{2i}, r_{3i})^T \in \mathbb{R}^3$ и чисел $l_i \in \mathbb{R}$ для всех $i = 1, \ldots, m$. Числа l_i могут отражать дополнительные затраты, связанные с перемещением между объектами. Зададим функцию $\phi(\boldsymbol{x})$, которая определяет максимальное расстояние от точки $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ до набора точек $\boldsymbol{r}_i$ следующим образом:

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \max_{1 \le i \le m} (\rho(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{x}) + l_i) = \max_{1 \le i \le m} (|r_{1i} - x_1| + |r_{2i} - x_2| + |r_{3i} - x_3| + l_i) = \phi(x_1, x_2, x_3). \tag{2}$$

Тогда рассматриваемая минимаксная задача размещения точечного объекта в трехмерном пространстве записывается так:

$$\min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3} \quad \phi(\boldsymbol{x}). \tag{3}$$

Для решения задачи и получения полного решения в явном аналитическом виде ниже будет использован аппарат тропической математики.

3. ЭЛЕМЕНТЫ ТРОПИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКИ

В этом разделе приведем обзор основных понятий тропической математики [9–19], на которые будет опираться дальнейшее изложение. Рассмотрим числовое множество $\mathbb{X}$ с заданными на нем ассоциативными и коммутативными операциями сложения $\oplus$ и умножения $\otimes$, которые образуют на $\mathbb{X}$ коммутативное полукольцо с нулем $\mathbb{0}$ и единицей $\mathbb{1}$. Такое полукольцо обозначим через $\langle \mathbb{X}, \mathbb{0}, \mathbb{1}, \oplus, \otimes \rangle$. Сложение будем считать идемпотентным (то есть для любого числа $x \in \mathbb{X}$ выполняется $x \oplus x = x$), а умножение – обратимым (то есть для каждого $x \neq \mathbb{0}$ существует обратный элемент x^{-1} такой, что $x \otimes x^{-1} = \mathbb{1}$). В силу того, что $\langle \mathbb{X} \setminus \{\mathbb{0}\}, \mathbb{1}, \otimes \rangle$ образует коммутативную группу по умножению, описанную структуру $\langle \mathbb{X}, \mathbb{0}, \mathbb{1}, \oplus, \otimes \rangle$ обычно называют идемпотентным полуполем.

Операция возведения в степень с целым показателем вводится стандартным образом. Для любого ненулевого числа $x \in \mathbb{X}$ и натурального n определим $x^0 = \mathbb{1}$, $x^n = x \otimes x^{n-1}$, $x^{-n} = (x^{-1})^n$ и $\mathbb{0}^n = \mathbb{0}$. Будем считать, что операция возведения в целую степень $x \neq \mathbb{0}$ может быть распространена на случай рационального показателя степени. Далее для упрощения математических выкладок знак умножения $\otimes$ в алгебраических выражениях, как обычно, будет опускаться.

В силу того, что сложение идемпотентно, можно определить отношение частичного порядка $\le$ так: $x \le y$ тогда и только тогда, когда $x \oplus y = y$. Из этого определения следует пара неравенств $x \le x \oplus y$ и $y \le x \oplus y$, а также равносильность неравенства $x \oplus y \le z$ и системы неравенств $x \le z$ и $y \le z$ для любых $x, y, z \in \mathbb{X}$. Нетрудно проверить, что выполняются свойства монотонности операций сложения и умножения. Так из условия $x \le y$

для любого z вытекают неравенства $x \oplus z \leq y \oplus z$ и $xz \leq yz$. Кроме того, для любой пары $x, y \neq \mathbb{0}$ из неравенства $x \leq y$ следует $x^{-1} \geq y^{-1}$.

Далее будем дополнительно предполагать, что введенный частичный порядок является линейным. Несложно проверить неравенство $x^{1/2}y^{1/2} \leq x \oplus y$, которое является тропическим аналогом неравенства между геометрическим и арифметическим средними.

В качестве примера алгебраической структуры рассматриваемого типа можно привести вещественное идемпотентное полуполе $\mathbb{R}_{\max,+} = \langle \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, -\infty, 0, \max, +\rangle$, которое обычно называют $(\max, +)$-алгеброй. Нулевым элементом в этом полуполе является $-\infty$, единичным — число 0. Любому числу $x \in \mathbb{R}$ можно сопоставить обратный x^{-1}, который совпадает с противоположным числом $-x$ в обычной алгебре. Для любой пары чисел $x, y \in \mathbb{R}$ определена степень x^y, значение которой равно арифметическому произведению xy. Заметим, что порядок, порожденный операцией идемпотентного сложения, совпадает с обычным линейным порядком на множестве $\mathbb{R}$.

4. ЗАДАЧИ ТРОПИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ОДНОЙ И ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

В этом разделе рассматриваются задачи оптимизации, которые формулируются и решаются в терминах тропической математики (задачи тропической оптимизации). Краткий обзор таких задач можно найти, например, в работе [27]. Ниже предлагается прямое решение задач оптимизации с одной и двумя переменными, заданных в терминах общего идемпотентного полуполя.

Предположим, что необходимо найти ненулевые решения $u \in \mathbb{X}$ задачи

$$\min_{u \in \mathbb{X}} \quad au^{-1/2} \oplus bu^{1/2} \oplus cu^{-1} \oplus du \oplus e, \tag{4}$$

где a, b, c, d, e — числа из $\mathbb{X}$, удовлетворяющие условию $a, b, c, d, e > \mathbb{0}$.

Для получения аналитического решения задачи в явном виде сначала вводится параметр, обозначающий минимум целевой функции. Затем задача сводится к нахождению всех решений параметризованной системы неравенств, условие существования которых используется для определения величины введенного параметра. Все решения рассматриваемой задачи описываются следующим утверждением.

Лемма 1. *Минимум в задаче (4) равен* $\mu = a^{1/2}b^{1/2} \oplus a^{2/3}d^{1/3} \oplus b^{2/3}c^{1/3} \oplus c^{1/2}d^{1/2} \oplus e$ *и достигается тогда и только тогда, когда*

$$u = (\mu^{-2}a^2 \oplus \mu^{-1}c)^{1-\alpha}(\mu^{-2}b^2 \oplus \mu^{-1}d)^{-\alpha}, \qquad 0 \leq \alpha \leq 1. \tag{5}$$

При этом справедливы следующие утверждения:

1) *если* $\mu = a^{1/2}b^{1/2}$, *то* $u = ab^{-1}$;
2) *если* $\mu = a^{2/3}d^{1/3}$, *то* $u = a^{2/3}d^{-2/3}$;
3) *если* $\mu = b^{2/3}c^{1/3}$, *то* $u = b^{-2/3}c^{2/3}$;
4) *если* $\mu = c^{1/2}d^{1/2}$, *то* $u = c^{1/2}d^{-1/2}$;
5) *если* $\mu = e$, *то* $u = (a^2e^{-2} \oplus ce^{-1})^{1-\alpha}(b^2e^{-2} \oplus de^{-1})^{-\alpha}$, *для любого* $0 \leq \alpha \leq 1$.

Доказательство. Обозначим минимум целевой функции в задаче (4) через μ. Тогда все решения задачи определяются уравнением

$$au^{-1/2} \oplus bu^{1/2} \oplus cu^{-1} \oplus du \oplus e = \mu.$$

В силу того, что μ — минимальное значение целевой функции, равенство можно заменить на неравенство
$$au^{-1/2} \oplus bu^{1/2} \oplus cu^{-1} \oplus du \oplus e \leq \mu.$$

Полученное неравенство эквивалентно системе
$$au^{-1/2} \leq \mu, \quad bu^{1/2} \leq \mu, \quad cu^{-1} \leq \mu, \quad du \leq \mu, \quad e \leq \mu. \tag{6}$$

Заметим, что перемножение соответствующих частей первого и второго неравенств дает неравенство $ab \leq \mu^2$, откуда с учетом условия леммы следует, что $\mu \geq a^{1/2}b^{1/2} > \mathbb{0}$.

Решение относительно переменной u первых четырех неравенств (6) дает
$$u \geq \mu^{-2}a^2, \quad u \leq \mu^2 b^{-2}, \quad u \geq \mu^{-1}c, \quad u \leq \mu d^{-1}.$$

Объединим первое и третье неравенство в одно и получим $u \geq \mu^{-2}a^2 \oplus \mu^{-1}c$. Запишем второе и третье неравенства как неравенства относительно u^{-1}, чтобы получить $u^{-1} \geq \mu^{-2}b^2$ и $u^{-1} \geq \mu^{-1}d$. Затем объединим их в одно неравенство $u^{-1} \geq \mu^{-2}b^2 \oplus \mu^{-1}d$ и перейдем к эквивалентному неравенству $u \leq (\mu^{-2}b^2 \oplus \mu^{-1}d)^{-1}$.

Теперь для переменной u можно записать двойное неравенство
$$\mu^{-2}a^2 \oplus \mu^{-1}c \leq u \leq (\mu^{-2}b^2 \oplus \mu^{-1}d)^{-1}. \tag{7}$$

Множество значений u, удовлетворяющих этому неравенству, не пусто, если выполняется неравенство
$$(\mu^{-2}a^2 \oplus \mu^{-1}c) \leq (\mu^{-2}b^2 \oplus \mu^{-1}d)^{-1},$$
которое после умножения обеих частей на $\mu^{-2}b^2 \oplus \mu^{-1}d$ принимает форму
$$(\mu^{-2}a^2 \oplus \mu^{-1}c)(\mu^{-2}b^2 \oplus \mu^{-1}d) \leq \mathbb{1}.$$

Раскроем скобки в левой части, а затем заменим полученное неравенство эквивалентной системой неравенств
$$\mu^{-4}a^2b^2 \leq \mathbb{1}, \qquad \mu^{-3}a^2d \leq \mathbb{1}, \qquad \mu^{-3}b^2c \leq \mathbb{1}, \qquad \mu^{-2}cd \leq \mathbb{1}.$$

Решая неравенства этой системы относительно μ, получим
$$\mu \geq a^{1/2}b^{1/2}, \qquad \mu \geq a^{2/3}d^{1/3}, \qquad \mu \geq b^{2/3}c^{1/3}, \qquad \mu \geq c^{1/2}d^{1/2}.$$

Полученная система, с учетом последнего неравенства из (6), равносильна неравенству
$$\mu \geq a^{1/2}b^{1/2} \oplus a^{2/3}d^{1/3} \oplus b^{2/3}c^{1/3} \oplus c^{1/2}d^{1/2} \oplus e.$$

Заметим, что переход от исходной задачи к этому неравенству, в котором μ обозначает минимум целевой функции, включал только эквивалентные преобразования. Из этого следует, что полученное неравенство задает точную нижнюю границу для μ, а значит, знак неравенства можно заменить на знак равенства:
$$\mu = a^{1/2}b^{1/2} \oplus a^{2/3}d^{1/3} \oplus b^{2/3}c^{1/3} \oplus c^{1/2}d^{1/2} \oplus e.$$

Двойное неравенство (7) для u можно записать с помощью параметра $0 \leq \alpha \leq 1$, представив его в виде (5).

Рассмотрим возможные значения μ. Пусть $\mu = a^{1/2}b^{1/2}$. После подстановки в формулу (7) и применения свойств монотонности идемпотентного сложения получим

$$ab^{-1} \leq a^{-1}b^{-1}a^2 \oplus a^{-1/2}b^{-1/2}c \leq u \leq (a^{-1}b^{-1}b^2 \oplus a^{-1/2}b^{-1/2}d)^{-1} \leq ab^{-1},$$

откуда можно заключить, что $u = ab^{-1}$.

Аналогичным образом можно проверить, что при $\mu = a^{2/3}d^{1/3}$ выполняется равенство $u = a^{2/3}d^{-2/3}$, при $\mu = b^{2/3}c^{1/3}$ — равенство $u = b^{-2/3}c^{2/3}$, а при $\mu = c^{1/2}d^{1/2}$ — равенство $u = c^{1/2}d^{-1/2}$.

При условии $\mu = e$ из (5) получаем, что $u = (a^2e^{-2} \oplus ce^{-1})^{1-\alpha}(b^2e^{-2} \oplus de^{-1})^{-\alpha}$ для любого $0 \leq \alpha \leq 1$. $\square$

Теперь рассмотрим задачу тропической оптимизации с двумя переменными.

Пусть заданы числа $a, b, c, d, e, f, g, h, k > \mathbb{0}$. Требуется найти ненулевые решения $u, v \in \mathbb{X}$ задачи

$$\min_{u,v \in \mathbb{X}} \quad au^{-1} \oplus bv^{-1} \oplus cu \oplus dv \oplus eu^{-1}v^{-1} \oplus fu^{-1}v \oplus guv^{-1} \oplus huv \oplus k. \tag{8}$$

Разделим решение задачи (8) на два этапа. Сначала решим ее относительно одной переменной, сводя к задаче (4). Затем рассмотрим несколько частных случаев и найдем значение второй переменной. Все решения задачи (8) сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. *Введем обозначения:*

$$\begin{aligned} &a_1 = b^{1/2}f^{1/2} \oplus d^{1/2}e^{1/2}, \qquad b_1 = b^{1/2}h^{1/2} \oplus d^{1/2}g^{1/2}, \qquad c_1 = e^{1/2}f^{1/2} \oplus a, \\ &d_1 = g^{1/2}h^{1/2} \oplus c, \qquad e_1 = b^{1/2}d^{1/2} \oplus f^{1/2}g^{1/2} \oplus e^{1/2}h^{1/2} \oplus k. \end{aligned} \tag{9}$$

Тогда минимум в задаче (8) равен $\mu = a_1^{1/2}b_1^{1/2} \oplus a_1^{2/3}d_1^{1/3} \oplus b_1^{2/3}c_1^{1/3} \oplus c_1^{1/2}d_1^{1/2} \oplus e_1$, и справедливы следующие утверждения:

1) *если $\mu = a_1^{1/2}b_1^{1/2}$, то $u = a_1b_1^{-1}$ и*

$$v = \begin{cases} b^{3/4}f^{-1/4}b_1^{-1/2}, & \text{если } a_1 = b^{1/2}f^{1/2}, \\ d^{-3/4}e^{1/4}b_1^{1/2}, & \text{если } a_1 = d^{1/2}e^{1/2}; \end{cases}$$

2) *если $\mu = a_1^{2/3}d_1^{1/3}$, то $u = a_1^{2/3}d_1^{-2/3}$ и*

$$v = \begin{cases} b^{2/3}f^{-1/3}d_1^{-1/3}, & \text{если } a_1 = b^{1/2}f^{1/2}, \\ d^{-2/3}e^{1/3}d_1^{1/3}, & \text{если } a_1 = d^{1/2}e^{1/2}; \end{cases}$$

3) *если $\mu = b_1^{2/3}c_1^{1/3}$, то $u = b_1^{-2/3}c_1^{2/3}$ и*

$$v = \begin{cases} b^{2/3}h^{-1/3}c_1^{-1/3}, & \text{если } b_1 = b^{1/2}h^{1/2}, \\ d^{-2/3}g^{1/3}c_1^{1/3}, & \text{если } b_1 = d^{1/2}g^{1/2}; \end{cases}$$

4) *если $\mu = c_1^{1/2}d_1^{1/2}$, то $u = c_1^{1/2}d_1^{-1/2}$ и*

$$v = \begin{cases} e^{1/2}f^{-1/2}, & \text{если } c_1 = e^{1/2}f^{1/2}, \\ g^{1/2}h^{-1/2}, & \text{если } d_1 = g^{1/2}h^{1/2}, \\ (a^{-1/2}c^{-1/2}b \oplus a^{-1}e \oplus c^{-1}g)^{1-\alpha} \otimes & \\ \otimes (a^{-1/2}c^{-1/2}d \oplus a^{-1}f \oplus c^{-1}h)^{-\alpha}, & \text{если } c_1 = a, d_1 = c; \end{cases}$$

5) *если* $\mu = e_1$, *то* $u = (a_1^2 e_1^{-2} \oplus c_1 e_1^{-1})^{1-\alpha}(b_1^2 e_1^{-2} \oplus d_1 e_1^{-1})^{-\alpha}$ *и*

$$v = \begin{cases} b^{1/2} d^{-1/2}, & \text{если } e_1 = b^{1/2} d^{1/2}, \\ f^{-1/2} g^{1/2} u, & \text{если } e_1 = f^{1/2} g^{1/2}, \\ e^{1/2} h^{-1/2} u^{-1}, & \text{если } e_1 = e^{1/2} h^{1/2}, \\ (bk^{-1} \oplus k^{-1} e t^{-1} \oplus k^{-1} g t)^{1-\beta} \otimes & \\ \otimes (k^{-1} d \oplus k^{-1} f t^{-1} \oplus k^{-1} h t)^{-\beta}, & \text{если } e_1 = k; \end{cases}$$

где α, β — *вещественные числа, удовлетворяющие условиям* $0 \le \alpha \le 1$, $0 \le \beta \le 1$.

Доказательство. Пусть μ — минимум целевой функции в задаче (8). Тогда все решения задачи определяются неравенством

$$au^{-1} \oplus bv^{-1} \oplus cu \oplus dv \oplus eu^{-1}v^{-1} \oplus fu^{-1}v \oplus guv^{-1} \oplus huv \oplus k \le \mu.$$

Это неравенство эквивалентно системе

$$\begin{gathered} au^{-1} \le \mu, \quad bv^{-1} \le \mu, \quad cu \le \mu, \quad dv \le \mu, \\ eu^{-1}v^{-1} \le \mu, \quad fu^{-1}v \le \mu, \quad guv^{-1} \le \mu, \quad huv \le \mu, \quad k \le \mu. \end{gathered} \tag{10}$$

Перемножение соответствующих частей первого и третьего неравенств дает $ac \le \mu^2$, откуда следует, что $\mu \ge a^{1/2} c^{1/2} > \mathbb{0}$.

Решим систему относительно переменной v, считая u параметром. Рассмотрим неравенства, в которых имеется переменная v, и представим их в виде

$$v \ge \mu^{-1} b, \quad v \le \mu d^{-1}, \quad v \ge \mu^{-1} e u^{-1}, \quad v \le \mu f^{-1} u, \quad v \ge \mu^{-1} g u, \quad v \le \mu h^{-1} u^{-1}.$$

Объединив вместе соответствующие неравенства, получим двойное неравенство

$$\mu^{-1}(b \oplus eu^{-1} \oplus gu) \le v \le \mu(d \oplus fu^{-1} \oplus hu)^{-1}. \tag{11}$$

Для того, чтобы множество значений v было не пусто, необходимо выполнение условия

$$(b \oplus eu^{-1} \oplus gu)(d \oplus fu^{-1} \oplus hu) \le \mu^2.$$

Раскроем скобки слева и извлечем квадратный корень из обеих частей неравенства. После добавления тех неравенств из системы (10), которые не зависят от v, получим

$$\begin{aligned} \mu \ge (b^{1/2} f^{1/2} \oplus d^{1/2} e^{1/2}) u^{-1/2} \oplus (b^{1/2} h^{1/2} \oplus d^{1/2} g^{1/2}) u^{1/2} \oplus \\ \oplus (e^{1/2} f^{1/2} \oplus a) u^{-1} \oplus (g^{1/2} h^{1/2} \oplus c) u \oplus b^{1/2} d^{1/2} \oplus f^{1/2} g^{1/2} \oplus e^{1/2} h^{1/2} \oplus k. \end{aligned}$$

В силу того, что μ является минимумом целевой функции, а переход от исходной задачи к последнему неравенству содержал только эквивалентные преобразования, полученное неравенство задает точную нижнюю границу для μ, которая зависит от u. Рассмотрим задачу оптимизации

$$\begin{aligned} \min_{u \in \mathbb{X}} \quad (b^{1/2} f^{1/2} \oplus d^{1/2} e^{1/2}) u^{-1/2} \oplus (b^{1/2} h^{1/2} \oplus d^{1/2} g^{1/2}) u^{1/2} \oplus (e^{1/2} f^{1/2} \oplus a) u^{-1} \oplus \\ \oplus (g^{1/2} h^{1/2} \oplus c) u \oplus b^{1/2} d^{1/2} \oplus f^{1/2} g^{1/2} \oplus e^{1/2} h^{1/2} \oplus k. \end{aligned} \tag{12}$$

С учетом обозначений (9) задача (12) принимает следующий вид:

$$\min_{u\in\mathbb{X}} \quad a_1 u^{-1/2} \oplus b_1 u^{1/2} \oplus c_1 u^{-1} \oplus d_1 u \oplus e_1.$$

Применение леммы 1 для решения задачи дает минимальное значение

$$\mu = a_1^{1/2} b_1^{1/2} \oplus a_1^{2/3} d_1^{1/3} \oplus b_1^{2/3} c_1^{1/3} \oplus c_1^{1/2} d_1^{1/2} \oplus e_1,$$

причем выполняются условия:

1) если $\mu = a_1^{1/2} b_1^{1/2}$, то $u = a_1 b_1^{-1}$;
2) если $\mu = a_1^{2/3} d_1^{1/3}$, то $u = a_1^{2/3} d_1^{-2/3}$;
3) если $\mu = b_1^{2/3} c_1^{1/3}$, то $u = b_1^{-2/3} c_1^{2/3}$;
4) если $\mu = c_1^{1/2} d_1^{1/2}$, то $u = c_1^{1/2} d_1^{-1/2}$;
5) если $\mu = e_1$, то $u = (a_1^2 e_1^{-2} \oplus c_1 e_1^{-1})^{1-\alpha} (b_1^2 e_1^{-2} \oplus d_1 e_1^{-1})^{-\alpha}, \qquad 0 \le \alpha \le 1.$

Рассмотрим различные значения, которые может принимать величина μ, и уточним полученное решение.

4.1. Случай $\mu = a_1^{1/2} b_1^{1/2}$

Предположим, что $\mu = a_1^{1/2} b_1^{1/2}$. В этом случае $u = a_1 b_1^{-1}$, а двойное неравенство (11) для v можно записать в виде

$$a_1^{-1/2} b_1^{-1/2} (b \oplus a_1^{-1} b_1 e \oplus a_1 b_1^{-1} g) \le v \le a_1^{1/2} b_1^{1/2} (d \oplus a_1^{-1} b_1 f \oplus a_1 b_1^{-1} h)^{-1}.$$

Рассмотрим все значения, которые может принимать a_1, определенное по формулам (9). Найдем соответствующие представления для v и μ.

Пусть $a_1 = b^{1/2} f^{1/2}$. Двойное неравенство для v в этом случае преобразуется к виду

$$\begin{aligned} b^{3/4} f^{-1/4} b_1^{-1/2} \le b^{3/4} f^{-1/4} b_1^{-1/2} \oplus b^{-3/4} f^{-3/4} b_1^{1/2} e \oplus b^{1/4} f^{1/4} b_1^{-3/2} g \le v \le \\ \le (b^{-1/4} f^{-1/4} b_1^{-1/2} d \oplus b^{-3/4} f^{1/4} b_1^{1/2} \oplus b^{1/4} f^{1/4} b_1^{-3/2} h)^{-1} \le b^{3/4} f^{-1/4} b_1^{-1/2}, \end{aligned}$$

откуда следует, что $v = b^{3/4} f^{-1/4} b_1^{-1/2}$.

Применяя такие же рассуждения, находим, что при $a_1 = d^{1/2} e^{1/2}$ выполняется равенство $v = d^{-3/4} e^{1/4} b_1^{1/2}$.

4.2. Случай $\mu = a_1^{2/3} d_1^{1/3}$

Допустим, что $\mu = a_1^{2/3} d_1^{1/3}$, тогда $u = a_1^{2/3} d_1^{-2/3}$, а двойное неравенство (11) для v принимает следующий вид:

$$a_1^{-2/3} d_1^{-1/3} (b \oplus a_1^{-2/3} d_1^{2/3} e \oplus a_1^{2/3} d_1^{-2/3} g) \le v \le a_1^{2/3} d_1^{1/3} (d \oplus a_1^{-2/3} d_1^{2/3} f \oplus a_1^{2/3} d_1^{-2/3} h)^{-1}.$$

Рассмотрим различные значения, которые может иметь a_1. Если $a_1 = b^{1/2} f^{1/2}$, то из двойного неравенства для v следует, что

$$\begin{aligned} b^{2/3} f^{-1/3} d_1^{-1/3} \le b^{2/3} f^{-1/3} d_1^{-1/3} \oplus b^{-2/3} f^{-2/3} d_1^{1/3} e \oplus d_1^{-1} g \le v \le \\ \le (b^{-1/3} f^{-1/3} d_1^{-1/3} d \oplus b^{-2/3} f^{1/3} d_1^{1/3} \oplus d_1^{-1} h)^{-1} \le b^{2/3} f^{-1/3} d_1^{-1/3}, \end{aligned}$$

или что $v = b^{2/3} f^{-1/3} d_1^{-1/3}$.

Повторяя рассуждения для случая $a_1 = d^{1/2} e^{1/2}$, получим равенство $v = d^{-2/3} e^{1/3} d_1^{1/3}$.

4.3. Случай $\mu = b_1^{2/3} c_1^{1/3}$

Перейдем к рассмотрению случая $\mu = b_1^{2/3} c_1^{1/3}$. При таком условии имеем $u = b_1^{-2/3} c_1^{2/3}$, а двойное неравенство (11) принимает вид

$$b_1^{-2/3} c_1^{-1/3} (b \oplus b_1^{2/3} c_1^{-2/3} e \oplus b_1^{-2/3} c_1^{2/3} g) \leq v \leq b_1^{2/3} c_1^{1/3} (d \oplus b_1^{2/3} c_1^{-2/3} f \oplus b_1^{-2/3} c_1^{2/3} h)^{-1}.$$

Все значения, которые может принимать b_1, определяются формулами (9). Рассмотрим соответствующие представления для v и μ.

Пусть $b_1 = b^{1/2} h^{1/2}$, тогда двойное неравенство для v записывается так:

$$b^{2/3} h^{-1/3} c_1^{-1/3} \leq b^{2/3} h^{-1/3} c_1^{-1/3} \oplus c_1^{-1} e \oplus b^{-2/3} h^{-2/3} c_1^{1/3} g \leq v \leq \\ \leq (b^{-1/3} h^{-1/3} c_1^{-1/3} d \oplus c_1^{-1} f \oplus b^{-2/3} h^{1/3} c_1^{1/3})^{-1} \leq b^{2/3} h^{-1/3} c_1^{-1/3},$$

откуда следует, что $v = b^{2/3} h^{-1/3} c_1^{-1/3}$.

Аналогично, при $b_1 = d^{1/2} g^{1/2}$ получаем $v = d^{-2/3} g^{1/3} c_1^{1/3}$.

4.4. Случай $\mu = c_1^{1/2} d_1^{1/2}$

Предположим, что $\mu = c_1^{1/2} d_1^{1/2}$. В этом случае $u = c_1^{1/2} d_1^{-1/2}$, а двойное неравенство (11) для v принимает вид

$$c_1^{-1/2} d_1^{-1/2} (b \oplus c_1^{-1/2} d_1^{1/2} e \oplus c_1^{1/2} d_1^{-1/2} g) \leq v \leq c_1^{1/2} d_1^{1/2} (d \oplus c_1^{-1/2} d_1^{1/2} f \oplus c_1^{1/2} d_1^{-1/2} h)^{-1}.$$

Рассмотрим все значения, которые могут принимать c_1 и d_1, исходя из (9). Пусть $c_1 = e^{1/2} f^{1/2}$. Двойное неравенство для v в этом случае преобразуется к виду

$$e^{1/2} f^{-1/2} \leq e^{-1/4} f^{-1/4} d_1^{-1/2} b \oplus e^{1/2} f^{-1/2} \oplus d_1^{-1} g \leq v \leq \\ \leq (e^{-1/4} f^{-1/4} d_1^{-1/2} d \oplus e^{-1/2} f^{1/2} \oplus d_1^{-1} h)^{-1} \leq e^{1/2} f^{-1/2},$$

откуда следует, что $v = e^{1/2} f^{-1/2}$.

В случае $d_1 = g^{1/2} h^{1/2}$ аналогичные рассуждения дают $v = g^{1/2} h^{-1/2}$.

Пусть $c_1 = a$ и $d_1 = c$. Тогда двойному неравенству для v можно придать параметрическую форму

$$v = (a^{-1/2} c^{-1/2} b \oplus a^{-1} e \oplus c^{-1} g)^{1-\alpha} (a^{-1/2} c^{-1/2} d \oplus a^{-1} f \oplus c^{-1} h)^{-\alpha} \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

4.5. Случай $\mu = e_1$

Сначала предположим, что $\mu = b^{1/2} d^{1/2}$. Тогда двойное неравенство (11) для v можно записать следующим образом:

$$b^{-1/2} d^{-1/2} (b \oplus e u^{-1} \oplus g u) \leq v \leq b^{1/2} d^{1/2} (d \oplus f u^{-1} \oplus h u)^{-1}.$$

После дальнейших преобразований получим

$$b^{1/2} d^{-1/2} \leq b^{-1/2} d^{-1/2} b \oplus b^{-1/2} d^{-1/2} e u^{-1} \oplus b^{-1/2} d^{-1/2} g u \leq v \leq \\ \leq (b^{-1/2} d^{-1/2} d \oplus b^{-1/2} d^{-1/2} f u^{-1} \oplus b^{-1/2} d^{-1/2} h u)^{-1} \leq b^{1/2} d^{-1/2},$$

откуда вытекает равенство $v = b^{1/2} d^{-1/2}$.

Если $\mu = f^{1/2}g^{1/2}$, то, проводя аналогичные рассуждения, получим $v = f^{-1/2}g^{1/2}u$, где

$$u = (a_1^2 f^{-1}g^{-1} \oplus c_1 f^{-1/2}g^{-1/2})^{1-\alpha}(b_1^2 f^{-1}g^{-1} \oplus d_1 f^{-1/2}g^{-1/2})^{-\alpha}, \qquad 0 \le \alpha \le 1.$$

При $\mu = e^{1/2}h^{1/2}$ приходим к равенству $v = e^{1/2}h^{-1/2}u^{-1}$, где

$$u = (a_1^2 e^{-1}h^{-1} \oplus c_1 e^{-1/2}h^{-1/2})^{1-\alpha}(b_1^2 e^{-1}h^{-1} \oplus d_1 e^{-1/2}h^{-1/2})^{-\alpha}, \qquad 0 \le \alpha \le 1.$$

Пусть $\mu = k$. Тогда двойные неравенства (11) для s и (5) для u можно записать с использованием неравенств $0 \le \alpha \le 1$ и $0 \le \beta \le 1$ в параметрической форме:

$$\begin{aligned} u &= (a_1^2 k^{-2} \oplus c_1 k^{-1})^{1-\alpha}(b_1^2 k^{-2} \oplus d_1 k^{-1})^{-\alpha}, \\ v &= (bk^{-1} \oplus k^{-1}eu^{-1} \oplus k^{-1}gu)^{1-\beta}(k^{-1}d \oplus k^{-1}fu^{-1} \oplus k^{-1}hu)^{-\beta}. \end{aligned}$$

Исследование этого случая завершает доказательство теоремы. □

Сформулируем полученный результат в компактной форме.

Следствие 1. *Введем обозначения*

$$\begin{gathered} a_1 = b^{1/2}f^{1/2} \oplus d^{1/2}e^{1/2}, \qquad b_1 = b^{1/2}h^{1/2} \oplus d^{1/2}g^{1/2}, \qquad c_1 = e^{1/2}f^{1/2} \oplus a, \\ d_1 = g^{1/2}h^{1/2} \oplus c, \qquad e_1 = b^{1/2}d^{1/2} \oplus f^{1/2}g^{1/2} \oplus e^{1/2}h^{1/2} \oplus k. \end{gathered}$$

Тогда минимум в задаче (8) *равен* $\mu = a_1^{1/2}b_1^{1/2} \oplus a_1^{2/3}d_1^{1/3} \oplus b_1^{2/3}c_1^{1/3} \oplus c_1^{1/2}d_1^{1/2} \oplus e_1$ *и достигается тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned} u &= (\mu^{-2}a^2 \oplus \mu^{-1}c)^{1-\alpha}(\mu^{-2}b \oplus \mu^{-1}d)^{-\alpha}, \\ v &= (\mu^{-1}b \oplus \mu^{-1}eu^{-1} \oplus \mu^{-1}gu)^{1-\alpha}(\mu^{-1}d \oplus \mu^{-1}fu^{-1} \oplus \mu^{-1}hu)^{-\alpha}, \end{aligned}$$

где α — вещественное число, удовлетворяющее условию $0 \le \alpha \le 1$.

Доказательство. При доказательстве теоремы 1 было показано, что множество решений (u, v) задачи (8) описывается при помощи двойного неравенства

$$\mu^{-1}b \oplus \mu^{-1}eu^{-1} \oplus \mu^{-1}gu \le v \le (\mu^{-1}d \oplus \mu^{-1}fu^{-1} \oplus \mu^{-1}hu)^{-1},$$

где величина u является решением задачи (4).

Решение задачи (4) с помощью леммы 1 дает результат в параметрической форме (5), откуда следует утверждение следствия. □

5. ЗАДАЧА ТРОПИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ТРЕМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

В этом разделе рассматривается задача тропической оптимизации с тремя переменными, для которой находится аналитическое решение в явном виде. Сначала вводится параметр для обозначения минимума целевой функции, а затем задача сводится к решению параметризованной системы неравенств относительно одной из неизвестных. Условия существования решений системы позволяют найти оптимальное значение для двух других неизвестных с помощью вспомогательной задачи, которая имеет вид (8). Решение такой задачи с использованием теоремы 1 дает величину введенного параметра. Полученное общее решение задачи преобразуется в набор частных прямых решений для различных соотношений между исходными параметрами.

Пусть заданы числа $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{X}$ и требуется найти все ненулевые решения $u, v, w \in \mathbb{X}$ задачи

$$\min_{u,v,w\in\mathbb{X}} \quad au^{-1}v^{-1}w^{-1} \oplus bu^{-1}v^{-1}w \oplus cu^{-1}vw^{-1} \oplus du^{-1}vw \oplus \\ \oplus euv^{-1}w^{-1} \oplus fuv^{-1}w \oplus guvw^{-1} \oplus huvw. \quad (13)$$

Следующий результат описывает все решения этой задачи.

Теорема 2. *Введем обозначения:*

$$\begin{aligned} &a_1 = a^{1/2}d^{1/2} \oplus b^{1/2}c^{1/2}, \quad b_1 = a^{1/2}f^{1/2} \oplus b^{1/2}e^{1/2}, \quad c_1 = e^{1/2}h^{1/2} \oplus f^{1/2}g^{1/2}, \\ &d_1 = c^{1/2}h^{1/2} \oplus d^{1/2}g^{1/2}, \quad e_1 = a^{1/2}b^{1/2}, \quad f_1 = c^{1/2}d^{1/2}, \quad g_1 = e^{1/2}f^{1/2}, \\ &h_1 = g^{1/2}h^{1/2}, \quad k_1 = a^{1/2}h^{1/2} \oplus b^{1/2}f^{1/2} \oplus c^{1/2}f^{1/2} \oplus d^{1/2}e^{1/2}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} &a_2 = b_1^{1/2}f_1^{1/2} \oplus d_1^{1/2}e_1^{1/2}, \qquad b_2 = b_1^{1/2}h_1^{1/2} \oplus d_1^{1/2}g_1^{1/2}, \qquad c_2 = e_1^{1/2}f_1^{1/2} \oplus a_1, \\ &d_2 = g_1^{1/2}h_1^{1/2} \oplus c_1, \qquad e_2 = b_1^{1/2}d_1^{1/2} \oplus f_1^{1/2}g_1^{1/2} \oplus e_1^{1/2}h_1^{1/2} \oplus k_1. \end{aligned} \quad (15)$$

Тогда минимум в задаче (13) *равен* $\mu = a_2^{1/2}b_2^{1/2} \oplus a_2^{2/3}d_2^{1/3} \oplus b_2^{2/3}c_2^{1/3} \oplus c_2^{1/2}d_2^{1/2} \oplus e_2$, *и справедливы следующие утверждения:*

1) *если* $\mu = a_1^{1/2}b_1^{1/2}$, *то* $u = a_2b_2^{-1}$,

$$v = \begin{cases} b_1^{3/4}f_1^{-1/4}b_2^{-1/2}, & \text{если } a_2 = b_1^{1/2}f_1^{1/2}, \\ d_1^{-3/4}e_1^{1/4}b_2^{1/2}, & \text{если } a_2 = d_1^{1/2}e_1^{1/2}, \end{cases}$$

$$w = (\mu^{-1}au^{-1}v^{-1} \oplus \mu^{-1}cu^{-1}v \oplus \mu^{-1}euv^{-1} \oplus \mu^{-1}guv)^{1-\alpha} \otimes \\ \otimes (\mu^{-1}bu^{-1}v^{-1} \oplus \mu^{-1}du^{-1}v \oplus \mu^{-1}fuv^{-1} \oplus \mu^{-1}huv)^{-\alpha};$$

2) *если* $\mu = a_2^{2/3}d_2^{1/3}$, *то* $u = a_2^{2/3}d_2^{-2/3}$,

$$v = \begin{cases} b_1^{2/3}f_1^{-1/3}d_2^{-1/3}, & \text{если } a_2 = b_1^{1/2}f_1^{1/2}, \\ d_1^{-2/3}e_1^{1/3}d_2^{1/3}, & \text{если } a_2 = d_1^{1/2}e_1^{1/2}, \end{cases}$$

$$w = (\mu^{-1}au^{-1}v^{-1} \oplus \mu^{-1}cu^{-1}v \oplus \mu^{-1}euv^{-1} \oplus \mu^{-1}guv)^{1-\alpha} \otimes \\ \otimes (\mu^{-1}bu^{-1}v^{-1} \oplus \mu^{-1}du^{-1}v \oplus \mu^{-1}fuv^{-1} \oplus \mu^{-1}huv)^{-\alpha};$$

3) *если* $\mu = b_2^{2/3}c_2^{1/3}$, *то* $u = b_2^{-2/3}c_2^{2/3}$,

$$v = \begin{cases} b_1^{2/3}h_1^{-1/3}c_2^{-1/3}, & \text{если } b_2 = b_1^{1/2}h_1^{1/2}, \\ d_1^{-2/3}g_1^{1/3}c_2^{1/3}, & \text{если } b_2 = d_1^{1/2}g_1^{1/2}, \end{cases}$$

$$w = (\mu^{-1}au^{-1}v^{-1} \oplus \mu^{-1}cu^{-1}v \oplus \mu^{-1}euv^{-1} \oplus \mu^{-1}guv)^{1-\alpha} \otimes \\ \otimes (\mu^{-1}bu^{-1}v^{-1} \oplus \mu^{-1}du^{-1}v \oplus \mu^{-1}fuv^{-1} \oplus \mu^{-1}huv)^{-\alpha};$$

4) *если* $\mu = c_2^{1/2}d_2^{1/2}$, *то* $u = c_2^{1/2}d_2^{-1/2}$,

$$v = \begin{cases} e_1^{1/2}f_1^{-1/2}, & \text{если } c_2 = e_1^{1/2}f_1^{1/2}, \\ g_1^{1/2}h_1^{-1/2}, & \text{еслии } d_2 = g_1^{1/2}h_1^{1/2}, \\ (a_1^{-1/2}c_1^{-1/2}b_1 \oplus a_1^{-1}e_1 \oplus c_1^{-1}g_1)^{1-\alpha} \otimes & \\ \otimes (a_1^{-1/2}c_1^{-1/2}d_1 \oplus a_1^{-1}f_1 \oplus c_1^{-1}h_1)^{-\alpha}, & \text{если } c_2 = a_1, d_2 = c_1, \end{cases}$$

$$w = (\mu^{-1} a u^{-1} v^{-1} \oplus \mu^{-1} c u^{-1} v \oplus \mu^{-1} e u v^{-1} \oplus \mu^{-1} g u v)^{1-\beta} \otimes$$
$$\otimes (\mu^{-1} b u^{-1} v^{-1} \oplus \mu^{-1} d u^{-1} v \oplus \mu^{-1} f u v^{-1} \oplus \mu^{-1} h u v)^{-\beta};$$

5) *если* $\mu = e_2$, *то* $u = (a_2^2 e_2^{-2} \oplus c_2 e_2^{-1})^{1-\alpha} (b_2^2 e_2^{-2} \oplus d_2 e_2^{-1})^{-\alpha}$,

$$v = \begin{cases} b_1^{1/2} d_1^{-1/2}, & \text{если } e_2 = b_1^{1/2} d_1^{1/2}, \\ f_1^{-1/2} g_1^{1/2} u, & \text{если } e_2 = f_1^{1/2} g_1^{1/2}, \\ e_1^{1/2} h_1^{-1/2} u^{-1}, & \text{если } e_2 = e_1^{1/2} h_1^{1/2}, \end{cases}$$

$$w = (\mu^{-1} a u^{-1} v^{-1} \oplus \mu^{-1} c u^{-1} v \oplus \mu^{-1} e u v^{-1} \oplus \mu^{-1} g u v)^{1-\beta} \otimes$$
$$\otimes (\mu^{-1} b u^{-1} v^{-1} \oplus \mu^{-1} d u^{-1} v \oplus \mu^{-1} f u v^{-1} \oplus \mu^{-1} h u v)^{-\beta};$$

6) *если* $\mu = k_1$, *то* $u = (a_2^2 k_1^{-2} \oplus c_2 k_1^{-1})^{1-\alpha} (b_2^2 k_1^{-2} \oplus d_2 k_1^{-1})^{-\alpha}$,

$$v = (b_1 k_1^{-1} \oplus k_1^{-1} e_1 u^{-1} \oplus k_1^{-1} g_1 u)^{1-\beta} (k_1^{-1} d_1 \oplus k_1^{-1} f_1 u^{-1} \oplus k_1^{-1} h_1 u)^{-\beta},$$

$$w = \begin{cases} a^{1/2} h^{-1/2} u^{-1} v^{-1}, & \text{если } k_1 = a^{1/2} h^{1/2}, \\ c^{1/2} f^{-1/2} u^{-1} v, & \text{если } k_1 = c^{1/2} f^{1/2}, \\ d^{-1/2} e^{1/2} u v^{-1}, & \text{если } k_1 = d^{1/2} e^{1/2}, \\ b^{-1/2} g^{1/2} u v, & \text{если } k_1 = b^{1/2} g^{1/2}, \end{cases}$$

где α, β *— вещественные числа, удовлетворяющие условиям* $0 \le \alpha \le 1$, $0 \le \beta \le 1$.

Доказательство. Применяя те же рассуждения, что и при решении задач с одной и двумя переменными, обозначим минимум целевой функции в задаче (13) через μ. Тогда все решения задачи определяются неравенством

$$a u^{-1} v^{-1} w^{-1} \oplus b u^{-1} v^{-1} w \oplus c u^{-1} v w^{-1} \oplus d u^{-1} v w \oplus$$
$$\oplus e u v^{-1} w^{-1} \oplus f u v^{-1} w \oplus g u v w^{-1} \oplus h u v w \le \mu,$$

которое эквивалентно системе неравенств

$$a u^{-1} v^{-1} w^{-1} \le \mu, \quad b u^{-1} v^{-1} w \le \mu, \quad c u^{-1} v w^{-1} \le \mu, \quad d u^{-1} v w \le \mu,$$
$$e u v^{-1} w^{-1} \le \mu, \quad f u v^{-1} w \le \mu, \quad g u v w^{-1} \le \mu, \quad h u v w \le \mu.$$

Перемножение соответствующих частей первого и восьмого неравенств дает неравенство $ah \le \mu^2$, откуда с учетом условия леммы следует, что $\mu \ge a^{1/2} h^{1/2} > \mathbb{0}$.

Решим систему относительно w, считая u и v параметрами:

$$w \ge \mu^{-1} a u^{-1} v^{-1}, \quad w \le \mu b^{-1} u v, \quad w \ge \mu^{-1} c u^{-1} v, \quad w \le \mu d^{-1} u v^{-1},$$
$$w \ge \mu^{-1} e u v^{-1}, \quad w \le \mu f^{-1} u^{-1} v, \quad w \ge \mu^{-1} g u v, \quad w \le \mu h^{-1} u^{-1} v^{-1}.$$

Записывая правую и левую части неравенства для w, получим

$$\mu^{-1} (a u^{-1} v^{-1} \oplus c u^{-1} v \oplus e u v^{-1} \oplus g u v) \le w \le \mu (b u^{-1} v^{-1} \oplus d u^{-1} v \oplus f u v^{-1} \oplus h u v)^{-1}. \quad (16)$$

Множество значений w, которые удовлетворяют неравенству (16), не пусто, если

$$(a u^{-1} v^{-1} \oplus c u^{-1} v \oplus e u v^{-1} \oplus g u v)(b u^{-1} v^{-1} \oplus d u^{-1} v \oplus f u v^{-1} \oplus h u v) \le \mu^2.$$

Раскрывая скобки слева и извлекая квадратный корень, получим неравенство

$$\begin{aligned}\mu \geq (a^{1/2}d^{1/2} \oplus b^{1/2}c^{1/2})u^{-1} \oplus (a^{1/2}f^{1/2} \oplus b^{1/2}e^{1/2})v^{-1} \oplus (e^{1/2}h^{1/2} \oplus f^{1/2}g^{1/2})u \oplus \\ \oplus (c^{1/2}h^{1/2} \oplus d^{1/2}g^{1/2})v \oplus a^{1/2}b^{1/2}u^{-1}v^{-1} \oplus c^{1/2}d^{1/2}u^{-1}v \oplus e^{1/2}f^{1/2}uv^{-1} \oplus \\ \oplus g^{1/2}h^{1/2}uv \oplus a^{1/2}h^{1/2} \oplus c^{1/2}f^{1/2} \oplus d^{1/2}e^{1/2} \oplus b^{1/2}g^{1/2}.\end{aligned}$$

Так как μ является минимумом целевой функции задачи, то как и при доказательстве теоремы 1, можно заключить, что полученное неравенство задает точную нижнюю границу для μ. Следовательно, решение исходной задачи сводится к решению задачи

$$\begin{aligned}\min_{u,v\in\mathbb{X}} \quad & (a^{1/2}d^{1/2} \oplus b^{1/2}c^{1/2})u^{-1} \oplus (a^{1/2}f^{1/2} \oplus b^{1/2}e^{1/2})v^{-1} \oplus (e^{1/2}h^{1/2} \oplus f^{1/2}g^{1/2})u \oplus \\ & \oplus (c^{1/2}h^{1/2} \oplus d^{1/2}g^{1/2})v \oplus a^{1/2}b^{1/2}u^{-1}v^{-1} \oplus c^{1/2}d^{1/2}u^{-1}v \oplus e^{1/2}f^{1/2}uv^{-1} \oplus \\ & \oplus g^{1/2}h^{1/2}uv \oplus a^{1/2}h^{1/2} \oplus c^{1/2}f^{1/2} \oplus d^{1/2}e^{1/2} \oplus b^{1/2}g^{1/2}.\end{aligned} \tag{17}$$

С учетом обозначений (14) задача (17) может быть записана в более короткой форме

$$\min_{u,v\in\mathbb{X}} \quad a_1u^{-1} \oplus b_1v^{-1} \oplus c_1u \oplus d_1v \oplus e_1u^{-1}v^{-1} \oplus f_1u^{-1}v \oplus g_1uv^{-1} \oplus h_1uv \oplus k_1.$$

Решение такой задачи предложено в теореме 1. С учетом обозначений (15), минимум в задаче (13) равен $\mu = a_2^{1/2}b_2^{1/2} \oplus a_2^{2/3}d_2^{1/3} \oplus b_2^{2/3}c_2^{1/3} \oplus c_2^{1/2}d_2^{1/2} \oplus e_2$, и справедливы следующие утверждения:

1) если $\mu = a_2^{1/2}b_2^{1/2}$, то $u = a_2b_2^{-1}$ и

$$v = \begin{cases} b_1^{3/4}f_1^{-1/4}b_2^{-1/2}, & \text{если } a_2 = b_1^{1/2}f_1^{1/2}, \\ d_1^{-3/4}e_1^{1/4}b_2^{1/2}, & \text{если } a_2 = d_1^{1/2}e_1^{1/2}; \end{cases}$$

2) если $\mu = a_2^{2/3}d_2^{1/3}$, то $u = a_2^{2/3}d_2^{-2/3}$ и

$$v = \begin{cases} b_1^{2/3}f_1^{-1/3}d_2^{-1/3}, & \text{если } a_2 = b_1^{1/2}f_1^{1/2}, \\ d_1^{-2/3}e_1^{1/3}d_2^{1/3}, & \text{если } a_2 = d_1^{1/2}e_1^{1/2}; \end{cases}$$

3) если $\mu = b_2^{2/3}c_2^{1/3}$, то $u = b_2^{-2/3}c_2^{2/3}$ и

$$v = \begin{cases} b_1^{2/3}h_1^{-1/3}c_2^{-1/3}, & \text{если } b_2 = b_1^{1/2}h_1^{1/2}, \\ d_1^{-2/3}g_1^{1/3}c_2^{1/3}, & \text{если } b_2 = d_1^{1/2}g_1^{1/2}; \end{cases}$$

4) если $\mu = c_2^{1/2}d_2^{1/2}$, то $u = c_2^{1/2}d_2^{-1/2}$ и

$$v = \begin{cases} e_1^{1/2}f_1^{-1/2}, & \text{если } c_2 = e_1^{1/2}f_1^{1/2}, \\ g_1^{1/2}h_1^{-1/2}, & \text{если } d_2 = g_1^{1/2}h_1^{1/2}, \\ (a_1^{-1/2}c_1^{-1/2}b_1 \oplus a_1^{-1}e_1 \oplus c_1^{-1}g_1)^{1-\alpha} \otimes & \\ \otimes (a_1^{-1/2}c_1^{-1/2}d_1 \oplus a_1^{-1}f_1 \oplus c_1^{-1}h_1)^{-\alpha}, & \text{если } c_2 = a_1, d_2 = c_1; \end{cases}$$

5) если $\mu = e_2$, то $u = (a_2^2e_2^{-2} \oplus c_2e_2^{-1})^{1-\alpha}(b_2^2e_2^{-2} \oplus d_2e_2^{-1})^{-\alpha}$ и

$$v = \begin{cases} b_1^{1/2}d_1^{-1/2}, & \text{если } e_2 = b_1^{1/2}d_1^{1/2}, \\ f_1^{-1/2}g_1^{1/2}u, & \text{если } e_2 = f_1^{1/2}g_1^{1/2}, \\ e_1^{1/2}h_1^{-1/2}u^{-1}, & \text{если } e_2 = e_1^{1/2}h_1^{1/2}, \\ (b_1k_1^{-1} \oplus k_1^{-1}e_1u^{-1} \oplus k_1^{-1}g_1u)^{1-\beta} \otimes & \\ \otimes (k_1^{-1}d_1 \oplus k_1^{-1}f_1u^{-1} \oplus k_1^{-1}h_1u)^{-\beta}, & \text{если } e_2 = k_1; \end{cases}$$

где α, β — вещественные числа, удовлетворяющие условиям $0 \le \alpha \le 1$ и $0 \le \beta \le 1$.

Во всех случаях, кроме последнего, формулу для w в виде двойного неравенства (16) запишем с использованием параметра $0 \le \beta \le 1$ следующим образом:

$$w = (\mu^{-1}au^{-1}v^{-1} \oplus \mu^{-1}cu^{-1}v \oplus \mu^{-1}euv^{-1} \oplus \mu^{-1}guv)^{1-\beta} \otimes \\ \otimes (\mu^{-1}bu^{-1}v^{-1} \oplus \mu^{-1}du^{-1}v \oplus \mu^{-1}fuv^{-1} \oplus \mu^{-1}huv)^{-\beta}.$$

Покажем, что в этом случае w может быть записано без использования дополнительного параметра. Действительно, пусть $\mu = k_1 = a^{1/2}h^{1/2}$. Тогда двойные неравенства (16) для w можно записать следующим образом:

$$a^{1/2}h^{-1/2}u^{-1}v^{-1} \le a^{-1/2}h^{-1/2}au^{-1}v^{-1} \oplus a^{-1/2}h^{-1/2}cu^{-1}v \oplus \\ \oplus a^{-1/2}h^{-1/2}euv^{-1} \oplus a^{-1/2}h^{-1/2}guv \le w \le (a^{-1/2}h^{-1/2}bu^{-1}v^{-1} \oplus a^{-1/2}h^{-1/2}du^{-1}v \oplus \\ \oplus a^{-1/2}h^{-1/2}fuv^{-1} \oplus a^{-1/2}h^{-1/2}huv)^{-1} \le a^{1/2}h^{-1/2}u^{-1}v^{-1},$$

что означает $w = a^{1/2}h^{-1/2}u^{-1}v^{-1}$.

Аналогичным путем устанавливаем, что при $\mu = k_1 = c^{1/2}f^{1/2}$, выполняется равенство $w = c^{1/2}f^{-1/2}u^{-1}v$, при $\mu = k_1 = d^{1/2}e^{1/2}$ получаем равенство $w = d^{-1/2}e^{1/2}uv^{-1}$, при $\mu = k_1 = b^{1/2}g^{1/2}$ – равенство $w = b^{-1/2}g^{1/2}uv$.

Рассмотрение этих случаев завершает доказательство. □

6. ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧЕ РАЗМЕЩЕНИЯ

Рассмотрим задачу размещения (3) и представим ее в терминах $(\max, +)$-алгебры. Расстояние между двумя векторами в прямоугольной метрике (1) с использованием операций идемпотентного полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$ записывается так:

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (x_1^{-1}y_1 \oplus y_1^{-1}x_1)(x_2^{-1}y_2 \oplus y_2^{-1}x_2)(x_3^{-1}y_3 \oplus y_3^{-1}x_3).$$

Для заданного набора точек $\boldsymbol{r}_i = (r_{1i}, r_{2i}, r_{3i})^T \in \mathbb{R}^3$ и чисел $l_i \in \mathbb{R}$, где $i = 1,\dots,m$, целевая функция (2) принимает вид

$$\phi(x_1,x_2,x_3) = \bigoplus_{i=1}^{m} l_i(x_1^{-1}r_{1i} \oplus r_{1i}^{-1}x_1)(x_2^{-1}r_{2i} \oplus r_{2i}^{-1}x_2)(x_3^{-1}r_{3i} \oplus r_{3i}^{-1}x_3).$$

Раскроем скобки и введем дополнительные обозначения

$$\begin{aligned} a &= \bigoplus_{i=1}^{m} l_i r_{1i} r_{2i} r_{3i}, & b &= \bigoplus_{i=1}^{m} l_i r_{1i} r_{2i} r_{3i}^{-1}, & c &= \bigoplus_{i=1}^{m} l_i r_{1i} r_{2i}^{-1} r_{3i}, & d &= \bigoplus_{i=1}^{m} l_i r_{1i} r_{2i}^{-1} r_{3i}^{-1}, \\ e &= \bigoplus_{i=1}^{m} l_i r_{1i}^{-1} r_{2i} r_{3i}, & f &= \bigoplus_{i=1}^{m} l_i r_{1i}^{-1} r_{2i} r_{3i}^{-1}, & g &= \bigoplus_{i=1}^{m} l_i r_{1i}^{-1} r_{2i}^{-1} r_{3i}, & h &= \bigoplus_{i=1}^{m} l_i r_{1i}^{-1} r_{2i}^{-1} r_{3i}^{-1}. \end{aligned} \tag{18}$$

Перегруппировав слагаемые, запишем целевую функцию так:

$$\phi(x_1,x_2,x_3) = ax_1^{-1}x_2^{-1}x_3^{-1} \oplus bx_1^{-1}x_2^{-1}x_3 \oplus cx_1^{-1}x_2x_3^{-1} \oplus dx_1^{-1}x_2x_3 \oplus \\ \oplus ex_1x_2^{-1}x_3^{-1} \oplus fx_1x_2^{-1}x_3 \oplus gx_1x_2x_3^{-1} \oplus hx_1x_2x_3.$$

Задача (3) принимает форму задачи (8), где $u = x_1$, $v = x_2$ и $w = x_3$. Применение теоремы 2 дает следующий результат.

Теорема 3. *В дополнение к* (18) *введем обозначения:*

$$
\begin{aligned}
&a_1 = a^{1/2}d^{1/2} \oplus b^{1/2}c^{1/2}, \quad b_1 = a^{1/2}f^{1/2} \oplus b^{1/2}e^{1/2}, \quad c_1 = e^{1/2}h^{1/2} \oplus f^{1/2}g^{1/2},\\
&d_1 = c^{1/2}h^{1/2} \oplus d^{1/2}g^{1/2}, \quad e_1 = a^{1/2}b^{1/2}, \quad f_1 = c^{1/2}d^{1/2}, \quad g_1 = e^{1/2}f^{1/2},\\
&h_1 = g^{1/2}h^{1/2}, \quad k_1 = a^{1/2}h^{1/2} \oplus b^{1/2}f^{1/2} \oplus c^{1/2}f^{1/2} \oplus d^{1/2}e^{1/2},\\
&a_2 = b_1^{1/2}f_1^{1/2} \oplus d_1^{1/2}e_1^{1/2}, \qquad b_2 = b_1^{1/2}h_1^{1/2} \oplus d_1^{1/2}g_1^{1/2}, \qquad c_2 = e_1^{1/2}f_1^{1/2} \oplus a_1,\\
&d_2 = g_1^{1/2}h_1^{1/2} \oplus c_1, \qquad e_2 = b_1^{1/2}d_1^{1/2} \oplus f_1^{1/2}g_1^{1/2} \oplus e_1^{1/2}h_1^{1/2} \oplus k_1.
\end{aligned}
$$

Тогда минимум в задаче (3) *равен* $\mu = a_2^{1/2}b_2^{1/2} \oplus a_2^{2/3}d_2^{1/3} \oplus b_2^{2/3}c_2^{1/3} \oplus c_2^{1/2}d_2^{1/2} \oplus e_2$ *и справедливы следующие утверждения:*

1) *если* $\mu = a_1^{1/2}b_1^{1/2}$, *то* $x_1 = a_2 b_2^{-1}$,

$$
x_2 = \begin{cases} b_1^{3/4}f_1^{-1/4}b_2^{-1/2}, & \text{если } a_2 = b_1^{1/2}f_1^{1/2},\\ d_1^{-3/4}e_1^{1/4}b_2^{1/2}, & \text{если } a_2 = d_1^{1/2}e_1^{1/2}; \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
x_3 = (&\mu^{-1}ax_1^{-1}x_2^{-1} \oplus \mu^{-1}cx_1^{-1}x_2 \oplus \mu^{-1}ex_1x_2^{-1} \oplus \mu^{-1}gx_1x_2)^{1-\alpha} \otimes\\
&\otimes(\mu^{-1}bx_1^{-1}x_2^{-1} \oplus \mu^{-1}dx_1^{-1}x_2 \oplus \mu^{-1}fx_1x_2^{-1} \oplus \mu^{-1}hx_1x_2)^{-\alpha};
\end{aligned}
$$

2) *если* $\mu = a_2^{2/3}d_2^{1/3}$, *то* $x_1 = a_2^{2/3}d_2^{-2/3}$,

$$
x_2 = \begin{cases} b_1^{2/3}f_1^{-1/3}d_2^{-1/3}, & \text{если } a_2 = b_1^{1/2}f_1^{1/2},\\ d_1^{-2/3}e_1^{1/3}d_2^{1/3}, & \text{если } a_2 = d_1^{1/2}e_1^{1/2}; \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
x_3 = (&\mu^{-1}ax_1^{-1}x_2^{-1} \oplus \mu^{-1}cx_1^{-1}x_2 \oplus \mu^{-1}ex_1x_2^{-1} \oplus \mu^{-1}gx_1x_2)^{1-\alpha} \otimes\\
&\otimes(\mu^{-1}bx_1^{-1}x_2^{-1} \oplus \mu^{-1}dx_1^{-1}x_2 \oplus \mu^{-1}fx_1x_2^{-1} \oplus \mu^{-1}hx_1x_2)^{-\alpha};
\end{aligned}
$$

3) *если* $\mu = b_2^{2/3}c_2^{1/3}$, *то* $x_1 = b_2^{-2/3}c_2^{2/3}$,

$$
x_2 = \begin{cases} b_1^{2/3}h_1^{-1/3}c_2^{-1/3}, & \text{если } b_2 = b_1^{1/2}h_1^{1/2},\\ d_1^{-2/3}g_1^{1/3}c_2^{1/3}, & \text{если } b_2 = d_1^{1/2}g_1^{1/2}; \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
x_3 = (&\mu^{-1}ax_1^{-1}x_2^{-1} \oplus \mu^{-1}cx_1^{-1}x_2 \oplus \mu^{-1}ex_1x_2^{-1} \oplus \mu^{-1}gx_1x_2)^{1-\alpha} \otimes\\
&\otimes(\mu^{-1}bx_1^{-1}x_2^{-1} \oplus \mu^{-1}dx_1^{-1}x_2 \oplus \mu^{-1}fx_1x_2^{-1} \oplus \mu^{-1}hx_1x_2)^{-\alpha};
\end{aligned}
$$

4) *если* $\mu = c_2^{1/2}d_2^{1/2}$, *то* $x_1 = c_2^{1/2}d_2^{-1/2}$,

$$
x_2 = \begin{cases} e_1^{1/2}f_1^{-1/2}, & \text{если } c_2 = e_1^{1/2}f_1^{1/2},\\ g_1^{1/2}h_1^{-1/2}, & \text{если } d_2 = g_1^{1/2}h_1^{1/2},\\ (a_1^{-1/2}c_1^{-1/2}b_1 \oplus a_1^{-1}e_1 \oplus c_1^{-1}g_1)^{1-\alpha} \otimes & \\ \otimes(a_1^{-1/2}c_1^{-1/2}d_1 \oplus a_1^{-1}f_1 \oplus c_1^{-1}h_1)^{-\alpha}, & \text{если } c_2 = a_1, d_2 = c_1; \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
x_3 = (&\mu^{-1}ax_1^{-1}x_2^{-1} \oplus \mu^{-1}cx_1^{-1}x_2 \oplus \mu^{-1}ex_1x_2^{-1} \oplus \mu^{-1}gx_1x_2)^{1-\beta} \otimes\\
&\otimes(\mu^{-1}bx_1^{-1}x_2^{-1} \oplus \mu^{-1}dx_1^{-1}x_2 \oplus \mu^{-1}fx_1x_2^{-1} \oplus \mu^{-1}hx_1x_2)^{-\beta};
\end{aligned}
$$

5) *если* $\mu = e_2$, *то* $x_1 = (a_2^2 e_2^{-2} \oplus c_2 e_2^{-1})^{1-\alpha}(b_2^2 e_2^{-2} \oplus d_2 e_2^{-1})^{-\alpha}$,

$$x_2 = \begin{cases} b_1^{1/2} d_1^{-1/2}, & \text{если } e_2 = b_1^{1/2} d_1^{1/2}, \\ f_1^{-1/2} g_1^{1/2} x_1, & \text{если } e_2 = f_1^{1/2} g_1^{1/2}, \\ e_1^{1/2} h_1^{-1/2} x_1^{-1}, & \text{если } e_2 = e_1^{1/2} h_1^{1/2}; \end{cases}$$

$$x_3 = (\mu^{-1} a x_1^{-1} x_2^{-1} \oplus \mu^{-1} c x_1^{-1} x_2 \oplus \mu^{-1} e x_1 x_2^{-1} \oplus \mu^{-1} g x_1 x_2)^{1-\beta} \otimes$$
$$\otimes (\mu^{-1} b x_1^{-1} x_2^{-1} \oplus \mu^{-1} d x_1^{-1} x_2 \oplus \mu^{-1} f x_1 x_2^{-1} \oplus \mu^{-1} h x_1 x_2)^{-\beta};$$

6) *если* $\mu = e_2 = k_1$, *то* $x_1 = (a_2^2 k_1^{-2} \oplus c_2 k_1^{-1})^{1-\alpha}(b_2^2 k_1^{-2} \oplus d_2 k_1^{-1})^{-\alpha}$,

$$x_2 = (b_1 k_1^{-1} \oplus k_1^{-1} e_1 x_1^{-1} \oplus k_1^{-1} g_1 x_1)^{1-\beta}(k_1^{-1} d_1 \oplus k_1^{-1} f_1 x_1^{-1} \oplus k_1^{-1} h_1 x_1)^{-\beta},$$

$$x_3 = \begin{cases} a^{1/2} h^{-1/2} x_1^{-1} x_2^{-1}, & \text{если } k_1 = a^{1/2} h^{1/2}, \\ c^{1/2} f^{-1/2} x_1^{-1} x_2, & \text{если } k_1 = c^{1/2} f^{1/2}, \\ d^{-1/2} e^{1/2} x_1 x_2^{-1}, & \text{если } k_1 = d^{1/2} e^{1/2}, \\ b^{-1/2} g^{1/2} x_1 x_2, & \text{если } k_1 = b^{1/2} g^{1/2}; \end{cases}$$

где α, β *— вещественные числа, удовлетворяющие условиям* $0 \le \alpha \le 1$, $0 \le \beta \le 1$.

Сформулируем результат в терминах обычной математики в виде следствия.

Следствие 2. *Введем обозначения:*

$$a = \max_{1\le i\le m}(l_i + r_{1i} + r_{2i} + r_{3i}), \quad b = \max_{1\le i\le m}(l_i + r_{1i} + r_{2i} - r_{3i}), \quad c = \max_{1\le i\le m}(l_i + r_{1i} - r_{2i} + r_{3i}),$$
$$d = \max_{1\le i\le m}(l_i + r_{1i} - r_{2i} - r_{3i}), \quad e = \max_{1\le i\le m}(l_i - r_{1i} + r_{2i} + r_{3i}), \quad f = \max_{1\le i\le m}(l_i - r_{1i} + r_{2i} - r_{3i}),$$
$$g = \max_{1\le i\le m}(l_i - r_{1i} - r_{2i} + r_{3i}), \quad h = \max_{1\le i\le m}(l_i - r_{1i} - r_{2i} - r_{3i}),$$
$$a_1 = \max(a+d, b+c)/2, \quad b_1 = \max(a+f, b+e)/2, \quad c_1 = \max(e+h, f+g)/2,$$
$$d_1 = \max(c+h, d+g)/2, \quad e_1 = (a+b)/2, \quad f_1 = (c+d)/2, \quad g_1 = (e+f)/2,$$
$$h_1 = (g+h)/2, \quad k_1 = \max(a+h, b+g, c+f, d+e)/2,$$
$$a_2 = \max(b_1 + f_1, d_1 + e_1)/2, \quad b_2 = \max(b_1 + h_1, d_1 + g_1)/2,$$
$$c_2 = \max((e_1 + f_1)/2, a_1), \quad d_2 = \max((g_1 + h_1)/2, c_1),$$
$$e_2 = \max(b_1 + d_1, f_1 + g_1, e_1 + h_1, 2k_1)/2.$$

Тогда минимум в задаче (3) *равен* $\mu = \max((a_2 + b_2)/2, (2a_2 + d_2)/3, (2b_2 + c_2)/3, (c_2 + d_2)/2, e_2)$ *и справедливы следующие утверждения:*

1) *если* $\mu = (a_2 + b_2)/2$, *то*

$$x_1 = a_2 - b_2,$$
$$x_2 = \begin{cases} (3b_1 - f_1)/4 - b_2/2, & \text{если } a_2 = (b_1 + f_1)/2, \\ (-3d_1 + e_1)/4 + b_2/2, & \text{если } a_2 = (d_1 + e_1)/2; \end{cases}$$

$$x_3 = (1-\alpha)\max(-\mu + a - x_1 - x_2, -\mu + c - x_1 + x_2,$$
$$-\mu + e + x_1 - x_2, -\mu + g + x_1 + x_2) - \alpha \max(-\mu + b - x_1 - x_2,$$
$$-\mu + d - x_1 + x_2, -\mu + f + x_1 - x_2, -\mu + h + x_1 + x_2);$$

2) *если* $\mu = (2a_2 + d_2)/3$, *то*

$$x_1 = (2a_2 - 2d_2)/3,$$

$$x_2 = \begin{cases} (2b_1 - f_1 - d_2)/3, & \text{если } a_2 = (b_1 + f_1)/2, \\ (-2d_1 + e_1 + d_2)/3, & \text{если } a_2 = (d_1 + e_1)/2; \end{cases}$$

$$x_3 = (1-\alpha)\max(-\mu + a - x_1 - x_2, -\mu + c - x_1 + x_2, -\mu + e + x_1 - x_2, -\mu + g + x_1 + x_2) - \alpha\max(-\mu + b - x_1 - x_2, -\mu + d - x_1 + x_2, -\mu + f + x_1 - x_2, -\mu + h + x_1 + x_2);$$

3) *если* $\mu = (2b_2 + c_2)/3$, *то*

$$x_1 = (-2b_2 + c_2)/3,$$

$$x_2 = \begin{cases} (2b_1 - h_1 - c_2)/3, & \text{если } b_2 = b_1^{1/2} h_1^{1/2}, \\ (-2d_1 + g_1 + c_2)/3, & \text{если } b_2 = (d_1 + g_1)/2; \end{cases}$$

$$x_3 = (1-\alpha)\max(-\mu + a - x_1 - x_2, -\mu + c - x_1 + x_2, -\mu + e + x_1 - x_2, -\mu + g + x_1 + x_2) - \alpha\max(-\mu + b - x_1 - x_2, -\mu + d - x_1 + x_2, -\mu + f + x_1 - x_2, -\mu + h + x_1 + x_2);$$

4) *если* $\mu = (c_2 + d_2)/2$, *то*

$$x_1 = (c_2 - d_2)/2,$$

$$x_2 = \begin{cases} (e_1 - f_1)/2, & \text{если } c_2 = (e_1 + f_1)/2, \\ (g_1 - h_1)/2, & \text{если } d_2 = (g_1 + h_1)/2, \\ (1-\alpha)\max((-a_1 - c_1)/2 + b_1, & \\ -a_1 + e_1, -c_1 + g_1) - & \\ -\alpha\max((-a_1 - c_1)/2 + d_1, & \\ -a_1 + f_1, -c_1 + h_1), & \text{если } c_2 = a_1, d_2 = c_1; \end{cases}$$

$$x_3 = (1-\beta)\max(-\mu + a - x_1 - x_2, -\mu + c - x_1 + x_2, -\mu + e + x_1 - x_2, -\mu + g + x_1 + x_2) - \beta\max(-\mu + b - x_1 - x_2, -\mu + d - x_1 + x_2, -\mu + f + x_1 - x_2, -\mu + h + x_1 + x_2);$$

5) *если* $\mu = e_2$, *то*

$$x_1 = (1-\alpha)\max(2a_2 - 2e_2, c_2 - e_2) - \alpha\max(2b_2 - 2e_2, d_2 - e_2),$$

$$x_2 = \begin{cases} (b_1 - d_1)/2, & \text{если } e_2 = (b_1 + d_1)/2, \\ (-f_1 + g_1)/2 + x_1, & \text{если } e_2 = (f_1 + g_1)/2, \\ (e_1 - h_1)/2 - x_1, & \text{если } e_2 = (e_1 + h_1)/2; \end{cases}$$

$$x_3 = (1-\beta)\max(-\mu + a - x_1 - x_2, -\mu + c - x_1 + x_2, -\mu + e + x_1 - x_2, -\mu + g + x_1 + x_2) - \beta\max(-\mu + b - x_1 - x_2, -\mu + d - x_1 + x_2, -\mu + f + x_1 - x_2, -\mu + h + x_1 + x_2);$$

6) *если* $\mu = e_2 = k_1$, *то*

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (1-\alpha)\max(2a_2 - 2k_1, c_2 - k_1) - \alpha\max(2b_2 - 2k_1, d_2 - k_1),\\
x_2 &= (1-\beta)\max(b_1 - k_1, -k_1 + e_1 - x_1, -k_1 + g_1 + x_1) - \\
&\quad -\beta\max(-k_1 + d_1, -k_1 + f_1 - x_1, -k_1 + h_1 + x_1),\\
x_3 &= \begin{cases} (a-h)/2 - x_1 - x_2, & \text{если } k_1 = (a+h)/2,\\ (c-f)/2 - x_1 + x_2, & \text{если } k_1 = (c+f)/2,\\ (-d+e)/2 + x_1 - x_2, & \text{если } k_1 = (d+e)/2,\\ (-b+g)/2 + x_1 + x_2, & \text{если } k_1 = (b+g)/2; \end{cases}
\end{aligned}
$$

где α, β *— вещественные числа, удовлетворяющие условиям* $0 \le \alpha \le 1$, $0 \le \beta \le 1$.

Оценим вычислительную сложность полученного решения задачи размещения. Ясно, что трудоемкость расчетных формул следствия 2 определяется сложностью вычисления параметров a, b, c, d, e, f, g и h. Для вычисления каждого такого параметра необходимо выполнение m операций определения максимума величин, полученных за фиксированное число сложений, что дает линейную по m сложность. Применение других формул требует конечного числа операций, которое не зависит от числа точек m.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена минимаксная задача размещения точечного объекта в трехмерном пространстве с прямоугольной метрикой. Такая задача встречается на практике, например, при размещении центра управления системой камер видеонаблюдения в здании. На основе применения методов тропической оптимизации получено полное прямое решение задачи, представленное в форме, которая является удобной для дальнейшего анализа решений и пригодной для непосредственных расчетов с невысокой вычислительной сложностью. Дальнейшие исследования могут включать решение задач размещения в трехмерном пространстве с дополнительными ограничениями на допустимую область размещения, а также рассмотрение задач с произвольной размерностью пространства размещения.

Список литературы

1. *Sule D. R.* Logistics of Facility Location and Allocation / New York: Marcel Dekker, 2001.
2. *Farahani R. Z., Hekmatfar M.* Facility Location / Contributions to Management Science. Heidelberg: Physica-Verlag, 2009.
3. *Eiselt H. A., Marianov V.* Foundations of Location Analysis / New York: Springer, 2011. Vol. 155 of International Series in Operations Research and Management Science.
4. *Krivulin N.* Using tropical optimization to solve constrained minimax single-facility location problems with rectilinear distance // Computational Management Science, 2017. Vol. 1, № 4. P. 493–518.
5. *Francis R. L.* A geometrical solution procedure for a rectilinear distance minimax location problem // AIIE Transactions, 1972. Vol. 4. № 4. P. 328–332.
6. *Hansen P., Peeters D., Thisse J. F.* Constrained location and the Weber-Rawls problem // North-Holland Mathematics Studies, 1981. Vol. 59. P. 147–166.
7. *Zabudskii G. G.* A minimax planar location problem with forbidden zones: its solution algorithm // Automation and Remote Control, 2004. Vol. 65. № 2. P. 241–247.
8. *Nobakhtian S., Dehkordi A. R.* A fast algorithm for the rectilinear distance location problem // Mathematical Methods of Operations Research, 2018. Vol. 87. № 1. P. 1–18.

9. *Cuninghame-Green R. A.* Minimax algebra / Berlin: Springer-Verlag, 1979.
10. *Baccelli F., Cohen G., Olsder G. J., Quadrat J. P.* Synchronization and Linearity. Wiley Series in Probability and Statistics / Chichester: Wiley, 1993.
11. *Маслов В. П., Колокольцов В. Н.* Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении / М.: Физматлит, 1994.
12. *Cuninghame-Green R. A.* Minimax algebra and applications // Advances in Imaging and Electron Physics, Vol. 90 / Ed. by P. W. Hawkes. San Diego: Academic Press, 1994. P. 1–121.
13. *Golan J. S.* Semirings and Affine Equations Over Them / New York: Springer, 2003. Vol. 556 of Mathematics and Its Applications.
14. *Heidergott B, Olsder G. J., van der Woude J.* Max Plus at Work / Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton: Princeton Univ. Press, 2006.
15. *McEneaney W. M.* Max-Plus Methods for Nonlinear Control and Estimation / Systems and Control: Foundations and Applications. Boston: Birkhauser, 2006.
16. *Itenberg I., Mikhalkin G., Shustin E. I.* Tropical Algebraic Geometry / Basel: Birkhauser, 2007. Vol. 35 of Oberwolfach Seminars. doi: 10.1007/978-3-7643-8310-7.
17. *Gondran M., Minoux M.* Graphs, Dioids and Semirings / New York: Springer, 2008. Vol. 41 of Operations Research/ Computer Science Interfaces.
18. *Кривулин Н. К.* Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем / СПб.: Издательство Санкт-Петербургского государственного университета, 2009. 255 с.
19. *Butkovic P.* Max-linear Systems. Springer Monographs in Mathematics / London: Springer, 2010.
20. *Кривулин Н. К., Агеев В. А., Гладких И. В.* Применение методов тропической математики для оценки альтернатив на основе парных сравнений // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления, 2017. № 1. С. 27–41.
21. *Krivulin N. K.* Tropical optimization problems in time-constrained project scheduling // Optimization, 2017. Vol. 66. № 2. P. 205–224.
22. *Krivulin N. K.* An extremal property of the eigenvalue of irreducible matrices in idempotent algebra and solution of the Rawls location problem // Vestnik St. Petersburg Univ. Math, 2011. Vol. 44. № 4. P. 272–281.
23. *Krivulin N. K.* A new algebraic solution to multidimensional minimax location problems with Chebyshev distance // WSEAS Transactions on Mathematics, 2012. Vol. 11. № 7. P. 605–614.
24. *Krivulin N. K.* Complete solution of a constrained tropical optimization problem with application to location analysis // Relational and Algebraic Methods in Computer Science / Cham: Springer, 2014. Vol. 8428 of Lecture Notes in Computer Science. P. 362–378.
25. *Krivulin N. K., Plotnikov P. V.* On an algebraic solution of the Rawls location problem in the plane with rectilinear metric // Vestnik St. Petersburg University: Mathematics, 2015. Vol. 48. № 2. P. 75—81.
26. *Krivulin N.K., Plotnikov P.V.* Using tropical optimization to solve minimax location problems with a rectilinear metric on the line // Vestnik St. Petersburg University: Mathematics, 2016. Vol. 49. № 4. P. 340–349.
27. *Krivulin N.* A multidimensional tropical optimization problem with nonlinear objective function and linear constraints // Optimization, 2015. Vol. 64. № 5. P. 1107–1129.
28. *Krivulin N.* Extremal properties of tropical eigenvalues and solutions to tropical optimization problems // Linear Algebra and its Applications, 2015. Vol. 468. P. 211–232.
29. *Krivulin N.* Direct solution to constrained tropical optimization problems with application to project scheduling // Computational Management Science, 2017. Vol. 14. № 1. P. 91–113.

Поступила в редакцию 19.01.2018, окончательный вариант — 22.02.2018.

Computer tools in education, 2018
№ 1: 31–50
http://ipo.spb.ru/journal

DIRECT SOLUTION OF MINIMAX LOCATION PROBLEM IN THREE-DIMENSIONAL SPACE WITH RECTILINEAR METRIC

Plotnikov P. V.[1], Krivulin N. K.[1]

[1]Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia

Abstract

The minimax problem of placing a point object in a three-dimensional space with a rectangular metric (l1-metric) is considered and its direct analytical solution is proposed using the methods of tropical (idempotent) mathematics. First, the problem is written in terms of tropical mathematics as a problem of tropical optimization, a parameter is introduced to denote the minimum of the objective function and the problem reduces to solving a parametrized system of inequalities. This system is solved with respect to one of the variables, and the conditions for the existence of solutions are used to find the optimal values of the second variable using an auxiliary optimization problem. Then the auxiliary problem is solved in a similar way and the value of the third variable is found. The obtained general solution is transformed into a set of direct solutions written in a compact form for different cases of relationships between the initial parameters of the problem.

Keywords: *1-center problem, three-dimensional space, rectilinear metric, idempotent semifield, tropical optimization, complete solution.*

Citation: P. V. Plotnikov, N. K. Krivulin, "Direct Solution of Minimax Location Problem in Three-Dimensional Space with Rectilinear Metric," *Computer tools in education*, no. 1, pp. 31–50, 2018 (in Russian).

Received 19.01.2018, The final version — 22.02.2018.

Pavel V. Plotnikov , postgraduate student, Department of Statistical Modeling, SPbGU, pavplot@gmail.com
Nikolai K. Krivulin, Dr. of physical and mathematical sciences, professor, SPbGU; 199034, Russian Federation, Saint Petersburg, Universitetskaya nab. 7–9, nkk@math.spbu.ru

**Плотников Павел Владимирович,
аспирант кафедры статистического моделирования СПбГУ,
pavplot@gmail.com**

**Кривулин Николай Кимович,
доктор физико-математических наук, профессор кафедры статистического моделирования СПбГУ; 199034, Россия, Санкт-Петербург, Университетская наб. 7–9,
nkk@math.spbu.ru**